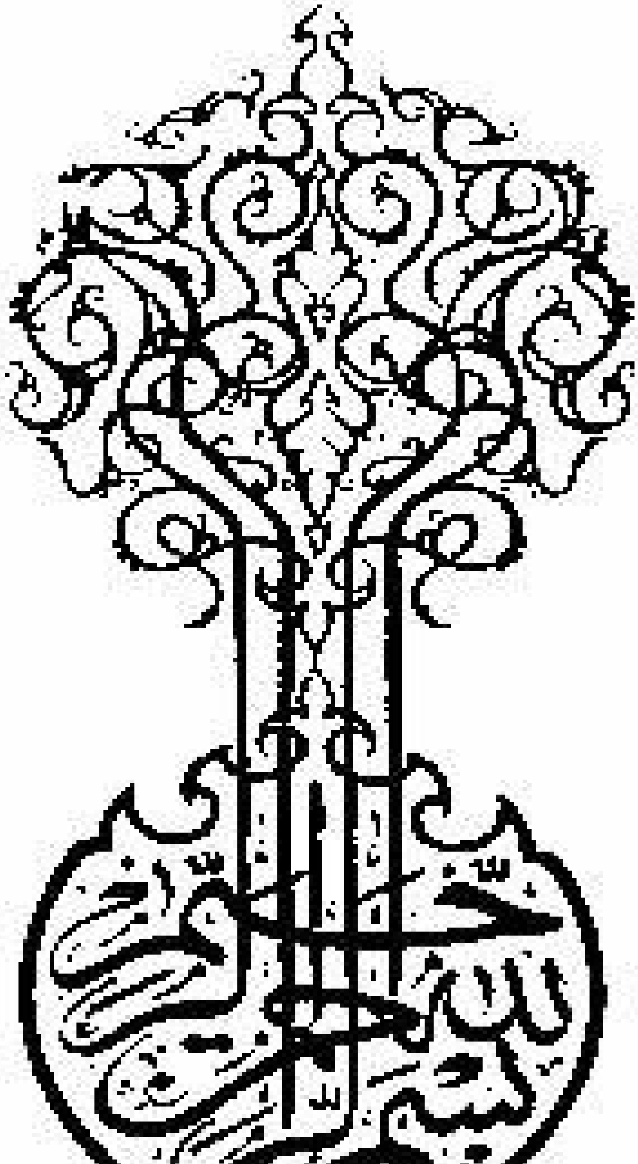
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی ریاضی محض گرایش آنالیز

زیردیفرانسیل های تعمیم یافته برای توابع شبه محدب

استاد راهنما:

دکتر محمدرضا پوریای ولی

استاد مشاور:

دکتر صغری نوبختیان

پژوهشگر:

اعظم مالوردی دستجردی

شهریورماه ۱۳۸۸

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش آنالیز خانم اعظم مالوردی دستجردی

تحت عنوان:

زیر دیفرانسیل‌های تعمیم یافته برای توابع شبه محدب

در تاریخ ... **۸۸/۶/۱۵**..... توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ...بسیار خوب... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه دکتر محمدرضا پوریای ولی با مرتبه علمی دانشیار امضاء

۲- استاد مشاور پایان نامه دکتر صغری نوبختیان با مرتبه علمی دانشیار امضاء

۳- استاد داور داخل گروه دکتر محمود لشکری زاده با مرتبه علمی استاد امضاء

۴- استاد داور خارج گروه دکتر علی بارانی با مرتبه علمی استادیار امضاء

مهر و امضای مدیر گروه ....

تقدیر و تشکر

پروردگار مهربان را سپاسگزارم که توفیق عنایت کرد تا این مقطع تحصیلی را با موفقیت به پایان برسانم. جا دارد از استاد راهنمای محترم جناب آقای دکتر محمدرضا پوریای ولی که در طی فرآیند انجام پایان نامه از راهنمایی ها و کمک های بی دریغ شان بهره بردم و همچنین از سرکار خانم دکتر صغری نوبختیان استاد محترم مشاورم که از راهنمایی های ارزنده ایشان نیز بهره مند شدم، تشکر ویژه نمایم.از جناب آقای دکتر بارانی و جناب آقای دکتر لشکری زاده که کار داوری پایان نامه را بر عهده گرفتند و با ایرادات، پیشنهادات و انتقادات به جا و سازنده خویش زمینه ی بهبود پایان نامه را فراهم ساختند نیز صمیمانه تشکر می نمایم. همچنین از همسر عزیزم که در طول انجام پایان نامه از کمک های بی شائبه ی ایشان در زمینه های مختلف استفاده نمودم بسیار ممنونم. از سرکار خانم فرهمند و دیگر عزیزان در سایر واحدهای دانشکده که همکاری خوبی داشتند نیز تشکر می نمایم. در خاتمه بر خود وظیفه می دانم که از تک تک اساتید بزرگوار که در طول دوران تحصیل افتخار شاگردی ایشان را داشتم و همچنین از همکلاسی های عزیزم و دیگر دوستانم که به نوعی در این تحقیق یاریگرم بودند تشکر نمایم.

تقدیم به

پدر دلسوزم

مادر مهربانم

همسر عزیزتر از جانم

و تمامی عزیزانی که دوستشان دارم.

چکیده

توابع شبه محدب کلاسی از توابع هستند که دارای قدمت بیش از پنجاه سال می باشند و بسیار بزرگ تر از کلاس توابع محدب هستند. این کلاس از توابع نقش بسیار مهمی در زمینه های مختلف ریاضی و اقتصاد ایفا می کنند. در سی سال اخیر، چندین مفهوم از زیردیفرانسیل برای توابع شبه محدب مطرح شده است. قدیمی ترین آنها زیردیفرانسیل گرینبرگ-پی یرسکالا و زیردیفرانسیل مماسی می باشد. این زیردیفرانسیل ها به اندازه کافی بزرگ هستند و می توانند اطلاعات لازم را در اختیار ما قرار دهند. هدف از این پایان نامه، معرفی و مطالعه ی زیردیفرانسیل هایی برای توابع شبه محدب می باشد. یکی از آنها ماهیتی قابل استفاده برای آنالیز غیر هموار دارد. دیگری به گونه ای است که برای تمام توابع تعریف گردیده و یکی دیگر از آنها زیردیفرانسیل تغییراتی است.

کلید واژه ها: توابع شبه محدب، زیردیفرانسیل، تحدب تعمیم یافته، شرایط بهینگی، آنالیز غیر هموار

فهرست مطالب

مقدمه

یکی از مباحث مهم آنالیز، خاصیت تحدب می باشد که دارای ویژگی های پایدار خوبی است و خواص توپولوژیکی زیبایی را بدست می دهد. بسیاری از این ویژگی ها وقتی که در مفهوم تحدب تعمیم یافته همانند شبه محدب بودن به کار رفته می شوند، از بین می روند. با این وجود، توابع شبه محدب نقش مهمی را در ریاضیات ایفا می کنند. هدف این پایان نامه معرفی و مطالعه ی زیر دیفرانسیل هایی است که در ارتباط باتوابع شبه محدب می باشد.

این پایان نامه شامل چهار فصل است. در فصل اول به بیان تعاریف و مفاهیم مقدماتی و بعضی قضایای مورد نیاز پرداخته می شود. در فصل دوم نشان داده می شود که زیر دیفرانسیل تغییراتی، زیر دیفرانسیلی مناسب برای توابع شبه محدب است و ساختار این زیر دیفرانسیل بررسی می شود.

در فصل سوم ویژگی های مجموعه جواب برنامه های شبه محدب بیان می شود. این فصل مشتمل بر دو بخش است، در بخش نخست چند زیر دیفرانسیل را معرفی کرده، سپس شرایط لازم و کافی برای این نوع مسائل بررسی می شود. در بخش دوم به بررسی پایائی زیر دیفرانسیل درون گرا پرداخته می شود.

با توجه به فراوانی زیر دیفرانسیل هایی که برای توابع شبه محدب به کار می روند، در فصل چهارم زیر دیفرانسیل های مناسب برای این کلاس از توابع معرفی می شود. لذا در بخش اول زیر دیفرانسیل هایی را معرفی کرده، در بخش بعدی این

زیر دیفرانسیل ها با زیر دیفرانسیل خاصی مقایسه می گردد. در بخش سوم نیز ویژگی های این زیر دیفرانسیل خاص بیان می شود.

فصل ۱

مفاهیم اولیه

در این فصل به ارائه ی برخی از تعاریف و و قضایا می پردازیم که از مراجع [۲۵، ۱٦، ۸، ٦، ۴] استفاده شده است.

تعریف ۱.۱ . فضای برداری حقیقی V را یک فضای خطی نرمدار حقیقی می نامیم اگر به هر $x \in V$ ، یک عدد حقیقی نامنفی $\|x\|$ به نام نرم چنان مربوط شده باشد که

۱) به ازای هر x,y در V داشته باشیم:

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

۲) اگر $x \in V$ و α اسکالر باشد آنگاه

$$\|\alpha x\| = |\alpha|.\|x\|$$

۳) $\|x\| = 0$ تساوی $x = 0$ را ایجاب می کند.

اگر شرط (۳) حذف شود، یک شبه نرم خواهیم داشت.

تعریف ۲.۱ . فرض کنید X یک مجموعه ی غیر تهی باشد. یک توپولوژی روی X، یک زیر مجموعه ی τ از $P(X)$ یعنی مجموعه ای از زیر مجموعه های X است به طوری که

۱) X و $\emptyset$ متعلق به τ هستند.

۲) اجتماع هر خانواده از مجموعه های در τ نیز مجموعه ای از τ است.

۳) مقطع هر خانواده ی متناهی از مجموعه های در τ نیز مجموعه ای از τ است.

زوج (X,τ) را فضای توپولوژیکی می نامند و عناصر τ را مجموعه های باز گویند.

تعریف ۳.۱ .فرض کنید X یک مجموعهٔ غیر تهی باشد، تابع حقیقی $d: X \times X \to R^+$ را یک متر روی X گوییم هرگاه برای هر $x,y,z \in X$ در شرایط زیر صدق کند:

(۱) $x = y$ اگر و تنها اگر $d(x,y) = 0$،

(۲) $d(x,y) = d(y,x)$،

(۳) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

مجموعهٔ X را با متر d یک فضای متریک گوییم و آن را با (X,d) نمایش می دهیم.

دنباله ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ در فضای متریک X را کوشی نامیم، هر گاه برای هر $\varepsilon > 0$ ، $n_0 \in N$ وجود داشته باشد به قسمی که برای هر $m,n \geq 0$ داشته باشیم: $d(x_m.x_n) < \varepsilon$.

تعریف ۴.۱ .فضای متریک (X,d) را کامل (تام) گوییم هر گاه هر دنباله ی کوشی در X همگرا باشد.

اگر X یک فضای نرم دار باشد و برای هر $x,y \in X$ ، قرار دهیم:

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

آنگاه به سادگی دیده می شود که d یک متریک روی X است و لذا هر فضای نرم دار یک فضای متریک است.

تعریف ۵.۱ .فضای نرم دار X را یک فضای باناخ گوییم، هر گاه X نسبت به متریک تولید شده به وسیله ی نرم یک فضای کامل باشد.

تعریف ۶.۱ . فوق صفحه $P \subseteq R^n$ ، مجموعه نقاطی به شکل $\{x| < a, x >= b\}$ است که در آن a بردار غیر صفر در R^n و b یک عدد حقیقی ثابت می باشد. توجه کنید که فوق صفحه P ، دو نیم فضای بسته

$$P = \{x| < a, x > \leq b\}$$

و

$$P = \{x| < a, x > \geq b\}$$

و دو نیم فضای باز

$$P = \{x| < a, x > < b\}$$

و

$$P = \{x| < a, x > > b\}$$

را تعریف می کند. در این تعریف منظور از $< a, x >$ ضرب داخلی در R^n است.

قضیه ۷.۱ . (هان-باناخ)[1] اگر X یک فضای خطی روی R و S زیر فضای X باشد و $P : X \to R$ که در شرایط زیر صدق کند:

۱) $P(x + y) \leq P(x) + P(y)$ ،

[1] $Hahn - Banach$

۲) برای $\alpha \geq 0$ ، $P(\alpha x) = \alpha P(x)$.

چنانچه f تابعک خطی روی S باشد به طوری که برای هر $s \in S$ ، $f(s) \leq P(s)$

در این صورت $F : X \to R$ وجود دارد به قسمی که $F \leq P$ و تحدید F به S

برابر با f می باشد.

اثبات . برای اثبات به [۱۷] رجوع کنید. □

تعریف ۸.۱ .هر گاه (X, d) یک فضای متریک باشد،

گوی باز به مرکز x و شعاع r به صورت $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$ و گوی

بسته به صورت $B[x, r] = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$ تعریف می شود.

اگر (X, τ) یک فضای توپولوژیکی باشد و $A \subseteq X$ ، در این صورت

۱) بستار A ، کوچکترین مجموعه بسته شامل A است. به عبارت دیگر، اشتراک تمام مجموعه های بسته X ، که شامل A هستند و با $\bar{A}$ نمایش داده می شود.

۲) درون A ، بزرگترین مجموعه ی باز در A است. به عبارت دیگر، اجتماع تمام مجموعه های باز X که مشمول در A هستند و با A° نمایش داده می شود.

تعریف ۹.۱ . فرض کنید S زیر مجموعه ای از فضای خطی X باشد. یک بردار x در S یک نقطه ی درونی جبری S (در X) نامیده می شود اگر برای هر

$y \in X$، $\alpha_y > \circ$ وجود داشته باشد به قسمی که برای هر $\circ \leq \alpha \leq \alpha_y$ ،

$$(\text{۱} - \alpha)x + \alpha y \in S.$$

مجموعه ی تمام نقاط درونی جبری S در X درون جبری S (در X) نامیده می شود و با $alg\ int_X(S)$ نمایش داده می شود.

اگر $S \subseteq alg\ int_X(S)$ گوییم که S به طور جبری باز در X است.

مثال: فرض کنید

$$S = \{(t,t) : \circ \leq t \leq \text{۱}\}$$

و

$$X = \{(t,t) : t \in R\}$$

در این صورت

$$alg\ int_X(S) = \{(t,t) : \circ < t < \text{۱}\},$$

اما

$$alg\ int_{R^{\text{۲}}}(S) = \emptyset.$$

تعریف ۱۰.۱ . مجموعه ی $M \subseteq R^n$ یک مجموعه ی آفین نامیده می شود اگر برای هر $x, y \in M$ و هر $\lambda \in R$ ،

$$(\text{۱} - \lambda)x + \lambda y \in M.$$

مثال : $\emptyset$ و R^n مثال هایی از مجموعه های آفین هستند.

تعریف ۱۱.۱ .فرض کنید $X \subseteq R^n$ باشد، اشتراک تمام مجموعه های آفین شامل در X غلاف آفین X نامیده می شود و با $aff(X)$ نمایش داده می شود. نتیجه می شود که $aff(X)$ مجموعه آفین مینیمال شامل در X است.

همچنین گوییم که X یک مجموعه آفین است اگر X شامل تمام ترکیبات آفینش باشد، یعنی ترکیبات خطی $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$ ، که در آن $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = 1$ و k یک عدد صحیح مثبت است. به طور مشابه، $aff(X)$ همچنین ممکن است به صورت گردایه ای از تمام ترکیبات آفین از بردارهای X ، یعنی

$$aff(X) = \{x : x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i, x_i \in X, \lambda_i \in R, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1\}$$

تعریف شود.

تعریف ۱۲.۱ . فرض کنید S زیر مجموعه ای از فضای خطی X باشد. یک بردار x در S نقطه ی درونی نسبی S نامیده می شود اگر برای هر $y \in aff(S)$ ، یک $\alpha > 0$ وجود داشته باشد به قسمی که

$$(1 - \alpha)x + \alpha y \in S.$$

مجموعه ی تمام نقاط درون نسبی S ، درون نسبی S نامیده می شود و با $ri(S)$

نمایش داده می شود.

توجه کنید که $ri(\emptyset) = \emptyset$.

اگر $S \subseteq ri(S)$ ، گوییم که S به طور نسبی باز است.

مثال: فرض کنید

$$S = \{(t,t) : ۰ \leq t \leq ۱\}$$

در این صورت

$$ri(S) = \{(t,t) : ۰ < t < ۱\}$$

و نیز

$$ri(\{۰\}) = \{۰\},$$

زیرا $aff(\{۰\}) = \{۰\}$.

تعریف ۱۳.۱ . در فضای توپولوژیک X ، $A \subseteq X$ چگال در X نامیده می شود هر گاه $\bar{A} = X$ باشد.

تعریف ۱۴.۱ . فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد، یک زیر مجموعه ی A از X هیچ جا چگال نامیده می شود، اگر $\overline{A}^{\circ} = \emptyset$ باشد.

به ویژه یک مجموعه هیچ جا چگال شامل هیچ گوی باز نمی شود.

قضیه ۱۵.۱ . (بئر[۲]) فرض کنید X یک فضای متریک کامل باشد و فرض کنید $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله ای از زیر مجموعه های X باشد به قسمی که $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ آنگاه $n_\circ \in N$ وجود دارد به قسمی که $(\overline{A}_{n_\circ})^\circ \neq \emptyset$.

اثبات . به مرجع [۱۱] مراجعه کنید.

تعریف ۱۶.۱ .فرض کنید X یک فضای متریک باشد. گوییم حد زبرین تابع $f : X \to [-\infty, +\infty)$ که آن را با $\limsup_{x\to x_\circ} f(x)$ نمایش می دهیم، برابر با l است هر گاه به ازای هر $\varepsilon > \circ$ ، $\delta > \circ$ وجود داشته باشد به قسمی که برای هر x با شرط $d(x, x_\circ) < \delta$ و $x \neq x_\circ$ داشته باشیم:

$$f(x) \leq l + \varepsilon.$$

همچنین گوییم حد زیرین تابع $f : X \to (-\infty, +\infty]$ که آن را با $\liminf_{x\to x_\circ} f(x)$ نمایش می دهیم، برابر با l است هر گاه به ازای هر $\varepsilon > \circ$ ، $\delta > \circ$ وجود داشته باشد به قسمی که برای هر x با شرط $d(x, x_\circ) < \delta$ و $x \neq x_\circ$ داشته باشیم:

$$f(x) \geq l - \varepsilon.$$

---

[۲] *Baire*