بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه کردستان
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

عنوان:

روش جواب اساسی برای مسائل بیضوی غیرهمگن

پژوهشگر:

فاطمه فریادرس

استاد راهنما:

دکتر کمال شانظری

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

اسفند ۱۳۹۲

دانشگاه کردستان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

عنوان:

روش جواب اساسی برای مسائل بیضوی غیرهمگن

پژوهشگر:

فاطمه فریادرس

در تاریخ ۱۳۹۲/۱۲/۱۲ توسط کمیته تخصصی وهیات داوران زیر مورد بررسی قرار گرفت و با نمره ۱۹/۱ و درجه عالی به تصویب رسید.

هیات داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱ـ استاد راهنما	دکتر کمال شانظری	دانشیار	
۲ـ استاد مشاور	دکتر فردین ساعدپناه	استادیار	
۳ـ استاد داور داخلی	دکتر مراد احمدنسب	استادیار	
۴ـ استاد داور داخلی	دکتر امجد علی پناه	استادیار	

مهر و امضاء مدیر گروه

دانشگاه کردستان
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

مهر و امضاء معاون آموزشی و تحصیلات تکمیلی دانشکده

دانشگاه کردستان
دانشکده علوم پایه
معاونت آموزشی و تحصیلات تکمیلی

University of Kurdistan
Faculty of Science
Department of Mathematics

Title:

The method of fundamental solution for inhomogeneous elliptic problems

By:
Fateme Faryadras

Supervisor:
Dr. Kamal Shanazari

A Thesis
Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of
M.Sc. in Applied Mathematics

March 2014

University of Kurdistan
Faculty of Science
Department of Mathematics

A Thesis Submitted to the Postgraduate Studies Office in Partial Fulfillment
of the Requirements for the Degree of M.Sc.
in Applied Mathematics

Title:
The method of fundamental solution for inhomogeneous elliptic problems

By:
Fateme Faryadras

The above thesis was evaluated and approved by the following members of the thesis committee with mark ..19.-1........ and excellent quality on March 3, 2014.

Position	Title and Name	Signature
1. Supervisor:	Assoc. Prof. Dr. Kamal Shanazari	
2. Advisor. :	Assist. Prof. Dr. Fardin Saedpanah	
3. Internal Examiner:	Assist. Prof. Dr. Morad Ahmadnasab	
4. Internal Examiner:	Assist. Prof. Dr. Amjad Alipanah	

Head of Department: ....

Faculty Graduate Coordinator: ....

دانشگاه کردستان
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

دانشگاه کردستان
دانشکده علوم پایه
معاونت آموزشی و تحصیلات تکمیلی

تشکر و قدردانی

بعد از حمد و ثنای پروردگار هستی‌بخش بر خود واجب می‌دانم که سپاس‌گزاری و تشکر نمایم از اساتیدی که نزد آنان در دوره کارشناسی ارشد تلمذ و شاگردی نمودم و از فضل و دانش آنان بهره‌مند گردیدم. در این میان دو گروه بر ذمه من حق بیشتری دارند نخست آنان‌که راهنما و مشاور من در نوشتن این پایان‌نامه بودند و دوم آنان‌که به عنوان داور به ارزیابی علمی آن می‌پردازند . چراغ هدایت و قبله راهنما در وجود استاد دانشمند و اسوه اخلاق جناب آقای دکتر کمال شانظری به عنوان استاد راهنما عینیت یافت و اگر این پایان‌نامه را رونق و جلایی است از او و اگر عیب و نقصانی از نویسنده. همچنین مشاوره و تصحیح استاد مشاور فرهیخته و متعهد جناب آقای دکتر فردین ساعدپناه در تکمیل این پایان‌نامه مؤثر و داوری اساتید بزرگوارم آقایان دکتر مراد احمدنسب و دکتر امجد علی‌پناه موجب ارتقا ارزش علمی آن خواهد شد.

در پایان این اثر را به حسین فرزند عزیزم تقدیم می‌کنم که وجودش شادی بخش زندگی‌ام می‌باشد.

چکیده

در این پایان‌نامه از یک روش بدون شبکه تحت عنوان روش جواب اساسی برای حل معادلات دیفرانسیل بیضوی استفاده می‌شود.

این روش به‌طور مستقیم برای حل معادلات همگن دو و سه‌بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای حل معادلات پواسون ترکیبی از این روش و روش جواب خصوصی به‌کار گرفته می‌شود. با داشتن یک جواب خصوصی که لزوماً در شرایط مرزی صدق نمی‌کند می‌توان معادله را به یک معادله همگن با شرایط مرزی تغییر یافته تبدیل کرد. در این پایان‌نامه دو روش متفاوت برای یافتن جواب خصوصی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در روش اول جواب خصوصی توسط توابع پایه‌ی شعاعی به‌دست می‌آید. در روش دیگر محاسبه جواب خصوصی به‌وسیله پتانسیل نیوتن انجام می‌گیرد. در هر دو روش پس از یافتن جواب خصوصی، معادله همگن حاصل به‌کمک روش جواب اساسی حل می‌شود. همچنین تعمیم هر دو روش به حالت سه‌بعدی ارائه می‌شود و به‌وسیله نتایج عددی خطا و زمان اجرا در دو روش مورد مقایسه قرار می‌گیرد.

کلمات کلیدی: معادله لاپلاس و پواسون–روش جواب اساسی –توابع پایه‌ی شعاعی –پتانسیل نیوتن

فهرست مطالب

لیست جداول

لیست تصاویر

مقدمه

معادلات دیفرانسیل جزئی[۱]$(PDEs)$علاوه بر ریاضیات در مهندسی، اقتصاد و دیگر علوم کاربرد فراوان دارند. روش‌های عددی متفاوتی برای حل عددی $PDEs$ وجود دارد که در یک دسته بندی به دو گروه عمده روش‌های باشبکه‌بندی و بدون شبکه‌بندی[۲] تقسیم می‌شوند. از جمله روش‌های باشبکه‌بندی دامنه‌ای روش تفاضل متناهی[۳](FDM) و روش عناصر متناهی[۴](FEM)می‌باشد. در این روش‌ها تقسیم‌بندی روی دامنه صورت می‌گیرد که پیاده‌سازی آنها را روی معادلاتی با نواحی نامنظم با بعد سه و بالاتر با مشکل مواجه می‌کند [۱، ۲].

در مقابل روش‌های دامنه‌ای، روش‌هایی مانند روش عناصر مرزی[۵](BEM)،که اولین بار توسط بربیا[۶]در سال ۱۹۷۸ پایه‌گذاری گردید [۳]، دارای ماهیت مرزی بوده و فقط به تقسیم‌بندی مرز اکتفا می‌کند. بنابراین بعد مسأله به اندازه یک واحد کاهش یافته و حجم دستگاه معادلات به‌وجود آمده را به‌طور قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌دهد. در روش عناصر مرزی ابتدا معادله دیفرانسیل داده شده با استفاده از توابع خاصی تحت عنوان جواب اساسی به یک معادله انتگرال تبدیل می‌شود و سپس معادله انتگرال به‌وجود آمده، با روش‌های عددی حل می‌شود. شکل خاص جواب اساسی باعث به‌وجود آمدن انتگرال‌های منفرد می‌شود که محاسبه آن‌ها مستلزم استفاده از قواعد انتگرال گیری عددی از مرتبه بالاست. از معایب روش عناصر مرزی وجود انتگرال‌های منفرد در معادله می‌باشد [۲]. همچنین روش عناصر مرزی فقط برای معادلاتی که جواب اساسی برای آن‌ها وجود دارد قابل استفاده می‌باشد، در صورتی که محاسبه تابع جواب اساسی برای تمامی معادلات امکان پذیر نیست.

معایب روش‌های باشبکه‌بندی محققین را به یافتن روش‌هایی که این مشکلات را برطرف سازد، ترغیب کرده است. روش اف-ترفتز[۷] که به عنوان روش جواب اساسی[۸](MFS) نیز شناخته می‌شود درسال ۱۹۲۶ توسط کوپرادز[۹] و الکسایدز[۱۰] [۴، ۵]. این روش یک روش بدون شبکه‌بندی بوده و متعلق به رده روش‌های بدون شبکه‌بندی مرزی است که در آن هیچ‌گونه تقسیم‌بندی مرز یا دامنه وجود ندارد. در این روش ابتدا یک مرز مجازی که شامل مرز اصلی است در نظر گرفته می‌شود که از منفرد شدن جواب اساسی جلوگیری می‌کند. سپس جواب مسأله به‌صورت یک ترکیب خطی از جواب اساسی نامنفرد بیان می‌شود. این روش یک روش کارآمد برای حل معادلات لاپلاس دو و سه بعدی می‌باشد.

---

[۱] Partial Differential Equations

[۲] Meshless Methods

[۳] Finite Difference Method

[۴] Finite Element Method

[۵] Boundary Element Method

[۶] Brebbia

[۷] F-Trefftz Method

[۸] Method of Fundamental Solutions

[۹] Kupradze

[۱۰] Aleksidze

برای حل معادلات غیرهمگن از ترکیب روش جواب اساسی با روش جواب خصوصی[۱۱](MPS) استفاده می‌شود. به‌کمک روش جواب خصوصی، جواب معادله به‌صورت مجموع جواب خصوصی و جواب معادله همگن بیان می‌شود. به عنوان یک نمونه از ترکیب روش جواب اساسی و جواب خصوصی می‌توان به روش جواب خصوصی ترفتز [۱۲]اشاره کرد که در آن جواب خصوصی به‌وسیله توابع پایه‌ی شعاعی[۱۳] $(RBFs)$ تقریب می‌شود. این روش برای حل معادلات پواسون که شرایط مرزی نویمن بر آن‌ها حاکم است دارای دقت پایینی است. برای بهبود این روش راماچاندران [۱۴] وکارور[۱۵] در سال ۱۹۹۸ برای تقریب جمله غیرهمگن از درونیابی هرمیتی [۱۶] با استفاده از توابع پایه‌ی شعاعی [۱۷] $(ORBF)$ استفاده کردند . در این روش برای تقریب جمله غیرهمگن از دو دسته توابع پایه‌ی شعاعی مستقل خطی استفاده می‌شود و علاوه بر مقدار تابع اطلاعاتی از مشتق تابع نیز به‌کار گرفته می‌شود [۶].

از دیگر روش‌های ترکیبی برای حل معادلات پواسون می‌توان به روشی اشاره کرد که در آن جواب خصوصی به‌وسیله پتانسیل نیوتن[۱۸] محاسبه می‌شود. پتانسیل نیوتن انتگرالی شامل حاصل‌ضرب قسمت غیرهمگن مسأله و جواب اساسی معادله همگن است [۷]. در این روش یک انتگرال منفرد ظاهر می‌شود که برای مقابله با آن از روش اتکینسون [۱۹](۱۹۸۵) [۸] و یک تغییر متغیر استفاده می‌شود. این روش به‌خاطر نوع انتگرال موجود برای یافتن جواب خصوصی نیازمند انتگرال‌گیری از مرتبه‌های بالاست. پس از بررسی هر دو روش در حالت دوبعدی تعمیم آن‌ها در حالت سه‌بعدی ارائه می‌شود.

تجزیه دامنه یک روش متداول برای حل PDEها می‌باشد. در این روش دامنه اصلی به تعدادی زیردامنه تقسیم می‌شود. بنابراین دستگاه‌های مسأله اصلی به تعدادی دستگاه کوچکتر تبدیل می‌شوند. تجزیه دامنه شامل دو نوع هم‌پوش و غیرهم‌پوش می‌باشد که در نوع غیرهم‌پوش ناحیه‌های کوچکتر جز در قسمت مرزها اشتراکی با هم ندارند. از آن‌جا که روش تجزیه دامنه اقدام مؤثری برای بهبود دقت درونیابی توسط $(RBFs)$ می‌باشد [۹]، می‌توان انتظار داشت این روش باعث بهبود نتایج در روش جواب اساسی شود.

این پایان‌نامه شامل چهار فصل است که در فصل اول مقدمات مورد نیاز برای توضیح روش جواب اساسی به اختصار مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در فصل دوم به توضیح روش ترفتز برای حل معادلات لاپلاس و پواسون می‌پردازیم. در فصل سوم به‌کمک پتانسیل نیوتن و روش اتکینسون جواب خصوصی معادلات همساز و دوهمساز غیرهمگن به‌دست

---

[۱۱] Method of Particular Solutions
[۱۲] Trefftz
[۱۳] Radial Basis Functions
[۱۴] Ramachandran
[۱۵] Karur
[۱۶] Hermit Interpolation
[۱۷] Osculatory Radial Basis Function
[۱۸] Newton Potential
[۱۹] Atkinson

می‌آید و سپس معادله همگن به‌وسیله روش جواب اساسی حل می‌شود. همچنین برای حل معادلات پواسون با روش ترفتز و روش استفاده از پتانسیل نیوتن، روش تجزیه دامنه به‌صورت غیرهم‌پوش پیاده‌سازی می‌شود. در فصل چهارم با استفاده از چند مثال و نتایج عددی حاصل، دقت و زمان اجرای هر دو روش جواب خصوصی ترفتز و روش جواب خصوصی توسط پتانسیل نیوتن مورد مقایسه قرار می‌گیرد. در فصل پنجم روش جواب اساسی سازگار[20] به اختصار معرفی شده و به عنوان روشی جدید در جهت بهبود نتایج عددی این پایان‌نامه به خواننده پیشنهاد می‌شود.

[20] Adaptive MFS

فصل ۱

مفاهیم و مقدمات اولیه

در این فصل مفاهیم و مقدمات مورد نیاز را توضیح می‌دهیم. ابتدا با مفاهیم و قضیه‌هایی مثل تابع دلتا-دیراک[۱]، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی، معادله لاپلاس[۲] و پواسون،[۳] قضیه گرین-گوس[۴] و جواب اساسی آشنا می‌شویم. سپس توابع پایه‌ی شعاعی را معرفی می‌کنیم و در پایان تکنیک مانده وزنی[۵] که اساس بسیاری از روش‌های عددی حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی است را توضیح می‌دهیم. برای جزئیات بیشتر و مشاهده‌ی اثبات قضایای بیان شده به [۹، ۱۰] رجوع شود.

۱.۱ تابع دلتا-دیراک

برای معرفی این تابع ابتدا با تعریف تابع پله‌ای[۶] $H(x-s)$ شروع می‌کنیم:

$$H(x-s)=\begin{cases} 0, & x<s, \\ 1, & x\geq s, \end{cases}$$

تابع $H(x-s)$ می‌تواند به صورت حد تابع زیر وقتی که $\Delta s\to 0$ تعریف شود:

$$h(x-s)=\begin{cases} 0, & x<s, \\ \frac{x-s}{\Delta s}, & s\leq x<s+\Delta s, \\ 1, & x\geq s+\Delta s, \end{cases}$$

$$\lim_{\Delta s\to 0} h(x-s)=H(x-s), \tag{1.1}$$

[۱] Dirac Delta Function
[۲] Laplace's Equation
[۳] Poisson Equation
[۴] Green-Gauss Theorem
[۵] Weighted Residual Technique
[۶] Heaviside Function

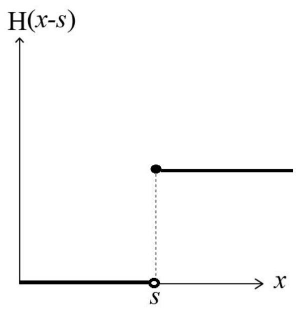
و مشتق تابع پله‌ای $H(x-s)$ تابع دلتا-دیراک است بدین صورت که

$$h'(x-s)=\begin{cases} ۰, & x<s, \\ \frac{۱}{\Delta s}, & s\leq x<s+\Delta s, \\ ۰, & x\geq s+\Delta s. \end{cases} \tag{۲.۱}$$

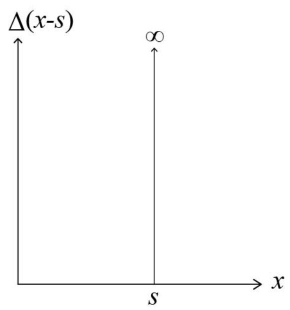
حال حد تابع $h'(x-s)$ را وقتی که $\Delta s\rightarrow ۰$ به‌دست می‌آوریم، که به تابع دلتا-دیراک معروف است. بنابراین داریم:

$$\lim_{\Delta s\rightarrow ۰} h'(x-s)=\Delta(x-s), \tag{۳.۱}$$

$$\Delta(x-s)=\begin{cases} ۰, & x\neq s, \\ \infty, & x=s. \end{cases} \tag{۴.۱}$$



شکل ۱.۱: تابع پله‌ای



شکل ۲.۱: تابع دلتا-دیراک

لم ۱.۱. خاصیت غربال کردن تابع دلتا-دیراک: انتگرال حاصل‌ضرب هر تابع پیوسته دلخواه f در تابع دلتا-دیراک در نقطه $x=s$ برابر $f(s)$ می‌باشد.

اثبات.

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)h'(x-s)dx,$$

با توجه به رابطه (۲.۱) نتیجه می‌شود:

$$I = \int_{s}^{s+\Delta s} f(x)\frac{1}{\Delta s}dx.$$

چون $\frac{1}{\Delta s}$ در $(s, s+\Delta s)$ تغییر علامت نمی‌دهد، بنابراین اگر f تابعی پیوسته باشد طبق قضیه مقدار میانگین برای انتگرال‌ها می‌توان انتگرال بالا را به‌صورت زیر نوشت:

$$I = f(\epsilon)\int_{s}^{s+\Delta s} \frac{1}{\Delta s}dx, \quad \epsilon \in (s, s+\Delta s),$$

حال اگر $\Delta s \to 0$ آنگاه $f(\epsilon) = f(s)$ و با توجه به رابطه (۳.۱) خواهیم داشت:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\Delta(x-s)dx = f(s).$$

□

بدیهی است که هرگاه $f(x) = 1$ آنگاه

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(x-s)dx = 1.$$

۲.۱ معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی

تعریف ۱.۱. اگر u تابعی با بیش از یک متغیر مستقل باشد هر معادله‌ای شامل u، مشتقات u و متغیرهای مستقل را معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی می‌گویند. PDEها را بر اساس مرتبه و تعداد متغیرها و خطی بودن آنها دسته بندی می‌کنند. بالاترین مرتبه مشتق تابع در یک PDE را مرتبه معادله دیفرانسیل می‌گویند. تعداد متغیرهای یک PDE، همان تعداد متغیرهای مستقل آن است. صورت کلی این معادلات به‌صورت زیر است:

$$f\left(x_1, x_2, ..., u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, ...\right) = 0.$$

تعریف ۲.۱. یک PDE خطی گفته می‌شود هرگاه معادله برحسب تابع و مشتقاتش خطی باشد، در غیر این‌صورت معادله را غیرخطی می‌گویند.

مثال ۱.۱. معادله زیر مثالی از یک معادله مرتبه اول غیرخطی است:

$$u_t^2 + u_x = 0.$$

مثال ۲.۱. معادله زیر مثالی از یک معادله مرتبه دوم خطی است:

$$(6x^2 + 1)u_{tt} + u_x = \sin(x+t).$$

شکل کلی یک PDE خطی مرتبه دوم دو متغیره، به‌صورت زیر است:

$$A\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}+B\frac{\partial^۲ u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=G, \tag{۵.۱}$$

که در آن F, E, D, C, B, A و G مقادیر ثابت و یا توابع معلومی از متغیرهای مستقل x و y می‌باشند. معادله (۵.۱) را همگن گویند هرگاه تابع $G(x,y)$ به ازای هر x و y مساوی صفر باشد، در غیر این‌صورت (۵.۱) را یک PDE غیرهمگن گویند. درمثال ۱.۱ معادله همگن و ۲.۱ معادله غیرهمگن است. PDE (۵.۱) به سه دسته سهموی، هذلولوی و بیضوی تقسیم می‌شود.

۱. معادله سهموی: اگر در (۵.۱) رابطه $B^۲-۴AC=۰$ برقرار باشد آنگاه معادله دیفرانسیل، معادله سهموی خواهد بود. معادلات سهموی، روندهای انتشار گرما را توصیف می‌کنند.

۲. معادله هذلولوی: اگر در (۵.۱) رابطه $B^۲-۴AC>۰$ برقرار باشد آنگاه معادله دیفرانسیل، معادله هذلولوی خواهد بود. معادلات هذلولوی، پدیده ارتعاش و حرکت موج را توصیف می‌کنند.

۳. معادله بیضوی: اگر در (۵.۱) رابطه $B^۲-۴AC<۰$ برقرار باشد آنگاه معادله دیفرانسیل، معادله بیضوی خواهد بود. معادلات بیضوی، پدیده‌های حالت پایدار را توصیف می‌کنند.

در ادامه به بررسی معادلات بیضوی لاپلاس و پواسون می‌پردازیم.

۳.۱ معادله لاپلاس و پواسون

معادله لاپلاس در بسیاری از زمینه‌های علوم از جمله نیروی جاذبه، پتانسیل، الکترواستاتیک و گرما به‌کار می‌رود. برای معرفی آن به معادله زیر توجه می‌کنیم:

$$\bigtriangledown^۲ u=f, \quad in \quad \Omega,$$

که در آن Ω دامنه معادله می‌باشد که توسط مرز Γ احاطه شده است و $\bigtriangledown^۲$ عملگر لاپلاسین است که در حالت d بعدی به‌صورت $\bigtriangledown^۲=\sum_{i=۱}^{d}\frac{\partial^۲}{\partial x_i^۲}$ می‌باشد. هر گاه $f=۰$ باشد معادله لاپلاس را خواهیم داشت و هرگاه $f\neq ۰$ معادله، یک معادله پواسون می‌باشد. شرایط مرزی مختلفی را می‌توان بر $PDEs$ اعمال کرد که عبارتنداز:

۱. شرایط مرزی دیریکله[۷] $u=\bar{u}, \qquad on \quad \Gamma,$

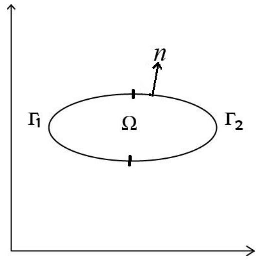
۲. شرایط مرزی نویمن[۸] $q=\frac{\partial u}{\partial n}=\bar{q}, \qquad on \quad \Gamma,$

۳. شرایط مرزی رابین[۹] که ترکیبی از دو شرط قبلی است $\lambda\frac{\partial u}{\partial n}+\gamma(u-\bar{u})=\bar{q}, \quad on \quad \Gamma,$

[۷] Dirichlet Condition
[۸] Neumann Condition
[۹] Robin Condition

۴. شرایط مرزی مختلط[۱۰] $\begin{cases} u = \bar{u}, & on \quad \Gamma_۱, \\ q = \bar{q}, & on \quad \Gamma_۲, \end{cases}$

که در آن n بردار نرمال خارجی عمود بر مرز Γ، $\Gamma = \Gamma_۱ + \Gamma_۲$، $\bar{u}$ و $\bar{q}$ به ترتیب مقادیر معلوم u و q روی مرز هستند.



شکل ۳.۱: n بردار نرمال خارجی و $\Gamma = \Gamma_۱ + \Gamma_۲$

۴.۱ قضیه گرین-گوس

قضیه ۱.۱. قضیه گرین-گوس [۱]: فرض کنید Ω ناحیه‌ای باشد که توسط مرز Γ محصور شده است، n بردار نرمال خارجی، $\nabla^۲$ عملگر لاپلاسین و G نیز نشان دهنده تابع وزن است در این‌صورت:

$$\int_{\Omega} \left(G \nabla^۲ u - u \nabla^۲ G \right) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(G \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G}{\partial n} \right) d\Gamma, \quad u, G \in C^۲(\bar{\Omega}). \qquad (۶.۱)$$

رابطه بالا را با نماد عملگری به صورت زیر می‌نویسیم:

$$< G, Lu >= B + < u, L^* G >, \qquad (۷.۱)$$

که در آن

$$B = \int_{\Gamma} \left(G \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G}{\partial n} \right) d\Gamma, \qquad (۸.۱)$$

L عملگر لاپلاس و L^* عملگر دیفرانسیلی که روی تابع وزن G عمل می کند، عملگرالحاقی است. در قضیه گرین-گوس واضح است که $L = L^*$ پس عملگر L را متقارن یا خودالحاق[۱۱] می‌نامند.

۱۰ Mixed Condition
۱۱ Self Adjoint

۵.۱ جواب اساسی

جواب اساسی نقش مهمی در روش‌های مرزی ایفا می‌کند و برای هر معادله دیفرانسیل بدون توجه به شرایط مرزی محاسبه می‌شود و با تغییر شرایط مرزی جواب اساسی تغییر نخواهد کرد. معادله پواسون زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{d^{۲}u}{dx^{۲}} = f(x,u), \quad in \quad \Omega, \tag{۹.۱}$$

معادله بالا را می‌توان برحسب یک عملگر خطی به‌صورت $Lu = f(x,u)$ بیان کرد که در آن $L = \frac{d^{۲}}{dx^{۲}}$. با ضرب طرف چپ معادله (۹.۱) در تابع وزن G و دوبار انتگرال‌گیری جزبه‌جز داریم:

$$\int_{\Omega}\left(G\frac{\partial^{۲}u}{\partial x^{۲}}\right)d\Omega = \int_{\Gamma}\left(G\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial G}{\partial n}\right)d\Gamma + \int_{\Omega}\left(u\frac{\partial^{۲}G}{\partial x^{۲}}\right)d\Omega,$$

واضح است که که عملگر الحاقی که روی تابع وزن عمل می‌کند $L^{*} = \frac{d^{۲}}{dx^{۲}}$ می‌باشد. تابعی مانند G که لزوماً شرایط مرزی اصلی تحمیل شده بر روی تابع u را برقرار نمی‌کند اما در معادله زیر

$$L^{*}G = \Delta(x-s), \tag{۱۰.۱}$$

صدق می‌کند را جواب اساسی عملگر L می‌گویند. معادله فوق که از آن برای به‌دست آوردن جواب اساسی معادله $Lu = ۰$ استفاده می‌شود، معادله اساسی می‌نامند. چون تابع G به x و s بستگی دارد آن را با $G(x,s)$ نمایش می‌دهیم. تابع جواب اساسی G متقارن است، یعنی $G(x,s) = G(s,x)$، همچنین با انتگرال‌گیری از (۱۰.۱) و با توجه به روابط (۱.۱) و (۳.۱) مشتق اول تابع در نقطه $x = s$ از دامنه موردنظر ناپیوسته است و

$$\left.\frac{dG}{dx}\right|_{x=s+\epsilon} - \left.\frac{dG}{dx}\right|_{x=s-\epsilon} = ۱, \quad \forall\epsilon > ۰. \tag{۱۱.۱}$$

مثال ۳.۱. جواب اساسی را برای عملگر پخش-واکنش در حالت یک بعدی به‌دست می‌آوریم. معادله پخش-واکنش[۱۲] $\frac{d^{۲}c}{dx^{۲}} = f(x,c)$ را در نظر بگیرید. معادله اساسی آن به‌صورت زیر است:

$$\frac{d^{۲}G}{dx^{۲}} = \Delta(x-s).$$

جواب را برای $x < s$ و $x > s$ جداگانه حساب می‌کنیم.

برای $x < s$ قرار می‌دهیم $G = G_{۱}$. طبق تعریف تابع دلتا-دیراک داریم:

$$\frac{d^{۲}G_{۱}}{dx^{۲}} = \Delta(x-s) = ۰ \Rightarrow G_{۱}(x) = Ax + B,$$

[۱۲] Diffusion-Reaction