به نام خداوند بخشنده‌ی مهربان

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی

(گرایش محض)

عنوان:

سیستم‌های لاگرانژی غیر هولونومیک در جت منیفلدها

از:

ساره مهدی زاده گیلانی

استاد راهنما:

دکتر اسماعیل عزیزپور

شهریور ۱۳۹۱

تقدیم به

عزیزترین هایم در زندگی

پدر و مادر نازنینم.

تقدیر و تشکر از استاد راهنمای گرامیم، جناب آقای دکتر عزیزپور و تشکر از جناب آقای دکتر احمدی و سرکار خانم دکتر لامعی.

فهرست مطالب

چکیده:

سیستم‌های لاگرانژی غیر هولونومیک در جت منیفلدها

ساره مهدی زاده گیلانی

یک چارچوب هندسی بر پایه‌ی جت منیفلدها به سیستم‌های لاگرانژی غیرهولونومیک وابسته‌ی زمانی گسترش داده شده است. یک ساختار تقریباً ضربی (P, Q) روی فضای تکامل یافته ساخته می‌شود به‌گونه‌ای که تصویر دینامیک آزاد توسط P، دینامیک منحصر به‌فرد مقید را می‌دهد. ۲–فرمی پوانکاره- کارتان مقید نیز تعریف شده است. اگر سیستم غیرهولونومیک تکین باشد، آن‌گاه یک الگوریتم مقید ساخته می‌شود. هم‌چنین نوع خاصی از سیستم‌های مقید با عنوان سیستم مقید کپلاین و یک قضیه‌ی القایی اثبات شده در آن مورد توجه بیش‌تری قرار گرفته است.

کلید واژه:
سیستم مقید، توزیع، معادلات اویلر- لاگرانژ، جت منیفلد، لاگرانژین.

Abstract:

NON-HOLONOMIC LAGRANGIAN SYSTEMS IN JET MANIFOLDS

SAREH MEHDIZADEH GILANI

A geometrical setting in terms of jet manifolds is developed for time-dependent non-holonomic Lagrangian systems. An almost product structure on the evolution space is constructed in such a way that the constrainted dynamics is obtained by projection of the free dynamics. A constrained Poincare-Cartan 2-form is defined. If the non-holonomic system is singular, a constraint algorithm is constructed. Special attention is devoted to Caplygin systems and a reduction theorem is proved.

Key words:
constrained system, distribution, Euler-Lagrange equations, jet manifold, Lagrangian.

پیشگفتار:

در فصل اول تعاریفی که در تمام پایان نامه نیاز بوده، در دو بخش جمع آوری شده است. آغاز مطالب از فصل دوم است که خود شامل چهار بخش است. بخش اول با معرفی جت منیفلد شروع می‌شود. در واقع بخش‌های اول، دوم و سوم بیش‌تر به آشنایی با مقدمات کار و تعاریف و قضایای مرتبط پرداخته‌اند. مهم‌ترین مباحث از بخش چهارم شروع می‌شود که لاگرانژین و به تناسب آن ۱–فرمی و ۲–فرمی پوانکاره- کارتان و ماتریس هسین را تعریف کرده و سرانجام به معادله‌ی اویلر- لاگرانژ مربوطه می‌رسد.

فصل سوم نیز شامل چهار بخش است و به مفاهیم قیدی پرداخته که بخش اول معادله‌ی اویلر- لاگرانژ را در حالت مقید بررسی می کند، یعنی با فرض وجود یک لاگرانژین منظم و در نظر گرفتن یک توزیع روی منیفلد، به معرفی پوچ‌ساز این توزیع می‌پردازد و سپس با توجه به این پوچ‌ساز، قید مربوطه را تعریف می کند. با نیم نگاهی به معادلات اویلر- لاگرانژ در حالت غیرمقید به معادلات اویلر- لاگرانژ مقید می‌رسد. بخش دوم به دنبال یافتن جوابی برای دستگاه معادلات معرفی شده در بخش چهارم از فصل دوم و بخش اول از فصل سوم است، یعنی جواب معادلات غیرمقید و مقید، البته در حالتی که سیستم منظم است. هم‌چنین در این بخش ساختار تقریباً ضربی را نیز برای منیفلد مورد نظر به‌دست آورده است. بخش سوم ۲–فرمی پوانکاره- کارتان را در حالت مقید تعریف می کند و برای تفهیم بهتر مطالب بیان شده در فصل‌های قبل و نیز همین فصل، دو مثال آورده شده است. بخش چهارم تقریباً شبیه بخش دوم از همین فصل است ولی با این تفاوت که در این بخش با سیستم نامنظم کار می کند و معادلات قیدی، جواب دستگاه معادلات مقید و ساختار تقریباً ضربی که در بخش دوم به‌دست آمده بود، در این بخش نیز محاسبه می‌شوند ولی با فرض نامنظم بودن سیستم.

فصل آخر فصل چهارم است که شامل دو بخش است. بخش اول با معرفی تابع لژاندر شروع می‌شود و به معادلات همیلتن می‌رسد و مقایسه‌ای بین هرآن‌چه که برای $J^1\pi$ به‌دست آورده بود (در فصل‌های قبل) و هرآن‌چه که در این بخش برای $J^1\pi^*$ به‌دست می‌آورد، انجام می‌دهد. پس از مقایسه، روابط را برحسب تابع لژاندر بیان می‌کند. در نهایت در بخش آخر یعنی بخش دوم، قید معرفی شده در بخش اول از فصل سوم را این‌بار با توجه به الصاقی که روی منیفلد مربوطه در نظر می گیرد، تعریف می کند. در واقع سیستم مقید جدید کپلاین معرفی می‌شود. توزیع افقی نیز در این بخش بیان می‌شود و معادلات مقید را برای این توزیع تشکیل می‌دهد و به جواب می‌رسد. سرانجام با تعویض لاگرانژین، مقایسه‌ای بین دو سیستم مکانیکی انجام می‌دهد.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

در این فصل تعاریف و مفاهیمی که لازم بوده در دو بخش آورده شده است. لازم به ذکر است که هدف از تقسیم بندی به دو بخش فقط برای شبیه سازی این فصل با فصل‌های بعدی از لحاظ ساختاری و شماره گذاری مطالب بوده است.

۱ - ۱ بخش اول

تعریف ۱ - ۱ - ۱. فضای آفین[۱] ([۱۴])

یک فضای آفین یک سه تایی (A, V, r) است که A یک مجموعه، V یک فضای برداری حقیقی متناهی بعد و $r : A \times V \longrightarrow V$ یک عمل متعدی آزاد از گروه جمعی V روی A است. قرار می‌دهیم $r(a, v) = a + v$ و می‌گوییم فضای آفین A روی V مدول شده است.

تعریف ۱ - ۱ - ۲. فضای کل و فضای پایه ([۳۰])

اگر $f : M \longrightarrow F$ تابع باشد، که در آن M و F منیفلد هستند، آن‌گاه $gr_f : M \longrightarrow M \times F$ تعریف شده به‌صورت $gr_f(p) = (p, f(p))$ و هر تابع مانند $\Phi : M \longrightarrow M \times F$ که در شرط $pr_1 \circ \phi = id_M$ صدق می‌کند گراف منحصر به‌فرد برای تابع f $(f = pr_2 \circ \phi)$ است. در این مورد منیفلد حاصل ضربی $M \times F$ فضای کل نامیده می شود، زیرا چارت مختصات موضعی‌اش شامل متغیرهای مستقل و غیرمستقل از f است. دامنه‌ی M نیز فضای پایه نامیده می‌شود.

تعریف ۱ - ۱ - ۳. منیفلد تاری[۲] ([۳۰])

یک منیفلد تاری یک سه تایی (E, π, M) است به طوری که E و M منیفلد هستند و $\pi : E \longrightarrow M$ یک سابمرشن پوشاست. E فضای کل، π تابع تصویر و M فضای پایه است. برای هر $p \in M$، زیرمجموعه‌ی $\pi^{-1}(p)$ از E، تار روی p نامیده می‌شود و به‌صورت E_p نوشته می‌شود.

تعریف ۱ - ۱ - ۴. کلاف ([۳۰])

اگر (E, π, M) یک منیفلد تاری باشد و $p \in M$، آن‌گاه یک بدیهی سازی موضعی از π حول p یک سه تایی مانند (w_p, F_p, t_p) است به‌طوری که w_p یک همسایگی از p، F_p یک منیفلد دلخواه و $t_p : \pi^{-1}(w_p) \longrightarrow w_p \times F_p$ یک دیفیومورفیسم است و در شرط زیر صدق می کند

$$pr_1 \circ t_p = \pi \mid_{\pi^{-1}(w_p)} .$$

یک منیفلد تاری که حداقل یک بدیهی سازی حول هر نقطه از فضای پایه‌اش داشته باشد، موضعاً بدیهی نامیده می‌شود و به‌عنوان یک کلاف شناخته می‌شود.

---

[۱] Affine space [۲] Fibred manifold

تعریف ۱-۱-۵. کلاف برداری ([۳۰])

یک کلاف برداری یک پنج تایی (E, π, M, σ, μ) است به‌طوری که

۱. (E, π, M) یک کلاف است.

۲. (آ) $\sigma : E \times E \longrightarrow E$ که برای هر $p \in M$، $\sigma(E_p \times E_p) \subset E_p$.

(ب) $\mu : R \times E \longrightarrow E$ که برای هر $p \in M$، $\mu(R \times E_p) \subset E_p$.

(ج) برای هر $p \in M$، $(E_p, \sigma \mid_{E_p \times E_p}, \mu \mid_{R \times E_p})$ یک فضای برداری حقیقی است.

۳. برای هر $p \in M$ یک بدیهی سازی موضعی (w_p, R^n, t_p) وجود دارد و بدیهی سازی موضعی خطی نامیده می‌شود و در این شرایط صدق می‌کند که برای هر $q \in w_p$، ترکیب $t_p \mid_{E_q}: E_q \longrightarrow \{q\} \times R^n$ با $pr_۲ : E_q \times R^n \longrightarrow R^n$ یک ایزومورفیسم خطی است.

تعریف ۱-۱-۶. کلاف عمود([۳۰])

اگر (E, π, M) یک کلاف باشد، آن‌گاه کلاف عمود به π یک زیرکلاف برداری $(V\pi, \tau_E \mid_{V\pi}, E)$ از کلاف مماس τ_E است که فضای کل $V\pi$ به‌صورت $V\pi = \{\xi \in TE : \pi_*(\xi) = ۰ \in T_{(\pi_*(\xi))}M\}$ تعریف شده است که در آن $\pi_* : TE \longrightarrow TM$. تار از $V\pi$ روی $a \in E$ معمولا به‌صورت $V_a\pi$ نوشته می‌شود یا به‌طور دقیق‌تر $(V\pi)_a$. فضای کل از کلاف عمود ممکن است به‌عنوان مجموعه‌ای از بردارهایی که به تارهایی از π مماس هستند در نظر گرفته شود.

تعریف ۱-۱-۷. کلاف آفین([۱۴])

یک کلاف آفین شامل یک منیفلد تاری $\pi : A \longrightarrow N$ و کلاف برداری $\rho : E \longrightarrow N$ از رتبه‌ی m همراه با یک مورفیسم $r : A \times_N E \longrightarrow A$ از منیفلدهای تاری روی id_N به‌طوری‌که برای هر $x \in N$، $r_x : A_x \times E_x \longrightarrow A_x$ یک عمل متعدی آزاد از فضای برداری E_x روی مجموعه‌ی A_x است. در این‌جا، هر تار A_x یک فضای آفین مدول شده روی E_x است.

تعریف ۱-۱-۸. کلاف آفین مدول شده روی π ([۳۰])

فرض کنید (E, π, M) یک کلاف برداری باشد. یک کلاف آفین مدول شده روی π یک چهار تایی (A, ρ, M, α) است به‌طوری که

۱. (A, ρ, M) یک کلاف است.

۲. (آ) $\alpha : A \times_M E \longrightarrow A$ که برای هر $p \in M$، $\alpha(A_p \times E_p) \subset A_p$.

(ب) برای هر $p \in M$، $(A_p, E_p, \alpha \mid_{A_p \times E_p})$ یک فضای آفین است.

۳. برای هر $p \in M$ یک بدیهی سازی موضعی (w_p, R^n, t_p) وجود دارد که یک بدیهی سازی موضعی آفین نامیده می‌شود و در شرط زیر صدق می‌کند که برای $q \in w_p$ ترکیب $t_p \mid_{A_q}: A_q \longrightarrow \{q\} \times R^n$ با $pr_۲ \times R^n \longrightarrow R^n$ یک ایزومورفیسم آفین است.

۱-۲ بخش دوم

تعریف ۱-۲-۱. بدیهی سازی (سرتاسری) از π ([۳۰])

اگر (E, π, M) یک منیفلد تاری باشد، آن‌گاه یک بدیهی سازی (سرتاسری) یک جفت (F, t) است که F یک منیفلد (یک تار تایپیکال از π نامیده می‌شود.) و $t : E \longrightarrow M \times F$ یک دیفیومورفیسم و شرط $pr_۱ \circ t = \pi$ برقرار است. یک منیفلد تاری که حداقل یک بدیهی سازی دارد، بدیهی نامیده می‌شود.

تعریف ۱-۲-۲. بخش[۱] ([۳۰])

یک نگاشت مانند $\phi : M \longrightarrow E$ یک بخش از π نامیده می‌شود اگر شرط $\pi \circ \phi = id_M$ برقرار باشد. مجموعه‌ی همه‌ی بخش‌های π به‌صورت $\Gamma(\pi)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۱-۲-۳. میدان برداری عمود ([۳۰])

یک بخش از کلاف $(V\pi, \tau_E \mid_{V\pi}, E)$ یک میدان برداری عمود روی E نامیده می‌شود. فضای میدان‌های- برداری عمود به‌صورت $\nu(\pi)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۱-۲-۴. سیستم مختصاتی تطبیقی[۲] ([۳۰])

فرض کنید (E, π, M) یک منیفلد تاری باشد به‌طوری‌که $dimM = m$، $dimE = m + n$ و $y : U \longrightarrow R^{m+n}$ یک سیستم مختصاتی روی مجموعه‌ی باز $U \subset E$ باشد. سیستم مختصاتی y یک سیستم مختصاتی تطبیقی نامیده می‌شود اگر زمانی که $a, b \in U$، $\pi(a) = \pi(b) = p$، آن‌گاه

$$pr_۱(y(a)) = pr_۱(y(b)).$$ (که $pr_۱ : R^{m+n} \longrightarrow R^m$)

تعریف ۱-۲-۵. کلاف ۱–جت[۳] ([۳۰])

فرض کنید (E, π, M) یک کلاف باشد و $p \in M$. بخش‌های موضعی ϕ و ψ را روی π، ۱–هم ارز در p تعریف می‌کنیم اگر $\phi(p) = \psi(p)$ و اگر در سیستم مختصاتی تطبیقی (x^i, u^α) حول $\phi(p)$ داشته باشیم $\frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^i}|_p = \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial x^i}|_p$

[۱] Section [۲] Adapted- coordinate system [۳] ۱-jet bundle

برای $1 \leq i \leq m$ و $1 \leq \alpha \leq n$. کلاس هم ارزی شامل ϕ یک ۱−جت از ϕ در p نامیده می‌شود و به‌صورت $j_p^1\phi$ نوشته می‌شود.

تعریف ۱-۲-۶. امتداد ۱−جت[1] ([۱۴])

امتداد ۱−جت از یک منحنی $\sigma : R \longrightarrow M$ در M یک بخش است که توسط $j^1\sigma$ از منیفلد تاری $(J^1(R, M), \pi, R)$ مشخص می‌شود و به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$j^1\sigma : t \in R \longrightarrow (j^1\sigma)(t) = j_t^1\sigma \in J^1(R, M).$$

تعریف ۱-۲-۷. فضای تکاملی [2] ([۱۴])

فضای تکاملی از M، منیفلد تاری $J^1(R, M)$ از همه‌ی ۱−جت‌های نگاشت از R به M است.

تعریف ۱-۲-۸. غیرمستقل (یا وابسته‌ی زمانی) [3] ([۱۴])

یک تابع C^∞، $L : J^1(R, M) \longrightarrow R$ را که روی فضای تکاملی از M تعریف شده باشد غیرمستقل (یا وابسته‌ی زمانی) گوییم.

تعریف ۱-۲-۹. ارتقای عمودی و کامل[4] ([۱۴])

فرض کنید G یک میدان تانسوری از نوع $(0, r)$، $r \geq 1$، روی M باشد. ارتقای عمودی از G به TM میدان تانسوری از نوع $(0, r)$ روی TM است و به‌صورت

$$G_y^v(\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_r) = (G_x((\tau_M)_*\bar{X}_1, \ldots, (\tau_M)_*\bar{X}_r))^v$$

تعریف می‌شود که $\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_r \in T_y(TM)$، $y \in T_xM$ و $x \in M$.

$f^v = f \circ \tau_M$ ارتقای عمودی به TM از تابع $f \in C^\infty(M)$ نامیده می‌شود. اگر

$$G = G_{i_1 \ldots i_r}(\frac{\partial}{\partial x^j}) \otimes (dx^{i_1}) \otimes \ldots \otimes (dx^{i_r})$$

، آن‌گاه

$$G^v = G_{i_1 \ldots i_r}(\frac{\partial}{\partial v^j}) \otimes (dx^{i_1}) \otimes \ldots \otimes (dx^{i_r}). \quad (1)$$

به آسانی نتیجه می‌شود که

$$G^v(X_1^v, \ldots, X_r^v) = 0 \quad \forall X_1, \ldots, X_r \in \chi(M).$$

علاوه بر این اگر $\alpha = \alpha_i(dx^i)$ یک ۱−فرمی روی M باشد، آن‌گاه $\alpha^v = \alpha_i(dx^i)$. بنابراین α^v به‌طور دقیق تابع پس‌کشنده از α به TM است یعنی $\alpha^v = (\tau_M)^*\alpha$. حال فرض کنید F یک میدان تانسوری از نوع $(1, r)$

[1] 1-jet prolongation [2] Evolution space [3] Non-autonomous(or time-dependent) [4] Vertical and complete lift

۱، $r \geq$، روی M باشد، آن‌گاه ارتقای عمودی از F به TM، میدان تانسوری از نوع $(1, r)$ روی TM است و به‌صورت $F^v_y(\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_r) = (F_x((\tau_M)_*\bar{X}_1, \ldots, (\tau_M)_*\bar{X}_r))^v$ تعریف می‌شود که $\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_r \in T_y(TM)$، $y \in T_xM$ و $x \in M$. اگر

$$F = F^j_{i_1 \ldots i_r}(\frac{\partial}{\partial x^j}) \otimes (dx^{i_1}) \otimes \ldots \otimes (dx^{i_r})$$

، آن‌گاه

$$F^v = F^j_{i_1 \ldots i_r}(\frac{\partial}{\partial v^j}) \otimes (dx^{i_1}) \otimes \ldots \otimes (dx^{i_r}) \quad (2)$$

که (x^i, v^i) مختصات موضعی برای TM است. می‌توان ثابت کرد

$$F^v(X^v_1, \ldots, X^v_r) = 0 \quad \forall X_1, \ldots, X_r \in \chi(M).$$

علاوه بر این اگر I تانسور همانی روی M باشد، آن‌گاه $J = I^v$ ساختار تقریباً مماس کانونی روی TM است.

حال ارتقای کامل از میدان‌های تانسوری روی M به TM را تعریف می‌کنیم. فرض کنید f یک تابع روی M باشد. در این‌صورت ارتقای کامل از f به TM، تابع f^c روی TM است که به‌صورت $f^c(y) = df(x)(y)$، $y \in T_xM$ و $x \in M$، تعریف می‌شود، بنابراین داریم $f^c = y^i(\frac{\partial f}{\partial x^i})$.

اگر $X \in \chi(M)$ و $X = X^i(\frac{\partial}{\partial x^i})$، آن‌گاه $X^c = X^i(\frac{\partial}{\partial x^i}) + v^j(\frac{\partial X^i}{\partial x^i})(\frac{\partial}{\partial v^i})$. بنابراین $(\frac{\partial}{\partial x^i})^c = \frac{\partial}{\partial x^i}$. از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که $F^v(X^c_1, \ldots, X^c_r) = (F(X_1, \ldots, X_r))^v$ و $G^v(X^c_1, \ldots, X^c_r) = (G(X_1, \ldots, X_r))^v$. اگر $F = F^j_i(\frac{\partial}{\partial x^i}) \otimes (dx^i)$، آن‌گاه $F^c = F^j_i(\frac{\partial}{\partial x^i}) \otimes (dx^i) + v^k(\frac{\partial F^j_i}{\partial x^k})(\frac{\partial}{\partial v^j}) \otimes (dx^i) + F^j_i(\frac{\partial}{\partial v^j}) \otimes (dv^i)$. برای ۱–فرمی $\alpha = \alpha_i dx^i$ به‌دست می‌آوریم $\alpha^c = v^k(\frac{\partial \alpha^i}{\partial x^k})(dx^i) + \alpha_i(dv^i)$. برای میدان تانسوری G از نوع $(0, 2)$ داریم

$$G^c = v^k(\frac{\partial G_{ij}}{\partial x^k})(dx^i) \otimes (dx^j) + G_{ij}(dx^i) \otimes (dv^j) + G_{ij}(dv^i) \otimes (dx^j).$$

نکته ۱-۲-۱۰. اگر ω یک ۲–فرمی روی M باشد، آن‌گاه ω^c یک ۲–فرمی روی TM است و

$$d\omega^c = (d\omega)^c.$$

ملاحظه ۱-۲-۱۱. بیان دیگر ارتقای عمودی ([۱۴])

فرض کنید M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر m–بعدی، TM کلاف مماسش و $\tau_M : TM \longrightarrow M$ تابع تصویر کانونی باشد. برای هر $y \in T_xM$ ، فرض کنید $V_y = ker\{d\tau_M(y) : T_y(TM) \longrightarrow T_xM\}$، آن‌گاه V_y یک زیرفضای برداری m–بعدی از $T_y(TM)$ و $V = \cup_{y \in TM} V_y$ یک کلاف برداری روی TM از رتبه‌ی m است. (در واقع یک زیرکلاف برداری از $\tau_{TM} : TTM \longrightarrow TM$) V (گاهی به‌صورت $V(TM)$ نوشته می‌شود) کلاف عمود نامیده می‌شود. یک بردار مماس v از TM در y به‌طوری‌که $v \in V_y$، عمود نامیده می‌شود.یک

میدان برداری عمود X یک میدان برداری X روی TM است به‌طوری‌که $X(y) \in V_y$ برای هر $y \in TM$. (یعنی X یک برش از V است.) توجه می‌کنیم که بردارهای مماس عمود، مماس به تارهای تابع تصویر τ_M هستند. حال فرض کنید $y \in T_xM$، $x \in M$، در این‌صورت نگاشت خطی $V_y \longrightarrow T_xM$ که ارتقای عمودی نامیده می‌شود به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

برای $u \in T_xM$، u^v، ارتقای عمودیش به TM در y است که بردار مماس در $t = ۰$ به منحنی $y + tv \longrightarrow t$ است. علاوه بر این اگر X میدان برداری روی M باشد، آن‌گاه می‌توانیم ارتقای عمودیش را به‌عنوان میدان برداری X^v روی TM تعریف کنیم به‌طوری‌که $X^v(y) = (X(\tau_N(y)))^v$. اگر X موضعاً به‌صورت $X = X^i(\frac{\partial}{\partial x^i})$ داده شده باشد در یک همسایگی مختصاتی U با مختصات موضعی (x^i)، آن‌گاه X^v موضعاً به‌صورت $X^v = X^i(\frac{\partial}{\partial v^i})$ است با در نظر گرفتن مختصات القایی (x^i, v^i) روی TU.

توجه ۱-۲-۱۲. تعمیم یافته‌ی مومنتا [1] ([۱۴])

تابع $1 \leq A \leq m$ $\quad L = L(t, q^A, \dot{q^A})$ لاگرانژین سیستم نامیده می‌شود. می‌توان فرض کرد

$L : R \times R^m \times R^m \longrightarrow R$ و $L_A = (\frac{\partial L}{\partial v^A})(q^B, v^B)$، $v^A = \dot{q^A}$ و

$1 \leq B \leq m$، $1 \leq A \leq m$. مختصات $m-$بعدی $(p^1, \ldots, p^m)$ وجود دارد به‌طوری‌که بردار های سرعت v^1، $\ldots$ و v^m موضعاً تابع‌های وابسته به $(q^1, \ldots, q^m, p^1, \ldots, p^m)$ هستند.

$p^A = \frac{\partial L}{\partial v^A}$، $1 \leq A \leq m$، این مختصات تعمیم یافته‌ی مومنتا نامیده می‌شود.

تعریف ۱-۲-۱۳. شبه پایه ([۱۴])

فرض کنیم α یک فرم دیفرانسیل پذیر روی TM باشد. α شبه پایه گفته می‌شود اگر $\alpha \in J^*$، که J^* عملگر الحاقی از J است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$J^*(f) = f, \quad f \in C^\infty(TM).$$

$$(J^*\omega)(X_1, \cdots, X_p) = \omega(JX_1, \cdots, JX_p) \quad X_1, \cdots, X_p \in \chi(TM), \quad \omega \in \Lambda^p(TM).$$

و

$$\begin{aligned} J &: TM \longrightarrow TM \\ J &= \frac{\partial}{\partial v^A} \otimes dq^A, \quad M = \langle q^A \rangle. \end{aligned}$$

تعریف ۱-۲-۱۴. سیستم مکانیکی([۱۴])

[1] Generalized momenta

یک سیستم مکانیکی یک سه تایی (M, F, ρ) است که M منیفلد m−بعدی، F یک تابع دیفرانسیل‌پذیر روی TM و ρ یک فرم شبه پایه روی TM است که میدان نیرو[۱] نامیده می‌شود.

تعریف ۱-۲-۱۵. ساختار سیمپلتیک([۱۴])

یک ساختار سیمپلتیک روی یک فضای برداری (حقیقی) متناهی V به‌وسیله‌ی ۲−فرمی ω روی V تعریف می‌شود به‌طوری که ω ناتباهیده است. فرم ω سیمپلتیک نامیده می‌شود و جفت (V, ω) یک فضای برداری سیمپلتیک است.

تعریف ۱-۲-۱۶. فرم تقریباً سیمپلتیک([۱۴])

یک فرم تقریباً سیمپلتیک (یا ساختار تقریباً سیمپلتیک) روی یک منیفلد M، یک ۲−فرمی ناتباهیده‌ی ω [۱] روی M است. جفت (M, ω) یک منیفلد تقریباً سیمپلتیک نامیده می‌شود.

تعریف ۱-۲-۱۷. ساختار تقریباً کسیمپلتیک([۱۴])

یک ساختار تقریباً تماسی یا ساختار تقریباً کسیمپلتیک روی یک منیفلد $(۲m+۱)$−بعدی M یک جفت (η, Ω) است که η یک ۱−فرمی و Ω یک ۲−فرمی روی M است به‌طوری که $\eta \wedge \Omega^m \neq ۰$.

تعریف ۱-۲-۱۸. ساختار تقریباً ضربی([۱۴])

فرض کنید M یک منیفلد m−بعدی دیفرانسیل‌پذیر باشد. یک ساختار تقریباً ضربی روی M، یک میدان تانسوری F از نوع $(۱,۱)$ روی M است به طوری که $F^۲ = Id$. M همراه با یک ساختار تقریباً ضربی F، یک منیفلد تقریباً ضربی نامیده می شود.

تعریف ۱-۲-۱۹. فرم بسته([۱۴])

یک p−فرمی α روی یک منیفلد M بسته گفته می‌شود اگر $d\alpha = ۰$ و دقیق گفته می‌شود اگر یک $(p-۱)$−فرمی β وجود داشته باشد به‌طوری که $\alpha = d\beta$. از آن‌جایی که $d^۲ = ۰$، پس هر فرم دقیق، بسته است.

تعریف ۱-۲-۲۰. فرم حجمی([۱۴])

یک منیفلد m−بعدی M را سازگار گوییم اگر یک m−فرمی ω روی M وجود داشته باشد به‌طوری که $\omega(x) \neq ۰$ برای هر $x \in M$. ω یک فرم حجمی نامیده می‌شود.

تعریف ۱-۲-۲۱. فرم تماسی([۱۴])

فرض کنید M یک منیفلد $(۲m+۱)$−بعدی باشد. اگر M یک ۱−فرمی مانند η داشته باشد به‌طوری که $\eta \wedge (d\eta)^m \neq ۰$، آن‌گاه M یک منیفلد تماسی نامیده می‌شود و η یک فرم تماسی است.

[۱] ω ناتباهیده یا از رتبه‌ی ماکزیمال است اگر برای هر نقطه‌ی $x \in M$، $\omega(x)$ ناتباهیده باشد.

[۱] Force field

تعریف ۱-۲-۲۲. توزیع([۱۴])

فرض کنید M یک منیفلد m−بعدی باشد. یک توزیع k−بعدی D روی M یک انتخاب از یک زیرفضای k−بعدی $D(x)$ از T_xM برای هر x در M است.

تعریف ۱-۲-۲۳. قید([۱۴])

فرض کنید (M, ω) یک منیفلد سیمپلتیک از مرتبه‌ی $۲m$ باشد. یک ۱−فرمی غیرصفر α روی M یک قید روی M نامیده می‌شود.یک مجموعه‌ی $C = \{\alpha_۱, \dots, \alpha_r\}$ از r تا ۱−فرمی مستقل خطی روی M یک سیستم قیدی روی M نامیده می‌شود. گوییم یک منحنی σ در M در قیدها صدق می‌کند اگر $\alpha_a(\dot\sigma(t)) = ۰$، $۱ \leq a \leq r$.
فرض کنیم C یک سیستم قیدی روی M باشد. توزیع D روی M را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\forall x \in M, \quad D(x) = \{X \in T_xM \mid \alpha_a(X) = ۰ \quad \forall \quad ۱ \leq a \leq r\}.$$

بنابراین D یک توزیع $(۲m - r)$−بعدی روی M است. یک سیستم قیدی C هولونومیک[۱] است اگر D انتگرال‌پذیر باشد، در غیر این‌صورت C را غیرهولونومیک[۲] می‌نامیم.

توجه ۱-۲-۲۴. الصاق[۳] ([۱۴])

فرض کنید $\pi : E \longrightarrow M$ یک منیفلد تاری باشد به‌طوری که $dimM = m$ و $dimE = m+n$. کلاف $V(E)$ عمود از E است یعنی $V(E) = \cup_{e\in E} V_e(E)$ که $V_e(E) = ker\{\pi_* : T_eE \longrightarrow T_{\pi(e)}M\}$. در این‌صورت $V(E)$ یک کلاف برداری روی E از رتبه‌ی n است. در واقع، $V(E)$ زیرکلاف برداری از TE است. علاوه بر این $V_e(E) = T_e(E_{\pi(e)})$ که $E_{\pi(e)}$ تار روی $\pi(e)$ است.

یک الصاق در E، یک کلاف برداری H روی E (یا یک توزیع H روی E) است به‌طوری که $TE = V(E) \oplus H$، یعنی $e \in E \quad T_eE = V_e(E) \oplus H_e$.

تعریف ۱-۲-۲۵. مشتق لی([۱۴])

فرض کنید X یک میدان برداری روی M و ϕ_t یک گروه ۱−پارامتری موضعی از تبدیلات، تولید شده به‌وسیله‌ی X باشد. مشتق لی $L_X\omega$ از یک p−فرمی ω مرتبط با X به‌صورت زیر تعریف می‌شود.
برای راحتی فرض می‌کنیم که ϕ_t یک گروه ۱−پارامتری موضعی از تبدیلات M است. در این‌جا برای هر $t \in R$، $\phi_t^* : \Lambda M \longrightarrow \Lambda M$ یک اتومورفیسم از جبر خارجی ΛM است. پس داریم

$$(L_X\omega)(X) = lim_{t\to ۰}(\frac{۱}{t})[\omega(x) - (\phi_{-t}^*\omega)(x)].$$

و $L_X\omega$ یک p−فرمی روی M است. خواص:

---

[۱] Holonomic [۲] Anholonomic [۳] Connection

۱. $L_X f = Xf$.

۲. $\tau \in \Lambda^q M$ ،$\omega \in \Lambda^p M$ ،$L_X(\omega \wedge \tau) = L_X\omega \wedge \tau + \omega \wedge L_X\tau$.

۳. $L_X d = dL_X$.

۴. $L_X = i_X d + di_X$.

تعریف ۱-۲-۲۶. ضرب درونی[1]([۱۴])

برای هر میدان برداری X روی یک منیفلد M، ضرب درونی $i_X\omega$ از p–فرمی ω توسط X را تعریف می‌کنیم.

۱. $i_X\omega = 0$ برای $p = 0$.

۲. $i_X\omega = \omega(X)$ برای $p = 1$.

۳. $(i_X\omega)(Y_1, \ldots, Y_{p-1}) = \omega(X, Y_1, \ldots, Y_{p-1})$ ،$Y_1, \ldots, Y_{p-1} \in \chi(M)$.

پس $i_X\omega \in \Lambda^{p-1}M$. خواص:

۱. $(i_X)^2 = 0$.

۲. $i_X(\omega \wedge \tau) = (i_X\omega) \wedge \tau + (-1)^p\omega \wedge (i_X\tau)$ ،$\omega \in \Lambda^p M$.

[1] Interior product

فصل ۲

مقدمات

این فصل شامل چهار بخش مرتبط است که مفاهیم مقدماتی برای شروع کار را بیان می‌کند.

۲-۱ فضای تکامل یافته

فرض کنید E یک منیفلد تاری $(n+1)$–بعدی روی R باشد یعنی سابمرشن پوشای $\pi : E \longrightarrow R$ وجود دارد. ۱–جت منیفلد از بخش‌های موضعی π، $J^1\pi$ نامیده می‌شود و

$$J^1\pi = \{j^1_t\phi \quad | \quad \phi : U \subset R \longrightarrow E, \pi \circ \phi = id_U\}$$

که U همسایگی باز از t است. اگر (t, q^A) مختصات تاری روی E باشد، آن‌گاه $J^1\pi$ مختصات موضعی به‌صورت (t, q^A, v^A) دارد. در واقع اگر $\phi(s) = (s, \phi^A(S))$ که $s \in U$، آن‌گاه $j^1_t\phi$ مختصات به‌صورت $(t, \phi^A(t), \frac{d\phi^A}{ds}(t))$ دارد. بنابراین اگر E از بعد $n+1$ باشد، آن‌گاه $J^1\pi$ از بعد $2n+1$ است زیرا اگر برای E چارت (U, u) را در نظر بگیریم که $u = (x^i, u^\alpha)$، آن‌گاه می‌توان (U^1, u^1) را برای $J^1\pi$ در نظر گرفت که $U^1 = \{j^1_p\phi : \phi(p) \in U\}$ و $u^1 = (x^i, u^\alpha, u^\alpha_i)$ به‌طوری‌که $x^i(j^1_p\phi) = x^i(p)$، $u^\alpha(j^1_p\phi) = u^\alpha(\phi(p))$ و $u^\alpha_i(j^1_p\phi) = \frac{\partial\phi^\alpha}{\partial x^i}|_p$. بنابراین

$$|J^1\pi| = n + 1 + n = 2n + 1.$$

و همچنین $J^1\pi$ منیفلد تاری روی E و R به‌ترتیب با توابع تصویر کانونی $\pi_{1,0} : J^1\pi \longrightarrow E$ و $\pi_1 : J^1\pi \longrightarrow R$ است. در مختصات موضعی داریم

$$\begin{aligned}
\pi_{1,0}(t, q^A, v^A) &= (t, q^A),\\
\pi_1(t, q^A, v^A) &= t,\\
\pi(t, q^A) &= t.
\end{aligned}$$

جت منیفلد $J^1\pi$ برای مکانیک‌های وابسته‌ی زمانی فضای تکاملی می‌شود. یک نشاندن کانونی $\iota : J^1\pi \longrightarrow TE$ به‌صورت $\iota(j^1_t\phi) = \dot\phi(t)$ تعریف می‌کنیم که $\dot\phi(t) \in T_{\phi(t)}E$ یک بردار مماس در t از منحنی $\phi(s)$ است. اگر مختصات موضعی (t, q^A, τ, τ^A) را داشته باشیم، آن‌گاه $\iota(t, q^A, v^A) = (t, q^A, 1, v^A)$.