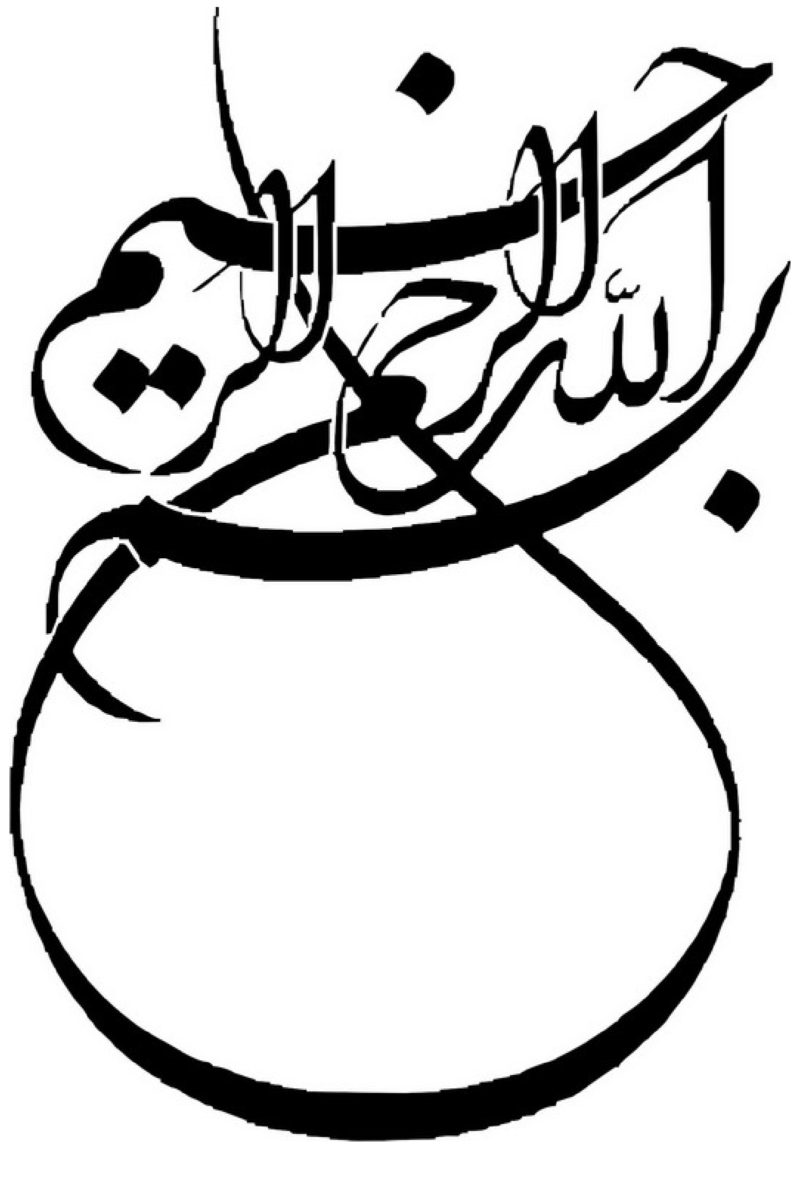
بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه کردستان
دانشکده علوم
گروه ریاضی
پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض گرایش آنالیز

عنوان:
قاب های فضاهای هیلبرت

پژوهشگر:
زهرا قمری هویدا

استاد راهنما:
دکتر هوگر قهرمانی

استاد مشاور:
دکتر محمد علی اردلانی

اسفند ماه ۱۳۹۱

چکیده

این پایان‌نامه با رویکرد شناساندن و گسترش اعضایی بنام قاب‌ها، که آنها را تعمیم پایه‌های یک فضای هیلبرت می‌دانیم، شکل می‌گیرد. عملگرهای تجزیه، ترکیب و قاب را به عنوان ابزارهای توانمندی در شناسایی این اعضا معرفی می‌کنیم. جمع قاب‌های یک فضای هیلبرت را مورد مطالعه و بررسی قرار داده و شرایطی را بیان می‌کنیم که تحت آنها جمع چند قاب یک فضا، خود قابی برای آن فضا باشد. بالاخص جمع قاب‌های گابور و جمع دنباله‌های B-بسل را بررسی خواهیم کرد. همچنین به مبحث قاب‌های زیر فضایی می‌پردازیم. و نشان می‌دهیم که قاب‌های زیر فضایی در واقع تحدید تعریف قاب در فضاهای بزرگتر به زیرفضاهای یک فضا می‌باشند.

واژگان کلیدی: قاب، عملگر تجزیه، عملگر ترکیب، عملگر قاب، قاب زیرفضایی، قاب گابور، قاب دوگان پایه یکامتعامد

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف اولیه و پیش نیازها

.

۱.۱ فضاهای باناخ

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای برداری تحت میدان F باشد. یک نیم نرم تابعی مانند $p : X \to [0, \infty)$ است که در ویژگی های زیر صدق کند:

(الف) $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$ به ازای هر $x, y \in X$

(ب) $p(\alpha x) =\mid \alpha \mid p(x)$ به ازای هر $\alpha \in F, x \in X$

از قسمت (ب) نتیجه می شود که $p(0) = 0$.

یک نرم، نیم نرمی است که علاوه بر قسمت (الف) و (ب) در شرط زیر نیز صدق کند:

(پ) $p(x) = 0$ اگر $x = 0$

توجه۲.۱.۱ به طور معمول یک نرم را با علامت $\|.\|$ نشان می دهیم.

و اگر فضای برداری X نرم دار باشد، در اینصورت $d(x,y) = \|x-y\|$ یک متریک روی X تعریف می کند.

تعریف ۳.۱.۱ یک فضای نرم دار عبارتست از زوج $(X, \|.\|)$، که X یک فضای برداری و $\|.\|$ یک نرم روی X است. یک فضای باناخ، فضایی نرم دار است، که تحت متر القایی توسط نرم بر آن، کامل باشد.

گزاره ۴.۱.۱ فرض کنیم X و Yفضاهایی نرم دار و $A : X \longrightarrow Y$ یک تبدیل خطی باشد، در اینصورت گزاره های زیر هم ارزند:

(الف) $A \in B(X,Y)$

(ب) A در صفر پیوسته است.

(پ) A در برخی نقاط پیوسته است.

(ت) عدد ثابت $c > ۰$ وجود دارد به طوریکه به ازای هر $x \in X$، $\|Ax\| \leqslant c\|x\|$.

تبصره ۵.۱.۱ اگر $A \in B(X,Y)$ و $\|A\| = sup\{\|Ax\| : \|x\| \leqslant ۱\}$ آنگاه:

$$\|A\| = sup\{\|Ax\| : \|x\| = ۱\}$$

$$= sup\{\|Ax\|/\|x\| : x \neq ۰\} = inf\{c > ۰ : \|Ax\| \leqslant c\|x\| \quad \forall x \in X\}$$

گزاره ۶.۱.۱ اگر X و Y فضاهایی باناخ و $A \in B(X,Y)$، آنگاه:

(الف) $\|A^*\| = \|A\|$

(ب) اگر A وارون پذیر باشد، آنگاه A^* نیز وارون پذیر است و $(A^*)^{-۱} = (A^{-۱})^*$.

(پ) اگر Z یک فضای باناخ باشد و $B \in B(Y,Z)$، آنگاه $(BA)^* = A^*B^*$

گزاره ۷.۱.۱ اگر $A \in B(X,Y)$، آنگاه $kerA^* = (ranA)^{\perp}$ و $kerA = (ranA^*)^{\perp}$.

گزاره ۸.۱.۱ اگر $A \in B(X,Y)$، آنگاه A وارونپذیر است، اگر و فقط اگر A^* وارونپذیر باشد.

اثبات: به [۱۵] گزاره ۹.۱ رجوع شود. ■

نتیجه ۹.۱.۱ .با توجه به گزاره بالا، یک عملگر خطی پیوسته، یک عملگر خطی کراندار نیز نامیده می شود

قضیه ۱۰.۱.۱ (اصل کرانداری یکنواخت)

فرض کنیم X یک فضای باناخ، و Y فضایی نرم دار باشد.اگر $\boldsymbol{A} \subseteq B(X,Y)$ طوری باشد که به ازای هر

$x \in X$، $sup\{\|Ax\| : A \in \boldsymbol{A}\} < \infty$ آنگاه $sup\{\|A\| : A \in \boldsymbol{A}\} < \infty$.

قضیه ۱۱.۱.۱ (قضیه نگاشت باز)

اگر X و Y فضاهایی باناخ و $A : X \longrightarrow Y$ یک نگاشت خطی پیوسته پوشا باشد، آنگاه $A(G)$ در Y باز

است، هرگاه G در X باز باشد.

اثبات: رجوع شود به [۱۵] . ■

قضیه ۱۲.۱.۱ (قضیه نگاشت وارون)

اگر X و Y فضاهایی باناخ و $A : X \longrightarrow Y$ یک تبدیل خطی کراندار و یک به یک باشد، آنگاه A^{-1} نیز

کراندار است.

اثبات: از آنجاییکه A پیوسته و دوسویی است، با توجه به قضیه نگاشت باز، A یک همئومورفیسم است. ■

تعریف ۱۳.۱.۱ مجموعه Λ را یک مجموعه جهت دار می نامیم، اگر رابطه $\leqslant$ روی Λ در شرایط زیر صدق کند:

(الف) $\lambda \leqslant \lambda \qquad \forall\lambda \in \Lambda$

(ب) اگر $\lambda_۲ \leqslant \lambda_۱$ و $\lambda_۳ \leqslant \lambda_۲$ آنگاه $\lambda_۳ \leqslant \lambda_۱$

(پ) اگر $\lambda_۱, \lambda_۲ \in \Lambda$ آنگاه $\lambda_۳ \in \Lambda$ وجود داشته باشد، بطوریکه $\lambda_۳ \leqslant \lambda_۱$ و $\lambda_۳ \leqslant \lambda_۱$

تعریف ۱۴.۱.۱ یک تور در مجموعه X، تابع $P : \Lambda \longrightarrow X$ است، که Λ یک مجموعه جهت دار است.

نقطه $P(\lambda)$ را معمولا با x_λ نشان می دهیم.

۲.۱ فضاهای هیلبرت

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنید Xیک فضای برداری روی میدان F باشد. یک ضرب شبه داخلی نگاشت $u : X \times X \longrightarrow F$ است، بطوریکه به ازای هر $x, y, z \in X$ و $\alpha, \beta \in F$ خواص زیر برقرار باشد:

(الف) $u(\alpha x + \beta y, z) = \alpha u(x, z) + \beta u(y, z)$

(ب) $u(x, \alpha y + \beta z) = \bar{\alpha} u(x, y) + \bar{\beta} u(x, z)$

(پ) $u(x, x) \geq ۰$

(ت) $u(x, y) = u(y, x)$

تعریف ۲.۲.۱ فرض کنید u یک ضرب شبه داخلی روی X باشد، بطوریکه اگر $u(x, x) = ۰$ آنگاه $x = ۰$، در اینصورت u را یک ضرب داخلی روی X می نامیم.

توجه ۳.۲.۱ در ادامه ضرب شبه داخلی (ضرب داخلی) $u(x,y)$ را با $\langle x,y\rangle$ نشان می دهیم.

تعریف ۴.۲.۱ فضای برداری X همراه با یک ضرب داخلی $\langle .,.\rangle$ را یک فضای ضرب داخلی می نامیم.

مثال ۵.۲.۱ فرض کنید (X,Ω,μ) یک فضای اندازه باشد و $\mu:\Omega\longrightarrow[0,+\infty]$.

روی $L^2(\mu)$ که $L^2(\mu)=\{f:X\longrightarrow C|\int|f|^2\,d\mu<\infty\}$، ضرب داخلی زیر را تعریف می کنیم:

$$\langle f,g\rangle=\int_X f\bar{g}d\mu \qquad\qquad \forall f,g\in L^2(\mu)$$

قضیه ۶.۲.۱ (نامساوی کشی-شوارتز): اگر $\langle .,.\rangle: X\times X\longrightarrow F$ یک ضرب شبه داخلی روی X باشد،

آنگاه به ازای هر $x,y\in X$ داریم:

$$|\langle x,y\rangle|^2\leqslant\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$$

اثبات: رجوع شود به [۱۵]، قضیه ۱.۴. ■

نتیجه ۷.۲.۱ اگر $\langle .,.\rangle$ یک ضرب شبه داخلی روی X باشد، و به ازای هر $x\in X$، $\|x\|\equiv\langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}$ آنگاه

به ازای هر $x,y\in X$ داریم:

(الف) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$

(ب) $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\| \qquad \forall\alpha\in F$

(پ) اگر $\langle .,.\rangle$ یک ضرب داخلی باشد، آنگاه:

$$\|x\|=0\ \Rightarrow x=0$$

اثبات: رجوع شود به [۱۵]، نتیجه ۱.۵. ■

تعریف ۸.۲.۱ اگر $\langle .,. \rangle$ یک ضرب شبه داخلی روی X باشد، آنگاه به ازای هر $x \in X$ داریم:

$$\|x+y\| = \|x\|^۲ + \|y\|^۲ + ۲Re\langle x,y \rangle$$

اتحاد بالا را، **اتحاد قطبی** می نامیم.

تذکر ۹.۲.۱ رابطه $\|x\| = \langle x,x \rangle^{\frac{۱}{۲}}$ برای ضرب داخلی $\langle .,. \rangle$ را، نرم x می نامیم.

اگر $X = F^d$ (R^d یا C^d) و $\langle \{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \rangle \equiv \sum_{n=۱}^{d} \alpha_n \bar{\beta}_n$ ، آنگاه نرم متناظر با این ضرب داخلی برابر رابطه زیر است:

$$\| \{\alpha_n\} \| = \left[\sum_{n=۱}^{d} | \alpha_n |^۲ \right]^{\frac{۱}{۲}} .$$

تذکر ۱۰.۲.۱ فرض کنید فضای برداری X دارای ضرب داخلی $\langle .,. \rangle$ باشد، نگاشت $d : X \times X \longrightarrow R$ را به ازای هر $x, y \in X$ بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$d(x,y) = \|x-y\| = \langle x-y, x-y \rangle^{\frac{۱}{۲}}$$

حال d یک متر روی X خواهد بود. در واقع داریم:

$$\|x-y\| = \|(x-z)+(z-y)\| \leqslant \|(x-z)\| + \|(z-y)\| = d(x-z) + d(z-y)$$

بقیه خواص فضاهای متریک، به سهولت قابل بررسی است. بنابراین d یک متر روی X است، لذا می توان خواص توپولوژیک فضای ضرب داخلی X را با این متر بررسی کرد.

گزاره ۱۱.۲.۱ فرض کنید X یک فضای ضرب داخلی باشد، نگاشت ضرب داخلی $\langle .,. \rangle : X \times X \longrightarrow F$ تحت توپولوژی ایجاد شده توسط متر القایی از ضرب داخلی، پیوسته است.

اثبات: رجوع شود به [۱۵]. ■

تعریف ۱۲.۲.۱ فرض کنید H یک فضای ضرب داخلی باشد. اگر H با متر $d(x,y)=\|x-y\|$ القا شده توسط نرم کامل باشد، آنگاه H را یک فضای هیلبرت می نامیم.

مثال ۱۳.۲.۱

فرض کنید I یک مجموعه دلخواه باشد. قرار می دهیم:

$$l^{۲}(I)=\left\{x:I\longrightarrow F \;\mid\; x(i)=\circ \text{ بجز تعدادی شمارش پذیر } i\in I \text{ به ازای هر } \;,\; \sum_{i\in I}\mid x(i)\mid^{۲}<\infty\right\}$$

در اینصورت $l^{۲}(I)$ به ازای هر $x,y\in l^{۲}(I)$ با ضرب زیر یک فضای ضرب داخلی، و لذا یک فضای هیلبرت است :

$$\langle x,y\rangle=\sum_{i\in I}x(i)\overline{y(i)}$$

مثال ۱۴.۲.۱ اگر $H=L^{۲}(\mu)$ به ازای هر $f,g\in L^{۲}(\mu)$داریم:

$$\langle f,g\rangle=\int f\bar{g}d\mu$$

در اینصورت

$$\|f\|=\left[\int\mid f\mid^{۲}\right]^{\frac{۱}{۲}}$$

. بنابراین $L^{۲}(\mu)$ با این نرم، یک فضای هیلبرت است.

مثال ۱۵.۲.۱ R^n و C^n فضاهایی کامل اند. پس با ضرب داخلی تعریف شده روی آنها، در تذکر ۹.۲.۱، فضای هیلبرت می باشند.

تعریف ۱۶.۲.۱ فرض کنید H یک فضای هیلبرت باشد، در اینصورت $f,g\in H$ را متعامد گوییم اگر

$\langle f,g\rangle = ۰$، و با نماد $f \perp g$ نمایش می دهیم.

حال اگر A و B زیر مجموعه های H باشند، آنگاه $A \perp B$ اگر برای هر $f \in A$ و $g \in B$ داشته باشیم:

$$f \perp g$$

نتیجه ۱۷.۲.۱ در $R^۲$ دو بردار x و y را متعامد گوییم اگر زاویه بین آنها $\frac{\pi}{۲}$ باشد.

تعریف ۱۸.۲.۱ یک زیرمجموعه متعامد یکه از فضای هیلبرت H، زیر مجموعه ای مانند ξ است به طوریکه:

الف) به ازای هر $e \in \xi$ $\qquad$ $\|e\| = ۱$

ب) اگر $e_۱, e_۲ \in \xi$ و $e_۱ \neq e_۲$ آنگاه $e_۱ \perp e_۲$ یا به عبارتی $\langle e_۱, e_۲\rangle = ۰$

تذکر ۱۹.۲.۱ یک مجموعه متعامد یکه ماکزیمال را یک پایه برای H نامیم.

گزاره ۲۰.۲.۱ اگر ξ یک مجموعه متعامد یکه در H باشد، آنگاه یک پایه برای H و شامل ξ وجود دارد.

اثبات: با کمک لم زرن اثبات انجام می شود.

۲۱.۲.۱ گزاره (نامساوی بسل) اگر $\{e_n : n \in N\}$ یک مجموعه متعامد یکه در H باشد، آنگاه به ازای هر

$h \in H$داریم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty} |\ \langle h, e_n\rangle\ |^۲ \leqslant \|h\|^۲$$

اثبات: رجوع شود به [۱۵]، گزاره ۴.۸. ■

گزاره ۲۲.۲.۱ اگر ξ یک مجموعه متعامد یکه در H باشد و $h \in H$، آنگاه به ازای حداکثر تعدادی شمارش

پذیر از اعضای $e \in \xi$ داریم: $\qquad$ $\langle h, e\rangle \neq ۰$

گزاره ۲۳.۲.۱ اگر ξ یک مجموعه متعامد یکه در H باشد و $h \in H$، آنگاه:

$$\sum_{e\in\xi} \mid \langle h,e\rangle \mid^{۲} \leqslant \|h\|^{۲}$$

تذکر ۲۴.۲.۱ فرض کنید $\bar{F} = \{F \subseteq I \quad | \quad F \text{ متناهی است}\}$ که با رابطه شمول یک مجموعه جهت دار است. به ازای هر $F \in \bar{F}$ قرار می دهیم $h_F = \sum \{h_i \quad : \quad i \in F\}$. از آنجاییکه این جمع متناهی است، h_F عضوی خوش تعریف از H است. حال $\{h_F \ : \ F \in \bar{F}\}$ یک تور در فضای هیلبرت H است.

تعریف ۲۵.۲.۱ با توجه به تذکر بالا؛ مجموع $\sum \{h_i \ : \ i \in I\}$ همگراست، اگر تور $\{h_F \ : \ F \in \bar{F}\}$ همگرا باشد. و داریم:

$$\sum_{i\in I} h_i = lim_{F\in\bar{F}} h_F$$

نتیجه ۲۶.۲.۱ اگر $\{h_n\}$ دنباله ای در فضای هیلبرت H باشد و $\sum \{h_n \ : \ n \in N\}$ با توجه به تعریف بالا همگرا باشد، در اینصورت $lim \sum_{k=۱}^{n} h_k = h$.

نتیجه ۲۷.۲.۱ اگر $\{h_n\}$ دنباله ای در فضای هیلبرت H باشد و $\sum_{n=۱}^{\infty} \|h_n\| < \infty$، در اینصورت $\sum \{h_n \ : \ n \in N\}$ تحت شرایط تعریف ۲۵.۲.۱، همگراست.

لم ۲۸.۲.۱ اگر ξ یک مجموعه متعامد یکه و $h \in H$ دلخواه باشد، آنگاه

$$\sum \{\langle h,e\rangle e : e \in \xi\}$$

در H همگراست.

اثبات: رجوع شود به [۱۵] لم ۴.۱۲. ■

قضیه ۲۹.۲.۱ اگر ξ یک مجموعه متعامد یکه در H باشد، آنگاه احکام زیر معادلند:

الف) ξ یک پایه برای H است.

ب) اگر $h \in H$ و $h \perp \xi$، آنگاه $h = ۰$

پ) $\overline{span\xi} = \vee\xi = H$

ت) اگر $h \in H$، آنگاه $h = \sum\{\langle h, e\rangle e : e \in \xi\}$

ث) اگر $g, h \in H$، آنگاه $\langle g, h\rangle = \sum\{\langle g, e\rangle\langle e, h\rangle : e \in \xi\}$

ج) اگر $h \in H$، آنگاه $\|h\|^{۲} = \sum\{|\langle h, e\rangle|^{۲} : e \in \xi\}$ (اتحاد پارسوال)

اثبات: رجوع شود به [۱۵] قضیه ۴.۱۳. ■

گزاره ۳۰.۲.۱ فرض کنید H یک فضای هیلبرت و $L : H \longrightarrow F$ یک تابعک خطی باشد، در اینصورت احکام زیر معادلند:

الف) L پیوسته است.

ب) L در ۰ پیوسته است.

پ) L در یک نقطه پیوسته است.

ت) یک ثابت $c > ۰$ وجود دارد، بطوریکه به ازای هر $f \in H$ داریم: $| L(h) | \leqslant c\|h\|$

اثبات: رجوع شود به [۱۵]، گزاره ۳.۱. ■

تعریف ۳۱.۲.۱ خانواده $\{f_i\}_{i\in I}$ از بردارهای در H را یک پایه ریس برای این فضا می نامیم، اگر تصویر یک

پایه یکامتعامد تحت یک تبدیل خطی وارونپذیر باشد.

به عبارت دیگر، اگر یک پایه یکامتعامد $\{e_i\}_{i\in I}$ برای H و یک عملگر وارونپذیر T وجود داشته باشد، بطوریکه به ازای هر $i \in I$ داشته باشیم: $T\{e_i\}_{i\in I} = \{f_i\}_{i\in I}$

تعریف ۳۲.۲.۱ تابعک خطی $L : H \longrightarrow F$ را کراندار گوییم، اگر به ازای هر $f \in H$، $c > 0$ موجود باشد، بطوریکه داشته باشیم:

$$| L(h) | \leqslant c\|h\|$$

نتیجه ۳۳.۲.۱ بنا بر گزاره قبل، هر تابعک خطی کراندار روی H پیوسته است و برعکس.

قضیه ۳۴.۲.۱ (قضیه نمایش ریس) فرض کنید $L : H \longrightarrow F$ یک تابعک خطی کراندار باشد، در اینصورت بردار یکتای h_0 در H وجود دارد بطوریکه به ازای هر $h \in H$، $L(h) = \langle h, h_0\rangle$.

علاوه بر این داریم: $\|L\| = \|h_0\|$

اثبات:رجوع شود به [۱۵]، قضیه ۳.۴. ■

گزاره ۳۵.۲.۱ اگر H یک فضای هیلبرت باشد، آنگاه هر دو پایه آن کاردینال(عد اصلی) یکسان دارند.

اثبات:رجوع شود به [۱۵] گزاره ۴.۱۴. ■

تعریف ۳۶.۲.۱ بعد یک فضای هیلبرت، کاردینال یک پایه آن می باشد و با $dimH$ نشان می دهیم.

تعریف ۳۷.۲.۱ فضای متریک M را جدایی پذیر گوییم، هرگاه دارای زیرمجموعه ای چگال و شمارا باشد.

تعریف ۳۴.۲.۱ فضای هیلبرت H را جدایی پذیر گوییم، هرگاه شامل یک دنباله یکامتعامد کامل باشد.

گزاره ۳۸.۲.۱ اگر H یک فضای هیلبرت نامتناهی البعد باشد، آنگاه H جدایی پذیر است اگر و تنها اگر :

$$dimH = \aleph_0$$

اثبات:رجوع شود به [۱۵] گزاره ۴.۱۶. $\blacksquare$

۳.۱ عملگر ها روی فضاهای هیلبرت

یادآوری ۱.۳.۱ تابع $T : X \longrightarrow Y$ بین دو فضای برداری را یک عملگر خطی (یا به اختصار، عملگر) می نامیم، هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ و $\alpha, \beta \in R$ داشته باشیم:

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

ملاحظه می کنیم که هر عملگر خطی T در رابطه $T(0) = 0$ صدق می کند.

قرارداد ۲.۳.۱ مجموعه تمامی عملگرهای خطی کراندار از H به K را با نماد $B(H, K)$ نشان می دهیم.

در ضمن اگر $H = K$، آنگاه $B(H, H) \equiv B(H)$.

توجه کنید که مجموعه تمام تابعک های خطی کراندار روی H را با $B(H, F)$ نشان می دهیم.

تعریف ۳.۳.۱ اگر H و K دو فضای هیلبرت باشند، آنگاه تابع $u : H \times K \longrightarrow F$ یک **فرم یک و نیم خطی** است، هرگاه به ازای هر $h, g \in H$ و $k, f \in K$ و $\alpha, \beta \in F$ داشته باشیم:

الف) $u(\alpha h + \beta g, k) = \alpha u(h, k) + \beta u(g, k)$

ب) $u(h, \alpha k + \beta f) = \bar{\alpha} u(h, k) + \bar{\beta} u(h, f)$

اگر $F = R$ فرم یک ونیم خطی یک نگاشت دو خطی است.

توجه ۴.۳.۱ فرم یک ونیم خطی u را کراندار گوییم، هرگاه به ازای یک $M > 0$ داشته باشیم:

$$| u(h, k) | \leqslant M\|h\|\|k\| \qquad (h \in H, k \in K)$$

مثال ۵.۳.۱ اگر H و K فضاهایی هیلبرت و $A \in B(H, K)$، آنگاه $u : H \times K \longrightarrow F$ با ضابطه $u(h, k) = \langle Ah, k\rangle$ یک فرم یک ونیم خطی است.زیرا برای شرط (الف) داریم:

$$u(\alpha h + \beta g, k) = \langle A(\alpha h + \beta g), k\rangle = \langle \alpha Ah + \beta Ag, k\rangle$$

$$\alpha\langle Ah, k\rangle + \beta\langle Ag, k\rangle = \alpha u(h, k) + \beta(g, k)$$

(ب) نیز به صورت مشابه بررشی می شود. پس u یک فرم یک و نیم خطی است.

حال برای اثبات کرانداری u به ازای $h \in H$ و $k \in K$ داریم:

$$| u(h, k) |=| \langle Ah, k\rangle | \leqslant \|Ah\|\|k\| \leqslant \|A\|\|h\|\|k\|$$

بنابراین u کراندار است.

نتیجه ۶.۳.۱ اگر $B \in B(K, H)$، آنگاه $v : H \times K \longrightarrow F$ که $v(h, k) = \langle h, Bk\rangle$، یک فرم یک و نیم خطی کراندار است.

قضیه ۷.۳.۱ اگر $u : H \times K \longrightarrow F$ یک فرم یک ونیم خطی کراندار با کران M باشد، آنگاه عملگر یکتای A در $B(H, K)$ و عملگر یکتای B در $B(K, H)$ وجود دارد بطوریکه به ازای هر $k \in K$ و $h \in H$ داریم:

$$u(h, k) = \langle Ah, k\rangle = \langle h, Bk\rangle$$

همچنین: $$\|A\|, \|B\| \leqslant M$$

اثبات: رجوع شود به [۱۵]، قضیه ۲.۲.

تعریف ۸.۳.۱ اگر $A \in B(H,K)$، آنگاه $u(h,k) = \langle Ah, k\rangle$ یک فرم یک ونیم خطی کراندار است.

حال بنا بر قضیه قبل، عملگر یکتای $B \in B(K,H)$ وجود دارد به طوریکه:

$$u(h,k) = \langle Ah, k\rangle = \langle h, Bk\rangle$$

عملگر B را **الحاق** عملگر A نامیده، و با A^* نشان می دهیم. بنابراین به ازای $k \in K$ و $h \in H$ داریم:

$$\langle Ah, k\rangle = \langle h, A^*k\rangle$$

گزاره ۹.۳.۱ اگر $U \in B(H,K)$، آنگاه U یک ایزومورفیسم است، اگر وتنها اگر U وارون پذیر باشد و داشته باشیم: $$U^{-1} = U^*$$

اثبات: رجوع شود به [۱۵]، گزاره ۲.۵. ■

گزاره ۱۰.۳.۱ اگر $A, B \in B(H)$ و $\alpha \in F$ آنگاه:

الف) $(\alpha A + B)^* = \bar{\alpha}A^* + B^*$

ب) $(AB)^* = B^*A^*$

پ) $A^{**} = (A^*)^* = A$

ت) اگر A در $B(H)$ وارونپذیر باشد و A^{-1} نیز وارون آن باشد، آنگاه A^* نیز در $B(H)$ وارونپذیر است. (بنا بر قضیه نگاشت باز، A^{-1} نیز در $B(H)$ وجود دارد.)

لذا: $(A^*)^{-۱} = (A^{-۱})^*$

گزاره ۱۱.۳.۱ اگر $A \in B(H)$، آنگاه:

$$\|A\| = \|A^*\| = \|A^*A\|^{\frac{۱}{۲}}$$

اثبات: رجوع شود به [۱۵]، گزاره ۲.۷.

گزاره ۱۲.۳.۱ اگر $S : l^۲ \longrightarrow l^۲$ با ضابطه $S(\alpha_۱, \alpha_۲, ...) = (۰, \alpha_۱, \alpha_۲, ...)$ **تعریف شود،**

آنگاه S یک ایزومتری است و $S^*(\alpha_۱, \alpha_۲, ...) = (\alpha_۲, \alpha_۳, ...)$

عملگر S در این گزاره عملگر شیفت نام دارد.

اثبات: رجوع شود به [۱۵]، گزاره ۲.۱۰. ■

تعریف ۱۳.۳.۱ اگر $A \in B(H)$ آنگاه:

الف) A هرمیتی یا خودالحاق است، هرگاه: $A = A^*$

ب) A نرمال است، هرگاه: $AA^* = A^*A$

پ) A یکانی است، هرگاه: $AA^* = A^*A = I$

گزاره ۱۴.۳.۱ اگر H یک فضای هیلبرت روی C باشد و $A \in B(H)$،

آنگاه A هرمیتی است اگر وفقط اگر به ازای هر $h \in H$،

$$\langle Ah, h \rangle \in R$$

اثبات: رجوع شود به [۱۵]، گزاره ۲.۱۲. ■

نکته ۱۵.۳.۱ در گزاره اخیر، نمی توان H را یک فضای هیلبرت حقیقی در نظر گرفت.

مثال زیر مؤید این مطلب است:

مثال ۱۵.۳.۱ اگر $H = R^۲$ و $A = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{pmatrix} \in B(R^۲)$ آنگاه به ازای هر $h \in H$ داریم:

$$h = (x, y) \in R^۲ \;\Rightarrow\; \langle Ah, h\rangle = \langle \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\rangle = \langle \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\rangle$$

$$= xy - xy = ۰ \in R$$

$$A^* = A^T = \begin{pmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix} \neq A$$

یعنی A هرمیتی نیست.

گزاره ۱۶.۳.۱ اگر $A = A^*$ آنگاه: $\|A\| = sup_{\|h\|=۱} \mid \langle Ah, h\rangle \mid$

اثبات: رجوع شود به [۱۵]، گزاره ۲.۱۳. ■

نتیجه ۱۷.۳.۱ اگر $A = A^*$ و $\langle Ah, h\rangle = ۰$ به ازای هر $h \in H$، آنگاه $A = ۰$

گزاره ۱۸.۳.۱ اگر $A \in B(H)$، آنگاه احکام زیر معادلند:

الف) A نرمال است.