دانشگاه پیام نور
دانشکده علوم گروه آمار
مرکز شیراز

عنوان پایان‌نامه

استنباط ناپارامتری استوار برای میانه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته آمارریاضی

توسط

سمانه فیروزی

استاد راهنما

دکتر نرگس عباسی

ماه و سال انتشار

شهریورماه ۱۳۸۸

چکیده

نگاهی تازه به کاربرد آماره‌های ترتیبی در شکل آماره‌های ال، همچنین رفتار آنها در آزمون‌های استواری که از توزیع‌های آلوده گرفته شده‌اند، موضوعاتی است که این پایان‌نامه را تشکیل می‌دهد.

این پایان‌نامه مشتمل بر چهار فصل است. فصل اول، به بررسی مفهوم میانه با استفاده از دو قضیه می-پردازد، همچنین تعاریفی را که در فصول بعد به آنها نیاز داریم، در این فصل آورده شده است. فصل دوم شامل دو برآوردگر استوار، برآوردگر ال و ام، می‌باشد که از برآوردگر ال چهار مثال آورده شده است. همچنین نشان داده شده در حالت تقارن میانگین‌های پیراسته بهتر از برآوردهای مکانی میانه‌های نمونه هستند، مگر اینکه توزیع‌های خطا به طور دقیق در مرکز به حداکثر رسیده باشند.

فصل سوم در ارتباط با بازه‌های اطمینان برای میانه، به معرفی روش‌هایی در به دست آوردن فواصل اطمینان برای میانه می‌پردازد همچنین دو قضیه اصلی را دربرمی‌گیرد. با کنکاشی بیشتر روی قضیه ۲ به نتایج مفید دیگری می‌رسیم. در فصل چهارم، دو مسئله اساسی بحث می شود، مسئله‌ی اول، ساختن فواصل اطمینان ناپارامتری استوار و آزمون فرض‌هایی برای میانه است، وقتی که توزیع داده‌ها مجهول و داده‌ها کسر کوچکی از آلودگی را دربردارند. تغییری را در آزمون علامت (و فاصله مربوط به آن) پیشنهاد می-شود تا سطح معناداری اسمی (احتمال پوشش) را برای هر توزیعی در همسایگی آلوده از یک توزیع پیوسته به دست آید. همچنین با همسان‌سازی اعمال انجام شده بر روی آزمون علامت با آزمون من – ویتنی به نتایجی مرتبط با آن می‌رسیم. مسئله دوم، ضرایب و سطوح اطمینان نسبتاً کمی است که برای فواصل اطمینان و آزمون‌های ناپارامتری در مورد میانه وجود دارد و براساس آماره علامت پایه‌ریزی شده است. این مسئله توسط فواصل اطمینان تحریفی یا به وسیله استیودنتیدن میانه از طریق برآورد انحراف معیار آن مورد غلبه واقع می‌شود.

فهرست مطالب

مقدمه

در بعضی از تحقیقات، ممکن است داده‌ها کسری از آلودگی را دربرداشته باشند، که در این صورت ما را در تصمیم‌گیری دچار تردید می‌کنند، این پایان‌نامه بیان می‌کند که در چنین مواقعی در مورد مثلاً آزمون علامت یا آزمون من – ویتنی چگونه تصمیم‌گیری کنیم. یک کاربرد مهم دیگر، می‌توان از یک نامساوی دقیق برای میانه‌ی آماره‌های ترتیبی استفاده کرد.

این پایان‌نامه از دو جنبه اساسی و مهم نگارش یافته است:

۱ برخی از مباحث از طریق اثبات و مثال زدن، بسط داده و گویاتر و واضح‌تر شده است.

۲ چند نتیجه جدید، افزون بر نتایج مقاله‌های مورد استفاده، در این تحقیق آورده شده است.

همچنین افراد می‌توانند هم از لحاظ نظری و هم کاربردی به راحتی از روش‌ها، رهیافت‌ها و رهنمودهای مبسوط آن استفاده کنند.

بی‌چون و چرا چنین پایان‌نامه‌ای نمی‌تواند در بر گیرنده تمام بخش‌های استنباط ناپارامتری استوار برای میانه باشد؛ واگرنه حجم آن چند برابر می‌بود. با این حال بیشتر مفاهیم مهم را در بر دارد و خواننده با فهم مطالب این پایان‌نامه می‌تواند شخصاً موضوع‌های مشابه را مطالعه کند.

لازم به ذکر است که مطالعه‌ی پایان‌نامه دانستن بعضی مفاهیم مقدماتی آمار و احتمال را طلب می‌کند.

فصل اول

مفاهیم

بخش اول به معرفی میانه به وسیله پیدا کردن روابطی بین میانه با، میانگین، مد و چولگی می‌پردازد. در بخش دوم مفهوم فاصله اطمینان ناپارامتری و استوار و در پی آن آزمون ناپارامتری و استوار برای میانه را بیان می‌کنیم که در این بین مفاهیم وابسته به آنها نیز تعریف می‌شود.

۱−۱ *مفهوم میانه و روابط آن با چند پارامتر دیگر*

بررسی‌های قبلی شرایط کافی متعددی را در مورد نامساوی‌هایی در ارتباط با میانگین، میانه، مد و چولگی به دست آورده‌اند. برای مثال گران‌اولد[۱] و میدن[۲] (۱۹۷۷)، راننبرگ[۳] (۱۹۷۸)، وان‌زوییت[۴] (۱۹۷۹) و مک‌گیللیورای[۵] (۱۹۸۱) را ببینید. این نتایج شرایط متعددی را روی تابع چگالی توزیع تحمیل می‌کند. در این قسمت قضیه یکسان‌سازی که این نتایج را ترکیب می‌کند، آورده شده است. این

---

[1] Groneveld
[2] Meeden
[3] Runnenburg
[4] Van Zwet
[5] MacGillivray

قضیه بعضی کران‌ها را اصلاح می‌کند و نتایجی را که شامل حالت‌هایی است که در یک چگالی لازم نیست وجود داشته باشد، وسعت می‌دهد.

فرض کنید P توزیع احتمال را روی $\Re$ نشان دهد. X یک متغیر تصادفی است که دارای توزیع P است. همچنین فرض کنید F تابع توزیع باشد طوری که $F(x)=P(X\le x)$ و $F(x-)=P(X<x)$. f نیز یک چگالی (با در نظر گرفتن اندازه لبگ) است البته اگر وجود داشته باشد. تعریف می‌شود $\mu=E(X)$ را میانگین توزیع و $\mu_r=E[(X-\mu)^r]$ را گشتاور مرکزی $r-$ام می‌نامند.

m را میانه‌ی توزیع X می‌نامند اگر در رابطه‌ی زیر صدق کند:

$$F(m-)\le \frac{۱}{۲}\le F(m) \qquad (۱-۱)$$

اما چون میانه‌ی توزیع ممکن است یکتا نباشد، عده‌ای میانه را میان‌نقطه‌ی دامنه‌ی تغییرات مقادیری تعریف می‌کنند که در $(۱-۱)$ صدق می‌کند.

در این پایان‌نامه، فرض یکتایی میانه را در نظر می‌گیریم. همچنین با تعریف کردن مد می‌توان مسائلی را بیان کرد. معمولاً نقطه‌ای که ماکسیمم مقدار f را ایجاد می‌کند، مد نامیده می‌شود. مد وجود دارد اگر و فقط اگر f ی وجود داشته باشد (با در نظر گرفتن اندازه لبگ) که M یکتا دارد، به طوری که f (به ضعیفی) در $(-\infty,M]$ افزایش پیدا می‌کند همچنین در $[M,\infty)$ کاهش می‌یابد و یا اینکه در M پیوستگی راست یا پیوستگی چپ دارد. بنابراین M مد است و f تک مدی است. برای مثال، در مورد توزیع‌های نمایی، بعضی مواقع M نیم مدی نامیده می‌شود، اما در این قسمت حتی اگر چنین اتفاقی بیافتد آن را مد می‌نامند. این، مفهومی را در تعریف مد برای چگالی پیوسته دومدی ایجاد می‌کند. اما چنین کاری در اینجا انجام نمی‌شود زیرا در چنین حالتی نمی‌توان به آسانی بین میانه، مد و چولگی رابطه ایجاد کرد.

تعریف می‌شود $\sigma=\sqrt{\mu_۲}$ و فرض کنید $\frac{\mu_۳}{\sigma^۳}$ اندازه معمول چولگی و $\frac{\mu-M}{\sigma}$ اندازه چولگی پیرسن[۱] را نشان دهد، البته اگر هر کدام از آنها وجود داشته باشند. (برای این منظور می‌توانید پیرسن (۱۸۹۵)،(۱۹۰۱)، کندال[۲] (۱۹۹۴) را ببینید). توجه کنید در این متن نویسنده به علامتشان توجهی نمی‌کند، برای این منظور $\frac{\mu^۲_۳}{\sigma^۶}$ و $\frac{|\mu-M|}{\sigma}$ را در نظر گرفته است.

۱-۱-۱ چند نتیجه

در ادامه قضیه‌ای بیان می‌شود که چند نتیجه از پژوهشگران مختلف را با هم ترکیب کرده و روابط به دست آمده را در قالب سه روش بیان می‌کند. این قضیه، به قضیه یکسان‌سازی معروف است.

قضیه ۱ فرض کنید P توزیع احتمال نامتقارن روی $\Re$ باشد.

$i)$ **روش μ**. فرض کنید که $E(|X|)<\infty$ و اینکه $t>۰$ی وجود دارد به طوری که برای تمام مجموعه‌های برل $A\subset\Re$ عبارات زیر برقرارند:

$$A\subset(۰,t)\text{ ،}P(\mu+A)\le P(\mu-A)$$

$$A\subset(t,\infty)\text{ ،}P(\mu+A)\ge P(\mu-A) \qquad (۱-۲)$$

آنگاه

(۱-۳) اگر $\mu_۳$ موجود باشد، $۰<\mu_۳<\infty$

(۱-۴) $P(X<\mu)>P(X>\mu)$

(۱-۵) اگر m تعریف شده باشد، $m\le\mu$

(۱-۶) اگر m تعریف شده باشد و F نیز پیوسته باشد، $m<\mu$

(۱-۷) اگر P یک چگالی تک‌مدی داشته باشد، $\mu-t\le M\le\mu$

---
[1] Pearson
[2] Kendall

ii) **روش** m. فرض کنید m تعریف شده باشد، F نیز پیوسته باشد، و $t>0$ وجود داشته باشد به طوری که برای تمام مجموعه‌های برل $A\subset\Re$،

$$P(m+A)\le P(m-A) ،A\subset(0,t)$$

$$P(m+A)\ge P(m-A) ،A\subset(t,\infty) \quad .$$

اگر μ موجود باشد و $m-t\le M\le m$، همچنین اگر P دارای چگالی تک‌مدی باشد. آنگاه $m<\mu$.

iii) **روش** M. فرض کنید که P دارای چگالی تک‌مدی f باشد به طوری که برای $x>0$

$$f(M-x)\le f(M+x)\,.$$

آنگاه $M<m$ و $M<\mu$، البته اگر μ تعریف شده باشد.

۱–۱–۲ *مثال و کاربرد*

راننبرگ (۱۹۷۸) به صورت جزیی با افزایش فرض‌ها روش μ را بررسی می‌کند. مک‌گیللیورای (۱۹۸۱) تلاش می‌کند تا روش μ را اصلاح کند، اما نتیجه‌ی او مستلزم آن است که $M\le\mu$ باشد تا اینکه $M<\mu$. برای دیدن این موضوع تنها مثال عددی که با استفاده از چگالی زیر به دست آمده است را در نظر بگیرید:

$$f_\varepsilon(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ C\,x^{\varepsilon} & 0<x\le 1\\ C\,x^{-5} & 1<x\end{cases}$$

که در آن $\varepsilon=\sqrt{5}-1$ است. نمی‌توان از روش μ برای رسیدن به $M\le m$ استفاده کرد.

گران‌اولد و میدن (۱۹۷۷)، به صورت جزیی روش‌های m و M را با افزودن فرض‌هایی به دست می‌آورند، و وان‌زوییت (۱۹۷۹) این روش‌ها را اصلاح می‌کند. در روش m آنها، نمی‌توان علامت تساوی

را در $M \le m$ حذف کرد. یک مثال عددی به وسیله چگالی f_{ε} که در بالا تعریف شد، داده شده است. برای به دست آوردن $\mu_{۳} > ۰$ نمی‌توان از روش m استفاده کرد. یک مثال عددی آورده شده است:

در ابتدا p، یک چگالی تک‌مدی، به طوری که $M \neq m$، و $E(|X|^{۳}) < \infty$ را تعریف می‌کنند و اینکه می‌توان از روش m استفاده کرد. فرض شده که $M = -۱$ و $m = ۰$، همچنین

$$q(x) = \begin{cases} \frac{۱}{۳} & |x| \le ۱ \\ \frac{۱}{۳}(۲ - x) & ۱ < |x| \le ۲ \\ ۰ & \text{سایرموارد} \end{cases}$$

سپس چگالی $g_{\varepsilon}(x) = (۱-\varepsilon)p(x) + \varepsilon^{۲} q(\varepsilon x)$، که در آن ε یک عدد مثبت کوچک است، یک مثال عددی مطرح می‌کند. نمی‌توان از روش M استفاده کرد تا به $M \le m$ برسیم. برای دیدن این موضوع چگالی زیر در نظر گرفته می‌شود

$$h_{\varepsilon}(x) = \begin{cases} Dx & ۰ < x \le ۱ \\ D(۲ - x)^{\varepsilon} & ۱ < x \le ۲ \\ ۰ & \text{سایر موارد} \end{cases}$$

که در آن ε یک عدد مثبت کوچک است.

مک‌گیللیورای (۱۹۸۱) ادعا می‌کند که تغییر علامت $۱ - F(\mu + x) - F(\mu - x)$ در $x > ۰$ (گفته می‌شود از منفی به مثبت) برای تعیین علامت $\mu_{۳}$ کافی است. توجه کنید که شرایطی که در بالا آمده نه در $M < m$ کاربرد دارد نه در $M < \mu$. وان‌زوییت (۱۹۷۹) نشان می‌دهد که تحت شرایط نظم برای تمام xها $F(m + x) + F(m - x) \le ۱$ برقرار است و نتایجی مشابه با روش μ را به دست می‌آورد، اما این برای استفاده کردن مشکل است چون F زمانی که یک تابع مقدماتی است اغلب مشکل به دست می‌آید. همچنین وان‌زوییت (۱۹۶۴,۱۹۷۹) روش‌های خلاصه‌تری را ارائه می‌دهد.

توجه کنید که می‌توان از قضیه ۱ برای به دست آوردن نامساوی‌های معکوس استفاده کرد. برای مثال، اگر در ۱–۲ نامساوی‌ها به صورت معکوس برقرار باشد، آنگاه با در نظر گرفتن $-X$ می‌توان $-\infty < \mu_3 < 0$ را به جای ۱–۳ به دست آورد، البته اگر μ_3 وجود داشته باشد. بعضی نتایج که در زیر قضیه ۱ ارجاع داده شد در مقاله‌های اصلی به صورت عکس نوشته شده است.

اغلب مشکل است که مقدار دقیقی برای m به دست آورد، اما معمولاً برای اینکه از روش m استفاده شود احتیاج به این نیست که یک مقدار دقیقی برای m به دست آورده شود. در بخش بعدی به طور مشابه برای روش μ نشان داده شده است.

همچنین برای اینکه نشان داده شود $m < \mu$ و وقتی که چگالی مورد استفاده $f_{\sqrt{5}-1}$ باشد می‌توان از روش μ استفاده کرد، اما نه روش m، در ضمن g_{ε} حالت عکس دارد.

توزیع‌های پیرسن نوع اول تا نوع هفتم را در نظر بگیرید (پیرسن ۱۸۹۵، ۱۹۰۱، ۱۹۱۶) در ادامه، قضیه‌ای ادعا می‌کند، نامساوی‌های متداول برای توزیع‌های پیرسن برقرار است.

قضیه ۲ برای توزیع پیرسن نامتقارن تک‌مدی چنانچه $E(|X|) < \infty$ باشد نامساوی میانه، مد و میانگین (یعنی $M < m < \mu$ یا $M > m > \mu$) برقرار است. علاوه‌براین اگر μ_3 تعریف شده باشد آنگاه $M < m < \mu$ معادل است با اینکه $\mu_3 > 0$ باشد. همچنین $M > m > \mu$ معادل است با $\mu_3 < 0$.

۱–۲ *استواری طول فواصل و توان آزمون ناپارامتری دقیق برای میانه*

به طور رسمی ویژگی‌های ناپارامتری و استواری مطلوب برای احتمال پوشش فواصل اطمینان بیان می‌شود. فرض کنید اگر $X_{1:n} < X_{2:n} < \ldots < X_{n:n}$ آماره‌های ترتیبی یک نمونه‌ی $\mathsf{X}_n = (X_1,\ldots,X_n)$ با توزیع مشترک پیوسته F، با میانه یکتای $m(F) = F^{-1}(\frac{1}{2})$ می‌باشد.

همچنین فرض کنید در آزمون فرضیه $H_{0}: m = m_{0}$، آماره آزمون میانه (علامت)

$$T_{n,m}(\mathsf{X}_n) = \sum_{i=1}^{n} I(X_i - m > 0) \qquad (1-8)$$

باشد و فاصله

$$I_\alpha(\mathsf{X}_n) = [X_{k+1:n}, X_{n-k:n}) \qquad (1-9)$$

از معکوس کردن ناحیه پذیرش $k < T_{n,m_0} < n-k$ به دست آمده باشد. فرض دیگری که برای دانستن تعاریف این بخش طلب می‌شود، کسر ε آلودگی در داده‌هاست، برای این منظور فرض کنید توزیع واقعی G در همسایگی آلوده از توزیع هدف F قرار گرفته است

$$\Im_\varepsilon(F) = \{G : G = (1-\varepsilon)F + \varepsilon H\}$$

که در آن H هر توزیع اختیاری و $0 \le \varepsilon < \frac{1}{2}$ است.

۱–۲–۱ *استواری پوشش و سطح*

تعریف ۱ (استواری پوشش) فاصله‌ی اطمینان $I_n = [a_n(\mathsf{X}_n), b_n(\mathsf{X}_n))$ ε- استوار در سطح $1-\alpha$ در F است اگر

$$\inf_{G \in \Im_\varepsilon(F)} P_G\{a_n(\mathsf{X}_n) \le m < b_n(\mathsf{X}_n)\} = 1-\alpha \qquad (1-10)$$

که در آن $[a_n(\mathsf{X}_n) < b_n(\mathsf{X}_n))$ توابعی از نمونه‌ی تصادفی هستند. یک مفهوم مرتبط با فاصله اطمینان استوار به وسیله هوبر[1] (۱۹۶۸) معرفی شد. اگر چه تابع مورد نظر هوبر دقیقاً مساوی مینیمم احتمال پوشش نیست، اما با یکدیگر مرتبطند. در تعریف بعدی انتقال ماهیت ناپارامتری از یک فاصله به نظر طبیعی می‌رسد.

---

[1] Huber

تعریف ۲ (استواری پوشش ناپارامتری) فاصله‌ی اطمینان $I_n = [a_n(\mathrm{X}_n), b_n(\mathrm{X}_n))$ پوشش ناپارامتری ε- استوار در سطح $\alpha-$۱ دارد، اگر این فاصله برای تمام F های پیوسته، ε- استوار در سطح $\alpha-$۱ باشد.

۱-۲-۱-۱ فاصله‌ی ε- استوار ناپارامتری دقیق برای m

تصمیم بر این است که فواصل اطمینان ناپارامتری و استوار برای میانه‌ی **توزیع هدف** ساخته شود. توزیع حداقل مطلوبیت نمونه‌ی متناهی دقیق منجر به برخی خصوصیات خواهد شد که در فصل چهار درباره‌ی آنها بیشتر توضیح داده می‌شود. مهمترین نکته آن است که چگونه فاصله‌ی (۱-۹) اصلاح شود طوری که سطح $\alpha-$۱ی ε- استوار ناپارامتری به دست دهد. یعنی kی صحیح باید در معادله

$$\alpha^*(n, k, \varepsilon) = \alpha \qquad (۱-۱۱)$$

صدق کند. که در آن $\alpha^*(n,k,\varepsilon) = 1 - P(k < Z_n < n-k)$ و Z_n دارای توزیع دوجمله‌ای $\{n, (1-\varepsilon)/2\}$ است. توجه کنید که معادله (۱-۱۱) در نقطه k روی توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای $\{n, (1-\varepsilon)/2\}$ به جای توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای $\{n, 1/2\}$ پایه‌ریزی شده است. اما در حالت کلاسیکی، ممکن نیست که تمام احتمالات پوشش دقیق مطلوب در سطح $\alpha-$۱ را به دست آورد. برای سادگی، توجه‌مان را به اعداد صحیح معطوف می‌کنیم

$$k_n = k_n(n, \alpha) = \arg\min \left| \alpha^*(n, k, \varepsilon) - \alpha \right| \qquad (۱-۱۲)$$

که به طور واضح می‌خواهیم

$$\lim_{n\to\infty} \alpha^*(n, k_n, \varepsilon) = \alpha$$

به طور خلاصه، فاصله‌ی اصلاح شده، میانه‌ی توزیع هدف را با سطح اطمینان تضمین شده‌ای برای هر n و برای تمام توزیع‌ها در یک همسایگی آلوده از توزیع هدف کلی در بر می‌گیرد.

۱–۲–۱–۲ *سطح استواری آزمون*

با توجه به تناظر یک به یک بین فاصله اطمینان و آزمون‌ها، طبیعی است که انتظار داشته باشیم فواصل اطمینان استوار ناپارامتری که در بخش قبلی معرفی شد، به طور خودکار **آزمون‌های ناپارامتری** با ویژگی‌های ناپارامتری خوبی را ایجاد کنند.

هوبر (۱۹۶۵)، مفهوم آزمون ε- استوار در سطح α ارائه کرده است (این مطالب در [۱۸] جستجو می‌شود).

تعریف ۳ (سطح استواری) فرض کنید F یک توزیع پیوسته ثابت با میانه‌ی یکتای $m_\circ$ باشد. یک **آزمون غیرتصادفی شده،** $\varphi_{m_\circ}$، آزمون ε- استوار در سطح α (برای $H_\circ$ در مقابل H_1) در F است اگر

$$\sup_{G\in \Im_\varepsilon(F)} P_G\{\varphi_{m_\circ}(\mathsf{X}_n)=۱\}=\alpha$$

این ویژگی ارزش آزمون را در کل همسایگی $\Im_\varepsilon(F)$ نشان می‌دهد. یعنی، احتمال رد $H_\circ$ کمتر یا مساوی α است نه فقط در F بلکه در هر G متعلق به $\Im_\varepsilon(F)$.

تعریف ۴ (سطح استواری ناپارامتری) آزمون غیرتصادفی شده، $\varphi_{m_\circ}$، آزمون ناپارامتری ε- استوار در سطح α است (برای فرض $H_\circ$ در مقابل H_1) اگر $\varphi_{m_\circ}$، ε- استوار در سطح α در $\Im$، برای تمام F های پیوسته با میانه‌ی یکتای $m_\circ$ باشد.

۱–۲–۱–۳ *آزمون ε- استوار ناپارامتری دقیق*

بی‌شک می‌توان گفت که تعاریف ۱ و ۲ برای یک خانواده از آزمون‌ها پایه‌ریزی می‌شود اگر و فقط اگر تعاریف ۳ و ۴ برای دنباله‌ی خاصی از فواصل پایه‌ریزی شود. به‌ویژه، آزمون علامت ε- استوار $\varphi_{m_\circ}$ از سطح α که می‌تواند از فاصله ε- استوار ناپارامتری $I_\alpha(\mathsf{X}_n)$ ناشی شود:

$$\varphi_{m_\circ}(\mathsf{X}_n)=\begin{cases}۱ & m_\circ\notin I_\alpha(\mathsf{X}_n)\\ ۰ & m_\circ\in I_\alpha(\mathsf{X}_n)\end{cases}$$

و یا

$$\phi_{m_\circ}(\mathsf{X}_n)=\begin{cases}1 & T_{n,m_\circ}(\mathsf{X}_n)\le k \quad or \quad T_{n,m_\circ}(\mathsf{X}_n)\ge n-k\\ \circ & k<T_{n,m_\circ}(\mathsf{X}_n)<n-k\end{cases} \qquad (۱۳-۱)$$

که در آن $T_{n,m}(\mathsf{X}_n)$ در (۱-۸) داده شده است و $\alpha^*(n,k,\varepsilon)=\alpha$ می‌باشد.

۱-۲-۱-۴ *تحمل آلودگی آزمون*

در بعضی موارد یک آزمون ممکن است به دلیل وجود یک کسر کوچکی از آلودگی در داده‌ها معنی‌دار شود. تا چه حد ممکن است این اتفاق رخ دهد؟ معناداری آزمون از یک پیام قوی‌تر ناشی می‌شود البته اگر بتوانیم امکان اینکه نتایج، دلیلی بر آلودگی داده‌ها هستند را رد کنیم. این، منجر به تعریف زیر می‌شود.

تعریف ۵ (تحمل آلودگی) یک خانواده از آزمون‌های $\varphi_{m_\circ,\varepsilon}$ برای $H_\circ: m=m_\circ$ در مقابل $H_1: m\neq m_\circ$ و $\circ\le\varepsilon<\circ/۵$، را در نظر می‌گیریم، به طوری که i) $\varphi_{m_\circ,\varepsilon}$ آزمون ε- استوار در سطح α است و ii) از $\varepsilon_1<\varepsilon_2$ می‌توان نتیجه گرفت که $\varphi_{m_\circ,\varepsilon_1}(\mathsf{X}_n)\ge\varphi_{m_\circ,\varepsilon_2}(\mathsf{X}_n)$. یک نمونه‌ی X_n داده شده، به طوری که $\varphi_{m_\circ,\circ}(\mathsf{X}_n)=1$ است، تحمل آلودگی برای سطح معناداری α در X_n [که به وسیله‌ی $\tau_\alpha=\tau_\alpha(\mathsf{X}_n)$ نشان داده می‌شود] به صورت زیر تعریف شده است:

$$\tau_\alpha(\mathsf{X}_n)=\sup\{\varepsilon:\varphi_{m_\circ,\varepsilon}(\mathsf{X}_n)=1\}.$$

به عبارت دیگر تحمل آلودگی در سطح معناداری α، ماکسیمم سطح ε آلودگی است به طوری که آزمون ε- استوار در سطح α هنوز فرض صفر را رد می‌کند. بنابراین، اگر بر این باور باشیم که کسری از آلودگی در داده‌ها کوچکتر از τ_α است، مناسب است که فرض صفر رد شود، حتی اگر اندازه آلودگی دقیق را ندانیم. در نتیجه، τ_α بزرگ (با αی کوچک) می‌تواند به عنوان اختلاف آشکار با فرض صفر در نظر گرفته شود.

اکنون خانواده آزمون‌های علامت ε- استوار که در (۱−۱۳) داده شده، در نظر گرفته می‌شود. بنابراین مقدار $\tau_\alpha(\mathsf{X}_n)$ در معادله زیر صدق می‌کند

$$\alpha^*\{n\ ,\ r_n(\mathsf{X}_n)\ ,\ \tau_\alpha\}=\alpha \qquad (۱۴-۱)$$

که در آن $r_n(\mathsf{X}_n)=\min\{T_{n,m_\circ}(\mathsf{X}_n),\ n-T_{n,m_\circ}(\mathsf{X}_n)\}$ است. توجه کنید که معادله‌ی (۱−۱۴) یک جواب دارد اگر و فقط اگر $\alpha^*\{\ n\ ,\ r_n(\mathsf{X}_n)\ ,\ \circ\ \}<\alpha$ باشد، یعنی، اگر و فقط اگر فرض صفر تحت فرض یک کسر صفر از آلودگی رد شده باشد (داده‌های کامل). اگر این شرط برقرار نباشد، فرض $H_\circ$ را رد نخواهیم کرد حتی اگر آزمون علامت کلاسیک مورد استفاده قرار بگیرد.

۱−۲−۲ *استواری طول و توان*

تعریف‌های ۱ و ۲ درست بودن سطح پوشش را در فاصله تضمین می‌کند. با این وجود، فواصل اطمینان استوار نه تنها باید سطح درستی داشته باشند بلکه باید همچنین تحت آلودگی حاوی اطلاعات مفید باشند. تعریف ۳ به نیاز استواری در عبارت‌های مفهومی ماکسیمم طول مجانبی فاصله که در زیر معرفی شده رسمیت می‌دهد. در ادامه بحث باید بین طرح آلودگی به اندازه‌ی ε که در ساخت فاصله‌ی اطمینان مورد استفاده قرار می‌گیرد (همچنان که در تعریف ۱ صدق می‌کند) و اندازه‌ی آلودگی واقعی که به وسیله‌ی δ نشان داده شده تشخیص دهیم.

با دادن یک دنباله از فواصل $I_n=[a_n(\mathsf{X}_n)\ ,\ b_n(\mathsf{X}_n))$، ماکسیمم طول مجانبی تحت آلودگی به اندازه‌ی δ در F در نظر گرفته می‌شود:

$$L\{I_n,F,\delta\}=\sup\nolimits_{G\in\Im_\delta(F)}\lim\nolimits_n\sup(b_n(\mathsf{X}_n)-a_n(\mathsf{X}_n)) \qquad (۱۵-۱)$$

توجه کنید که اگر طول فاصله پایا مکان باشد، بنابراین تعریف بالا درست است. نکته‌ی قابل درک از عبارت " حاوی اطلاعات مفید بودن تحت آلودگی به اندازه‌ی δ " از تعریفی که در ادامه می‌آید

گرفته شده است. توجه کنید که تعریف‌مان از طول نقطه فروریزش، فاصله‌ی اطمینان گرفته شده از نقطه فروریزش برآورد نقطه‌ای همپل[1] (۱۹۷۱) است.

تعریف ۶ (استواری طول) دنباله‌ی فواصل $I_n = [a_n(\mathsf{X}_n)\ ,\ b_n(\mathsf{X}_n))$، $n \ge n_\circ$، طول δ- استوار در F دارد اگر $L\{I_n\ ,\ F\ ,\ \delta\} < \infty$. طول متناظر نقطه‌ی فروریزش در F به وسیله

$$\delta^*\{I_n, F\} = \sup\{\delta : L\{I_n, F, \delta\} < \infty\}$$

تعریف شده است.

۱–۲–۲–۱ *استواری توان آزمون*

در مورد فواصل اطمینان، باید بین طرح ε آلودگی که در ساخت آزمون مورد استفاده قرار می‌گیرد و آلودگی واقعی δ، تشخیص دهیم. تعریف بعدی، به مفهوم رفتار استواری توان آزمون تحت آلودگی به اندازه‌ی δ رسمیت می‌دهد.

تعریف ۷ (استواری توان) فرض کنید F یک توزیع ثابت پیوسته باشد طوری که $m = m_\circ$ و $F_\lambda(X) = F(X - \lambda)$. یک دنباله از آزمون‌های غیر تصادفی شده‌ی $\{\varphi_{n,m_\circ}\}$، $n \ge n_\circ$، توان δ- استوار در F (برای $H_\circ$ در مقابل H_1) دارد اگر kای وجود داشته باشد به طوری که:

$$\inf_{G\in \Im_\delta(F_\lambda)} \lim_{n\to\infty} P_G\{\varphi_{n,m_\circ}(\mathsf{X}_n) = ۱\} = ۱ \qquad |\lambda| > K \qquad (۱۶-۱).$$

این ویژگی، سازگاری دنباله آزمون‌های غیرتصادفی شده‌ی $\{\varphi_{n,m_\circ}\}$، به طور یکنواخت در سراسر همسایگی $\Im_\varepsilon(F_\lambda)$، که در آن $\lambda = m - m_\circ$ و به اندازه‌ی کافی بزرگ است را نشان می‌دهد. تعریف ۷ در ادامه، تحت آلودگی به اندازه‌ی δ، اندازه‌ی مجانبی استواری توان دنباله‌ی آزمون $\{\varphi_{n,m_\circ}\}$ را پیشنهاد می‌کند.

[1] Hampel

تعریف ۸ (فاصله توان) فرض کنید F یک توزیع ثابت پیوسته باشد که $m = m_{\circ}$. فاصله‌ی δ- سازگار یک دنباله از آزمون‌های $\varphi_{n,m_{\circ}}$، $n \geq n_{\circ}$، در $\Im$ به وسیله $K\{\varphi_{n,m_{\circ}}, F, \delta\}$ نشان داده می‌شود و اینفیمم مجموعه مقادیر kای است که در (۱–۱۶) معرفی شد.

مفهوم نقطه فروریزش اولین بار توسط یلویساکر[1] (۱۹۷۷) و رایدر[2] (۱۹۸۲)، بیان شد. سپس نقطه فروریزش رتبه‌ای و آزمون‌های M تعریف و محاسبه شدند. تعریف ۸ تقریباً به مفهوم توان نقطه فروریزش آزمونی که به وسیله او و سیمپسون[3] و پورتنوی[4] (۱۹۹۰) معرفی شد، وابسته است. در حقیقت، برای $m \neq m_{\circ}$ داده شده، توان نقطه فروریزش در m مقدار δ است که $\left| m - m_{\circ} \right| = K\{(\varphi_{n,m_{\circ}}), F, \delta\}$.

مفهوم جدیدی از نقطه فروریزش برای آزمونی که به مقدار خاص m بستگی ندارد و مستقیماً به تعریف طول نقطه فروریزش فاصله اطمینانی که در این بخش داده شد اختصاص یافته است، به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۹ (توان فروریزش) فرض کنید F یک توزیع ثابت باشد به طوری که $m_{\circ} = F^{-1}(۱/۲)$ برقرار باشد. توان نقطه فروریزش δ^{*} دنباله آزمون‌های غیرتصادفی شده $\varphi_{n,m_{\circ}}$، $n \geq n_{\circ}$، در F، سوپریمم مجموعه مقادیر δ برای دنباله آزمون‌های δ- استوار است. (مطالب بخش ۱–۲ را می‌توان در [۳۰] ببینید).

---

[1] Ylvisaker
[2] Rieder
[3] Simpson
[4] Portnoy

فصل دوم

مقایسه‌ی میانه و میانگین‌های پیراسته‌ی داده‌ها

در این فصل چند گروه از برآوردگرها ارائه می‌شوند. این گونه برآوردگرها عمدتاً ساختاری برگرفته از آماره‌های ترتیبی دارند که در فصل سوم و چهارم از آنها استفاده خواهد شد.

۲–۱ برآوردگر ام[1]

در برخی محاسبات آماری، جهت یافتن برآورد پارامتر مکانی θ ممکن است با استفاده از مشاهدات مجبور به حل معادله $\sum_{i=1}^{n}\Psi(x_i-\hat{\theta})=0$ باشیم. این امر در بسیاری از مسائل یافتن برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی صحت دارد. برای مثال وقتی $\Psi(x)=x^2$ باشد برآوردگر θ، میانگین مشاهدات و وقتی $\Psi(x)=|x|$ باشد برآوردگر θ، میانه مشاهدات می‌شود. هرگاه تابع $\Psi(x)$ به صورت زیر باشد

$$\Psi(x)=\begin{cases} x & |x|<c \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

[1] M-estimator

آن را به عنوان پیرایش متریک می‌شناسیم که ویژگی مهم آن تأثیر نداشتن داده‌های پرت خیلی بزرگ است. و برای تابع

$$\Psi(x)=\begin{cases}-c & x<-c\\ x & |x|<c\\ c & x>0\end{cases}$$

تابع $\Psi(x)$، به عنوان متریک وینزوریدن[1] شناخته شده است.

۲–۲ برآوردگر ال[2]

یکی از آماره‌های استوار، برآوردگر ال است که به صورت ترکیب خطی از آماره‌های ترتیبی تعریف می‌شود. میانه یک مثال ساده‌ای از برآوردگر ال است. مثال‌های دیگری از قبیل میانگین پیراسته و میانگین وینزوریده را می‌توان نام برد. (برگرفته از منبع [۶۶])

اگر $T=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j X_{j:n}$ یک آماره ال کلی باشد به طوری که $\lambda_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1$ با در نظر گرفتن حالت خاص آن، وقتی که $j=1,2,\cdots,n$, $\lambda_j=\frac{1}{n}$، داریم: $\overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_{j:n}$. بر طبق قضیه حد مرکزی که چگونگی توزیع $\overline{X}_n$ را بیان می‌کند داریم:

$$Z_n=\frac{\overline{X}_n-a_n}{b_n}$$

که در آن $a_n=E(\overline{X}_n)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}E(X_{j:n})$ و $b_n=\sqrt{Var(\overline{X}_n)}=\sqrt{Var(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_{j:n})}$.

در این صورت وقتی n به بینهایت میل می‌کند توزیع Z_n به توزیع نرمال استاندارد میل می‌کند و $\overline{X}_n$ دارای توزیع نرمال با میانگین $E(\overline{X}_n)$ و واریانس $Var(\overline{X}_n)$ می‌باشد.

---
[1] Winsorization
[2] L-estimator