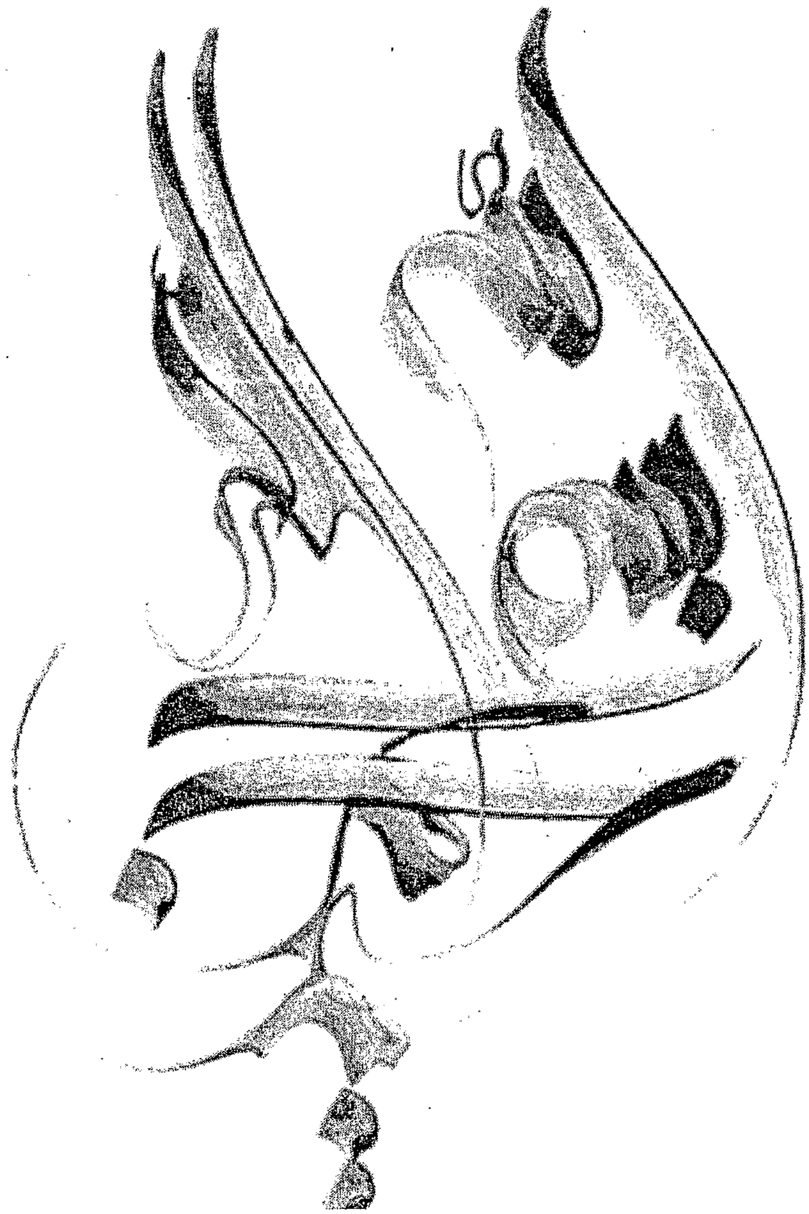


دانشکده علوم

پایان‌نامه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض (آنالیز)

چندجمله ایهای رودین – شاپی رو

توسط:

سامره معتمدی محمدآبادی

استاد راهنما:

دکتر محسن تقوی

تیر ماه ۱۳۸۷

به نام خدا

چند جمله ایهای رودین - شاپیرو

به وسیله‌ی:

سامره معتمدی محمد آبادی

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی
از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته‌ی:

ریاضی محض (آنالیز)

از دانشگاه شیراز

شیراز

جمهوری اسلامی ایران

ارزیابی شده توسط کمیته پایان نامه با درجه:--عالی--

دکتر محسن تقوی، دانشیار بخش ریاضی (رئیس کمیته)...

دکتر بهمن یوسفی، استادی بخش ریاضی...

دکتر کاظم مصالحه، استادیار بخش ریاضی...

تیرماه ۱۳۸۷

تقدیم به

همسر عزیز

مادر مهربان و پدر بزرگوارم

که تمام هستی و تلاشم را مدیون وجودشان هستم، در تار و پود زندگیم جای داشته و بهانه‌های زیبای زندگیم هستند

خواهران نازنینم

و

تمام کسانی که دوستشان دارم و وجودشان به من گرمی می‌بخشد.

سپاسگزاری

سپاس و ثنا یگانه خالقی را که ذرات وجودم از جوشش مهرش جان می‌گیرد، او که یگانه‌ترین در عظمت، تنهاترین در اوج و پاک‌ترین در وجود است.

بر خود لازم می‌دانم از سروران ارجمند؛ جناب آقای دکتر محسن تقوی ـ استاد راهنما ـ و جناب آقایان دکتر بهمن یوسفی و دکتر کاظم مصالحه ـ اساتید مشاور ـ که در به انجام رساندن این رساله مرا یاری نمودند، کمال قدردانی را بنمایم.

همچنین سپاسی بی‌شائبه دارم از خانواده مهربانم، که همواره مشوق اصلی من در تمام دوران تحصیل بوده‌اند. موفقیت خویش را قطعاً مرهون زحمات بی‌دریغ و حمایتهای عاشقانه ایشان بوده و هستم.

چکیده

چندجمله ایهای رودین- شاپی رو

توسط

سامره معتمدی محمدآبادی

در این مقاله، می خواهیم به بررسی و خواص و نتایجی اساسی چندجمله ایهای رودین- شاپی رو بپردازیم، که این مطلب در پنج فصل ارائه شده است.

چند جمله ایهای رودین-شاپی رو به طور بازگشتی به صورت زیر تعریف می شوند:

$$P_{n+1}(\xi) = P_n(\xi) + e^{i2\pi 2^n \xi} Q_n(\xi) \quad , \quad P_0 = 1$$

$$Q_{n+1}(\xi) = P_n(\xi) - e^{i2\pi 2^n \xi} Q_n(\xi) \quad , \quad Q_0 = 1$$

برای $\xi \in [0,1)$

در ابتدا مقدمه و تاریخچه ای بر چندجمله ایهای رودین- شاپی رو بیان می شود. در فصل اول تعاریف و قضایای مقدماتی برای این چندجمله ایها را که در فصلهای بعد، مورد استفاده قرار می گیرند، گردآوری شده است. در فصل دوم به جستجو و بررسی چندجمله ایهای هموار می پردازیم، جائیکه چندجمله ایهای رودین- شاپی رو جزء چندجمله ایهای تقریباً- هموار هستند. فصل سوم شامل تعریف چندجمله ایهای رودین- شاپی روی کلاسیک و خواصی از آن است، و همچنین شامل دو لم از این چندجمله ایها است. فصل چهارم دو نتیجه اصلی و مهم از چندجمله ایهای رودین- شاپی رو ذکر شده است، اینکه $\left|(|P_n|^2\hat{)}(k_n)\right|$ دارای یک کران بالا و یک کران پایین است. سرانجام فصل آخر تعریفی از تبدیل رودین- شاپی رو را شامل است که همان ماتریسی از ضرایب این چندجمله ایهاست.

فهرست مطالب

مقدمه:

تبدیل رودین- شاپی رو یک تبـدیل خطی است که از چندجمله ایهای رودین- شاپی رو استخراج شده است. این تبدیل دارای این ویژگی است که یک پایهٔ طیـف گـسترده بـرای R^N تشکیل می دهد، یعنی بردارهای پایه دنباله هایی با طیـف تـوانی تقریبـاً همـوار هـستند. ایـن تبدیل همچنین متعامد و هادامارد است و می تواند بصورت متقارن سـاخته شـود. وجـود یـک الگوریتم از مرتبهٔ $O(N \log N)$ برای این تبدیل که شبیه تبدیل بسته موج کوچک هار اسـت، باعث شده که این تبدیل از دیدگاه کاربردی جالب باشد.

تبدیل رودین- شاپی رو بـصورت یـک سـری از ضـرایب دنبالـه هـا از یـک مجموعـه از چنـدجمله ایهای مثلثاتی، که توسط شاپی رو و رودین در ۱۹۵۰ کـشف شـد، تـصور مـی شـد. بنابراین تبدیل فوق با ویژگیهایش موجود بوده است. دلیل آن، این بود که این تبدیل یک سری ویژگیهای خوب دارد که در این میان خاصیت طیف گسترده برای اعضاء پایه قابل توجه تـرین آنهاست.

این تبدیل فایده طراحی سیگنالها در سخت افزارهای کـم قیمـت (کـم ارزش) را نـشان مـی دهد، نه فقط وجود الگوریتم قوی عددی و سریع را. چندجمله ایهای رودین- شاپی رو بـه عنوان نوعی از چندجمله ایهای هموار دسته بندی شده اند. این به آن حقیقت باز می گردد که دامنه چندجمـله ایـهای مختلـط روی دایـرهٔ واحـد محـدود بـه یـک زمـان ثـابت، انـرژی چنـدجمـله ایهاست. مثالهای زیادی از چنـدجمـله ایهای همـوار که فقـط چندجملـه ایــهای رودین- شاپی رو هستند، وجود دارد و تاریخچه توسعه در زمینهٔ چندجمله ایهای هموار بـسیار جالب است.

بخش نه چندان کمی به این حقیقت برمی گردد که تعدادی از سؤالات ظـاهراً سـاده در این زمینه برای چندین دهه بی جواب باقی مانده است.

چندجمله ایهای هموار همچنین از نظر کاربردی جالب هستند. مؤلف نـشان داده اسـت که تبدیل طیف گسترده در تلاش برای افزایش قدرت حـسگرها نقـش ایفـا مـی کنـد. ببینیـد مراجع [۲] و [۳] را. در این راستا هدف از این نمایش، نشان دادن پیش زمینه های ریاضـی از ویژگیهای قابل استفاده در کاربردهای حقیقی است.

تاریخچه ای از تبدیل رودین- شاپی رو:

تبدیل رودین- شاپی رو توسط شاپی رو و رودین بصورت یک سری از ضرایب دنباله ها از یک مجموعه از چندجمله ایهای مثلثاتی در سال ۱۹۵۰ کشف شد.

تبدیل فوق یک تبدیل خطی است که از چندجمله ایهای رودین- شاپی رو در سال ۱۹۵۱ استخراج شده است.

تاریخ ساخت چندجمله ایهای هموار به شروع قرن بیستم باز می گردد. البته در آن زمان طراحی سیگنالها برای استفاده در سیستمهای انتقال رقمی، هدف نبود. انگیزه، بیشتر استفاده ریاضی از سریهای مثلثاتی مشخص، که تمام شرایط خوب را داشته باشند، بود. یکی از مثالهای اخیر از چندجمله ایهای هموار توسط هاردی و لیتهولد در ۱۹۱۶ ارائه شد. آنها سریهای

$$\sum e^{ikn\log n}\frac{e^{in\xi}}{n^{\frac{1}{2}+i\alpha}} \qquad , \quad k,\alpha \neq 0$$

را به عنوان بخشی از یک مطالعه که تتا- تابع بیضوی نامیده می شوند، ارائه کردند.

فصل اول

تعاریف و قضایا

تعریف ۱-۱: یک سری مثلثاتی، هر سری که به فرم زیر باشد، است:

$$i) \qquad \frac{a_0}{2}+\sum_{K=1}^{\infty}(a_k\cos(kt)+b_k\sin(kt))$$

جائیکه $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ و $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ دنباله هایی از اعداد مختلط هستند و $t\in R$.

nامین مجموع جزئی از سری (i)تابع S_n است که بصورت زیر روی R تعریف می شود:

$$ii) \qquad S_n(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{K=1}^{n}(a_k\cos(kt)+b_k\sin(kt))$$

فرمول های اویلر برای همه $z\in C$ بصورت زیر است:

$$(1) \qquad e^{iz}=\exp(iz)=\cos z+i\sin z$$

$$(2) \qquad e^{-iz}=\exp(-iz)=\cos z-i\sin z$$

$$(3) \qquad \sin z=\frac{\exp(iz)-\exp(-iz)}{2i}=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

$$(4) \qquad \cos z=\frac{\exp(iz)+\exp(-iz)}{2}=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

لذا از فرمول های اویلر، ما همچنین داریم:

$$(ii)' \qquad S_n(t)=\sum_{k=-n}^{n}C_k e^{ikt}$$

جائیکه اگر ما $b_0=0$ بنویسیم، خواهیم داشت:

$$(iii) \qquad C_k=(a_k-ib_k)/2 \qquad ,C_{-k}=(a_k+ib_k)/2$$
$$a_k=C_k+C_{-k} \qquad ,b_k=i(C_k-C_{-k}) \qquad for \quad k\geq 0$$

ما همچنین $S_0(t)=C_0=\frac{a_0}{2}$ را بصورت فوق می نویسیم. لذا ما (i) را می توانیم بصورت زیر بنویسیم:

$$(i)' \qquad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{ikt} \qquad ,t\in R$$

ما S_n را n امین مجموع جزئی این سری می نامیم.

هر تابع به فرم (ii) یا $(ii)'$ یک چندجمله ای مثلثاتی نامیده می شود.

پس یک چندجمله ای مثلثاتی، مجموعی است متناهی به شکل:

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{K=1}^{n}(a_k\cos(kt)+b_k\sin(kt))$$

که در آن $a_n,\ldots,a_1,a_0$ و $b_n,\ldots,b_1$ اعداد مختلطی هستند. رابطه فوق را می توان به حرمت اتحادهای اویلر به شکل زیر نوشت:

$$f(t)=\sum_{k=-n}^{n} C_k e^{ikt}$$

که همان $(ii)'$ است.

هر چندجمله ای مثلثاتی دور تناوب 2π دارد .

برای یک تابع $f:R\to C$ گوییم f دارای دوره تناوب 2π است هرگاه:

$$f(t+2\pi)=f(t) \qquad \forall \ \ t\in R$$

تعریف ۲-۱: فرض کنید $f:T\to C$ یک تابع با دوره تناوب 2π باشد. برای یک عدد حقیقی مثبت p ، ما $f\in L_P(T)$ می نویسیم، اگر f اندازه پذیر لبگ باشد و دارای خاصیت زیر باشد:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^p\,dt<\infty$$

در این حالت، ما $L_P(T)$ - نرم از f را به فرم ذیل بیان می کنیم:

$$\|f\|_p=\|f\|_{L_p(T)}=\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}},\ \ 1\le p<\infty$$

که Tدایره یکه در صفحه مختلط است؛ یعنی مجموعه تمام اعداد مختلطی که قدرمطلق آنها یک است.

لذا داریم:

$$L_p(T)=\{measurable \quad f:T\to C \mid \ \|f\|_p<\infty\}$$

اگر f یک تابع پیوسته روی R باشد (و با دوره تناوب 2π)، ما می نویسیم $f\in C(T)$، جائیکه $C(T)$ بصورت زیر تعریف می شود:

$$C(T)=\{f:T\to C \mid \quad f \quad is \quad continuous\}$$

(یعنی کلیه توابع پیوسته با دوره تناوب 2π روی R)

لذا ما نرم یکنواخت از f را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$\|f\|_u=\|f\|_{C(T)}=\sup_{t\in R}|f(t)|=\sup_{-\pi\le t\le\pi}|f(t)|$$

ما مجموعه ای از تمام چندجمله ایهای مثلثاتی را با $T_p(T)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۳-۱: فرض کنید $f\in L_1(T)$ باشد، تابع $\hat{f}:Z\to C$ را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$(i)'' \qquad \hat{f}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-\text{int}}dt.$$

سری مثلثاتی

$$(ii)'' \qquad S(f,t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{f}(k)e^{ikt}$$

نیز سری فوریه از f نامیده می شود و برای هر kصحیح، عدد مختلط $\hat{f}(k)$ ، k امین ضریب فوریه از f نامیده می شود. ما nامین مجموع جزئی از (ii) را برای $n\ge 0$ بوسیله

$$(iii)' \qquad S_n(f,t)=\sum_{k=-n}^{n}\hat{f}(k)e^{ikt}$$

نمایش می دهیم.

اگر از (iii) استفاده کنیم، می نویسیم:

$$(iv) \qquad a_n=\hat{f}(n)+\hat{f}(-n) \quad ,b_n=i(\hat{f}(n)-\hat{f}(-n)) \quad ,for \quad n\ge 0$$

و آنگاه داریم:

$$(v)\qquad a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{int}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(e^{-int}+e^{int})dt\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{e^{-int}+e^{int}}{2}\right)dt\right] = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt$$

و به طریق مشابه:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt.$$

با این نماد، ما داریم که:

$$(vi)\qquad S_n(f,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt))$$

$$(vii)\qquad S_\infty(f,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt))$$

در این هنگام ما خواهیم داشت :

$$(viii)\qquad f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ikt}$$

که $C_k = \hat{f}(k)$ برای همه kهای صحیح.

که ~ یکتایی a_0 و a_k و b_k را نشان می دهد.

در این حالت a_k و b_k فقط بصورت روابط (v) و (iv) هستند.

ما مجموعه تمام اعداد صحیح (مثبت، صفر و منفی) را با Z نشان داده و قرار می دهیم:

$$u_n(t) = e^{int} \quad (n \in Z)$$

اگر حاصلضرب داخلی در $L^2(T)$ را با

$$(f,g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$$

تعریف کنیم، محاسبات نشان می دهند که:

$$(u_n,u_m)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u_n(t)\overline{u_m(t)}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\text{int}}\overline{e^{imt}}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\text{int}}e^{-imt}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(n-m)t}dt=\begin{cases}1 & ,n=m\\ 0 & ,n\neq m\end{cases}$$

$if \quad n\neq m$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(n-m)t}dt=\frac{1}{i(n-m)}e^{i(n-m)t}\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$=\frac{1}{i(n-m)}(e^{i(n-m)\pi}-e^{-i(n-m)\pi})$$

$$=\frac{1}{i(n-m)}[\cos(n-m)\pi+i\sin(n-m)\pi-\cos(n-m)\pi+i\sin(n-m)\pi]$$

$$=\frac{2i\sin(n-m)\pi}{i(n-m)}=0 \qquad (n,m\in Z)$$

لذا $\{u_n:n\in Z\}$ یک مجموعه متعامد یکه در $L^2(T)$ است که معمولاً دستگاه مثلثاتی نامیده می شود. پس یک دستگاه مثلثاتی مجموعه $\{e^{\text{int}}\mid n\in Z\}$ است.

حال توضیحات بیشتری در مورد سریهای فوریه:

توابع $1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\ldots$ متقابلاً بر هم عمودند و البته در فاصله $[-\pi,\pi]$ به طور خطی مستقل از یکدیگرند. بنابراین، ما یک سری فرمولی که $f(x)$ را نمایش دهد، تشکیل می دهیم:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx) \qquad (*)$$

که نماد ~ ارتباط b_k,a_k,a_0 به f را به طریق یکتا نشان می دهد. سری ممکن است همگرا باشد یا نباشد. قرار دادن ضریب $\frac{a_0}{2}$ به جای a_0 به خاطر تناسب در فرمول می باشد.

فرض کنید f یک تابع انتگرال پذیر ریمن باشد که در فاصله $[-\pi,\pi]$ تعریف شده است، همانطور که گفتیم مجموع جزئی n ام را به صورت

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx))$$

تعریف می کنیم که قرار است در فاصله $[-\pi,\pi]$ ، $f(x)$ را نشان دهد.

ضرایب b_k, a_k, a_0 را آنگونه جستجو می کنیم که $S_n(x)$ بهترین تقریب $f(x)$ در جهت حداقل مربعات باشد، یعنی برای کمینه کردن انتگرال:

$$I(a_0, a_k, b_k) = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx$$

تلاش می کنیم. شرط لازم برای b_k, a_k, a_0 ، برای اینکه I مینیمم گردد، آن است که مشتقات جزئی مرتبه اول I نسبت به ضرایب b_k, a_k, a_0 صفر گردند . برای این کار داریم:

$$I(a_0, a_k, b_k) = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx - \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx]^2 dx$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_0} = \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{1}{2} \times 2[f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{j=1}^{n} a_j \cos jx - \sum_{j=1}^{n} b_j \sin jx]dx$$

$$= -\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{j=1}^{n} a_j \cos jx - \sum_{j=1}^{n} b_j \sin jx]dx$$

بطریق مشابه:

$$\frac{\partial I}{\partial a_k} = \int_{-\pi}^{\pi} -2[f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{j=1}^{n} a_j \cos jx - \sum_{j=1}^{n} b_j \sin jx]\cos kx dx$$

$$\frac{\partial I}{\partial b_k} = \int_{-\pi}^{\pi} -2[f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{j=1}^{n} a_j \cos jx - \sum_{j=1}^{n} b_j \sin jx]\sin kx dx$$

با استفاده از روابط تعامدی توابع مثلثاتی برای هر m و n مثبت و صحیح:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx dx = 0, \forall m, n \in z^+$$

$$\Rightarrow \frac{\partial I}{\partial a_0} = \pi a_0 - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_k} = 2\pi a_k - 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx$$

$$\frac{\partial I}{\partial b_k} = 2\pi b_k - 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \quad ,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx \quad ,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxd \quad .$$

که ضرایب فوق را ضرایب فوریه تابع $f(x)$ گویند و سری $(*)$ را سری فوریه نظیر تابع $f(x)$ گویند. از آنجا که:

$$\cos kx=\frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2}$$
$$\sin kx=\frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i}$$

با جایگذاری شکل مختلط سری فوریه به شکل زیر است:

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_k e^{ikx} \qquad ,c_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-ikx}dx$$

که در واقع: $c_0=\frac{a_0}{2},c_k=\frac{a_k-ib_k}{2},c_{-k}=\frac{a_k+ib_k}{2}$ می باشد.

اگر به جای فاصله $[-\pi,\pi]$ با فاصله $[a,b]$ کار کنیم و متغیر جدید t را با تبدیل $x=\frac{1}{2}(a+b)+\frac{b-a}{2\pi}t$ معرفی کنیم، آنگاه فاصله $a\le x\le b$ تبدیل به فاصله $-\pi\le t\le\pi$ می شود.

اگر $a=-L,b=L$ باشد، آنگاه $t=\frac{\pi x}{L}$ می شود. لذا:

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos\frac{k\pi x}{L}+b_k\sin\frac{k\pi x}{L})$$

طبق کارهایی که قبلاً انجام دادیم:

$$a_k=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{k\pi(2x-b-a)}{b-a}dx \quad , \quad k=0,1,\dots$$
$$b_k=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\frac{k\pi(2x-b-a)}{b-a}dx \quad , \quad k=1,2,\dots$$
$$\Rightarrow a_k=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{k\pi x}{L}dx \quad ,$$
$$b_k=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{k\pi x}{L}dx$$

اگر f یک تابع زوج با دوره تناوب $2L$ باشد، آنگاه معادله فوق به سادگی به شکل زیر می شود:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{k\pi x}{L}\quad,$$

$$a_k=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{k\pi x}{L}dx\quad,\quad k=0,1,2,\ldots$$

$$(\therefore\quad b_k=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{k\pi x}{L}dx$$

$$=\frac{1}{L}\left(\int_{-L}^{0}f(x)\sin\frac{k\pi x}{L}dx+\int_0^L f(x)\sin\frac{k\pi x}{L}dx\right)$$

$$=\frac{1}{L}\left(\int_0^L f(-x)\sin\frac{k\pi(-x)}{L}dx+\int_0^L f(x)\sin\frac{k\pi x}{L}dx\right)=0)$$

بطریق مشابه اگر f یک تابع فرد با دوره تناوب $2L$ باشد، آنگاه:

$$a_k=0\Rightarrow f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin\frac{k\pi x}{L}\quad,$$

$$b_k=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{k\pi x}{L}dx\quad,\quad k=1,2,\ldots$$

تبدیل فوریه و انتگرال فوریه:

دیدیم که سری فوریه تابع $f(x)$ در فاصله $[-L,L]$ بصورت:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{L}+b_k\sin\frac{k\pi x}{L}\right)$$

می باشد که:

$$a_k=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(t)\cos\frac{k\pi t}{L}dt\quad,\quad k=0,1,2,\ldots$$

$$b_k=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(t)\sin\frac{k\pi t}{L}dt\quad,\quad k=1,2,\ldots$$

حال اگر ضرایب را در سری فوریه $f(x)$ قرار دهیم، داریم:

$$f(x)=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(t)dt+\frac{1}{L}\sum_{k=1}^{\infty}[\int_{-L}^{L}f(t)\cos\frac{k\pi t}{L}\cos\frac{k\pi x}{L}dt]$$
$$+\frac{1}{L}\sum_{k=1}^{\infty}[\int_{-L}^{L}f(t)\sin\frac{k\pi t}{L}\sin\frac{k\pi x}{L}dt]$$
$$=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(t)dt+\frac{1}{L}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-L}^{L}f(t)\cos[\frac{k\pi(t-x)}{L}]dt \quad (**)$$

فرض کنید که $f(x)$ مطلقاً انتگرال پذیر باشد، یعنی $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$ همگرا باشد. وقتی $L\to\infty$ میل کند، آنگاه:

$$\frac{|a_0|}{2}=\frac{1}{2L}\left|\int_{-L}^{L}f(t)dt\right|\leq\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(t)dt$$

به صفر میل می کند، پس اگر x را ثابت نگه داریم، وقتی که L به سمت بینهایت میل می کند، معادله $(**)$ به

$$f(x)=\lim_{L\to\infty}\frac{1}{L}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-L}^{L}f(t)\cos[\frac{k\pi}{L}(t-x)]dt$$

تبدیل می گردد.

حال فرض کنید:

$$\alpha_k=\frac{k\pi}{L} \quad , \quad \Delta\alpha=\alpha_{k+1}-\alpha_k=\frac{(k+1)\pi}{L}-\frac{k\pi}{L}=\frac{1}{L}\pi$$

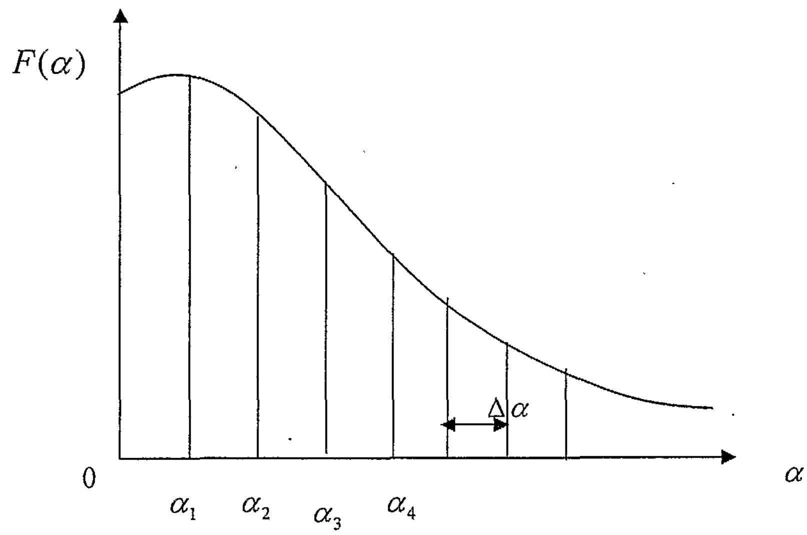
آنگاه $f(x)$ را می توان بصورت:

$$f(x)=\lim_{L\to\infty}\sum F(\alpha_k)\Delta\alpha$$

نوشت، که:

$$F(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-L}^{L}f(t)\cos[\alpha(t-x)]dt$$

اگر $F(\alpha)$ را برحسب α رسم کنیم:



به روشنی میتوانیم ببینیم که مجموع $\sum_{k=1}^{\infty} F(\alpha_k)\Delta\alpha$ تقریباً برابر اسـت بـا مـساحت زیر منحنی $Y = F(\alpha)$. وقتی $L \to \infty$ ، آنگاه $\Delta\alpha \to 0$میل می کنـد و مجمـوع را بـه طـور فرمولی به سوی انتگرال محدود میل می کند. بنابراین داریم:

$$f(x) = \int_0^{\infty} F(\alpha)d\alpha = \int_0^{\infty}[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)dt]d\alpha$$

که رابطهٔ فوق نمایش انتگرال فوریه تابع $f(x)$ است.

انتگرال فوریه را می توان به شکل مختلط نیز نوشت:

$$\cos\alpha(t-x) = \frac{1}{2}(e^{i\alpha(t-x)} + e^{-i\alpha(t-x)})$$

$$\Rightarrow f(x) = \int_0^{\infty}(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{e^{i\alpha(t-x)} + e^{-i\alpha(t-x)}}{2}dt)d\alpha$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\alpha(t-x)}dtd\alpha + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\alpha(t-x)}dtd\alpha$$

اگر در انتگرال دومی متغیر α را به α− تغییر دهیم، داریم:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\alpha(t-x)}dtd\alpha + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\alpha(t-x)}dtd(-\alpha)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\alpha(t-x)}dtd\alpha + \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\alpha(t-x)}dtd\alpha$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\alpha(t-x)}dtd\alpha$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\alpha t}dt]e^{-i\alpha x}d\alpha$$