دانشگاه علامه طباطبایی
دانشکده علوم ریاضی و رایانه

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

آمار ریاضی

عنوان

براورد پارامترهای سامانه صف‌بندی $M/M/۱/۱$ و $M/M/R/N$ با انصراف متقاضی و سرویس‌دهنده‌های نامتجانس

پژوهش‌گر

ایمان محمدی سلیمانی

استاد راهنما

دکتر عبدالرحیم بادامچی‌زاده

استاد مشاور

دکتر نادر نعمت‌الهی

شهریور ۱۳۹۲

بسم الله الرحمن الرحيم

کلیه‌ی حقوق مادی و معنوی اعم از چاپ و تکثیر، نسخه‌برداری، ترجمه، اقتباس و ... از این پایان‌نامه

برای دانشگاه علامه طباطبائی محفوظ است. نقل مطالب با ذکر منبع مانعی ندارد.

تایید پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشدتوسط دانشجو

عنوان پایان‌نامه: براورد پارامترهای سامانه صف‌بندی $M/M/۱/۱$ و $M/M/R/N$با انصراف متقاضی و سرویس‌دهنده‌های نامتجانس

نام دانشجو: ایمان محمدی سلیمانی
شماره‌ی دانشجویی: ۹۰۱۲۵۳۲۱۱۱
استاد راهنما: دکتر عبدالرحیم بادامچی‌زاده

این‌جانب **ایمان محمدی سلیمانی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته‌ی **آمار ریاضی** دانشکده‌ی اقتصاد دانشگاه علامه طباطبایی گواهی می‌نمایم پژوهش‌های ارائه شده در پایان‌نامه با عنوان مذکور توسط شخص این‌جانب انجام شده است و درستی مطالب نگارش یافته مورد تأیید می‌باشد. همچنین گواهی می‌نمایم مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی توسط این‌جانب یا فرد دیگری در هیچ کجا ارائه نشده است و در نگارش متن پایان‌نامه شیوه‌ی نگارش مصوب دانشکده‌ی اقتصاد را به‌طور کامل رعایت نموده‌ام. چنان‌چه در هر زمان خلاف آن‌چه گواهی نموده‌ام مشاهده گردد خود را از آثار حقیقی و حقوقی ناشی از دریافت مدرک کارشناسی ارشد محروم می‌دانم و هیچ‌گونه ادعایی نخواهم داشت.

امضا دانشجو:
شهریور ۱۳۹۲

دانشگاه علامه طباطبایی
دانشکده علوم ریاضی و رایانه

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

براورد پارامترهای سامانه صف‌بندی $M/M/1/1$ و $M/M/R/N$ با انصراف متقاضی و سرویس‌دهنده‌های نامتجانس

پژوهش‌گر: ایمان محمدی سلیمانی

استاد راهنما: دکتر عبدالرحیم بادامچی‌زاده امضاء:

استاد مشاور: دکتر نادر نعمت‌الهی امضاء:

استاد داور: دکتر محمدرضا صالحی‌راد امضاء:

نماینده تحصیلات تکمیلی: دکتر رضا پورطاهری امضاء:

پروردگارا

من به حسن ستایش تو افتتاح سخن می کنم و زبان به ثنای تو می گشایم. بزرگواری تو را مدح می گویم در صورتی که مدح تو را حد و نهایت نیست.

تو را سپاس می گویم که مرا یاری نمودی تا بتوانم در راه علم قدمی هر چند کوچک بردارم.

تا چه قبول افتد و چه در نظر آید.

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

و تقدیم به

همه ی آن هایی که

حقشان بر گردنم است.

سپاس‌گزاری

سپاس خدای را که هر توفیقی در گرو عنایت اوست. اکنون که با یاری او توانسته‌ام تلاشی هر چند ناچیز را در راه کسب دانش به انجام رسانم، بر خود لازم می‌دانم از استاد راهنمای بزرگوارم، جناب آقای دکتر عبدالرحیم بادامچی‌زاده، که به پایان رساندن این تحقیق جز با راهنمایی‌های پدرانه و هدایت‌های بی‌دریغ ایشان میسر نبود، قدردانی نمایم.

از استاد مشاورم جناب آقای دکتر نادر نعمت‌الهی که تذکراتشان باعث غنای پایان‌نامه شد، تشکر می‌نمایم. همچنین از جناب آقای دکتر محمدرضا صالحی‌راد و جناب آقای دکتر رضا پورطاهری که زحمت داوری این اثر را به عهده داشتند سپاس‌گزارم.

در پایان، از خانواده‌ام، به‌ویژه پدر و مادرم که با حمایت‌های خویش، همواره مرا پشتیبانی کرده‌اند نهایت سپاس و قدرشناسی را دارم.

امیدوارم بتوانم از عهده ادای حق این عزیزان برآیم.

شهریور ۱۳۹۲

فهرست مطالب

فهرست مطالب آ

فهرست شکل‌ها ت

۱ تعریف‌ها و مفهوم‌های اولیه ۱

۱.۱ مقدمه ۱

۲.۱ بیان مسئله ۱

۳.۱ پیشینه پژوهش ۲

۴.۱ هدف پژوهش ۳

۵.۱ مشخصه‌های سامانه‌های صف‌بندی ۴

۱.۵.۱ الگوی ورود متقاضیان ۴

۲.۵.۱ الگوی ارایه‌ی سرویس ۴

۳.۵.۱ نظم صف ۵

۴.۵.۱ گنجایش سامانه ۵

۵.۵.۱ تعداد باجه‌های سرویس ۵

۶.۵.۱ مراحل سرویس ۶

۶.۱ نمادگذاری ۶

۷.۱ مفاهیمی از نظریه‌ی براوردیابی نقطه‌ای ۶

۱.۷.۱ روش‌های براوردیابی نقطه‌ای ۷

۸.۱ مروری بر فصل‌ها ۱۳

۲ براورد پارامترهای سامانه صف‌بندی $M/M/۱/۱$ ۱۴

۱.۲ مقدمه ۱۴

۲.۲ معرفی سامانه صف‌بندی $M/M/۱/۱$ ۱۴

۳.۲ معرفی نمادها و احتمال‌ها ۱۵

۴.۲ براورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترها در سامانه صف‌بندی $M/M/۱/۱$ ۱۵

۱.۴.۲ براورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای λ، μ و ρ ۱۵

۲.۴.۲ براورد ماکسیمم درست‌نمایی $p_۰(t)$ و $p_۱(t)$ (با فرض این که در زمان $t = ۰$، سرویس دهنده در حالت بیکاری است) ۱۶

۵.۲ براورد بیزی پارامترها در سامانه صف‌بندی $M/M/۱/۱$ ۱۹

۱.۵.۲ براورد بیزی پارامترهای λ، μ و ρ وقتی که λ و μ مستقل هستند ۱۹

۲.۵.۲ براورد بیزی پارامترهای λ، μ و ρ وقتی که λ و μ مستقل نیستند ۲۳

۶.۲ خلاصه‌ی فصل ۲۹

۳ براورد ماکسیمم درست‌نمایی و فاصله‌های اطمینان سامانه صف‌بندی $M/M/R/N$ با انصراف متقاضی و سرویس دهنده‌های نامتجانس ۳۰

۱.۳ مقدمه ۳۰

۲.۳ معرفی سامانه صف‌بندی $M/M/R/N$ با انصراف متقاضی و سرویس دهنده‌های نامتجانس ۳۱

۱.۲.۳ فرایند ورود ۳۱

۲.۲.۳ فرایند سرویس دهی ۳۲

۳.۲.۳ احتمال‌های اندازه سامانه در حالت پایا ۳۲

۴.۲.۳ متوسط تعداد متقاضیان در سامانه ۳۳

۳.۳ براورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترها در سامانه صف‌بندی $M/M/R/N$ با انصراف متقاضی وسرویس دهنده‌های نامتجانس ۳۳

۱.۳.۳ تابع درست‌نمایی ۳۳

۲.۳.۳ براورد ماکسیمم درست‌نمایی ۳۶

۳.۳.۳ حالت‌های خاص ۳۹

۴.۳ فاصله اطمینان برای ρ، p_0 و $E[N]$ ۴۰
۱.۴.۳ فاصله اطمینان برای ρ ۴۲
۲.۴.۳ فاصله اطمینان برای p_0 . . . . . ۴۳
۳.۴.۳ فاصله اطمینان برای $E[N]$ ۴۴
۵.۳ خلاصه‌ی فصل ۴۴

۴ مثال‌های عددی **۴۵**
۱.۴ مقدمه ۴۵
۲.۴ محاسبه فاصله‌های اطمینان برای ρ، p_0 و $E[N]$ ۴۵
۳.۴ اثر تغییرهای b، N و R روی فاصله‌های اطمینان p_0 و $E[N]$ ۴۷
۱.۳.۴ اثر تغییرهای b، N و R روی فاصله اطمینان p_0 . . . . . ۴۸
۲.۳.۴ اثر تغییرهای b، N و R روی فاصله اطمینان $E[N]$ ۵۰
۴.۴ نتیجه‌گیری و چشم‌انداز آینده ۵۲

آ تابع کومر **۵۳**

مرجع‌ها **۵۵**

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی **۵۸**

فهرست شکل‌ها

۱.۴ حدهای بالا و پایین اطمینان ۹۵ درصد برای p. وقتی که $R = ۳$ و $N = ۱۵$ ۴۹

۲.۴ حدهای بالا و پایین اطمینان ۹۵ درصد برای p. وقتی که $R = ۳$ و $b = ۰/۵$ ۴۹

۳.۴ حدهای بالا و پایین اطمینان ۹۵ درصد برای p. وقتی که $N = ۱۵$ و $b = ۰/۵$ ۵۰

۴.۴ حدهای بالا و پایین اطمینان ۹۵ درصد برای $E[N]$ وقتی که $R = ۳$ و $N = ۱۵$ . . . ۵۱

۵.۴ حدهای بالا و پایین اطمینان ۹۵ درصد برای $E[N]$ وقتی که $R = ۳$ و $b = ۰/۵$ . . . ۵۱

۶.۴ حدهای بالا و پایین اطمینان ۹۵ درصد برای $E[N]$ وقتی که $N = ۱۵$ و $b = ۰/۵$ . . ۵۲

چکیده

مدل‌های صف‌بندی یکی از مهم‌ترین مقوله‌های زندگی شهری امروزی می‌باشند. در مکان‌هایی مانند بانک‌ها و اداره‌ها، صف نماد واقعی پیدا می‌کند، اما در دنیای مجازی نیز مبحث صف‌بندی روز به روز جلوه‌ی بیشتری پیدا می‌کند. از مهم‌ترین کاربردهای آن می‌توان به نظریه‌ی ارتباطات، طرح‌های کامپیوتری، فرایندهای ساخت و سامانه‌های حمل و نقل اشاره کرد. استنباط آماری در نظریه صف‌بندی به براورد پارامترهای این مدل‌ها می‌پردازد. اخیراً این موضوع به طور خاص در فرایندهای صف‌بندی مورد توجه قرار گرفته است. در این پایان‌نامه به براورد پارامترهای دو سامانه‌ی صف‌بندی می‌پردازیم. برای این منظور، در فصل اول به مفاهیم مقدماتی از نظریه‌ی صف‌بندی و نظریه‌ی براوردیابی نقطه‌ای پرداخته‌ایم. در فصل دوم به براورد ماکسیمم درست‌نمایی و بیزی پارامترهای سامانه‌ی صف‌بندی $M/M/۱/۱$ پرداخته و در فصل سوم براورد ماکسیمم درست‌نمایی و یافتن فاصله‌های اطمینان برای پارامترهای سامانه‌ی صف‌بندی $M/M/R/N$ با انصراف متقاضی و سرویس‌دهنده‌های نامتجانس مورد بررسی قرار گرفته است و بالاخره در فصل چهارم مثال‌های عددی از این مدل را ارایه می‌دهیم.

واژگان کلیدی: *انصراف، توزیع گاما، توزیع نمایی، روش بیزی، روش ماکسیمم درست‌نمایی، سرویس دهنده‌های نامتجانس، صف، فاصله اطمینان، فرایند مارکوفی دو حالتی.*

فصل ۱

تعریف‌ها و مفهوم‌های اولیه

۱.۱ مقدمه

نظریه‌ی صف‌بندی یکی از شاخه‌های فرایندهای تصادفی است که هم از لحاظ کاربردی و هم از لحاظ نظری مورد علاقه‌ی بسیاری از محققان آماری و دیگر علوم می‌باشد. مدل‌های صف‌بندی کاربردهای زیادی در نظریه ارتباطات، طرح‌های کامپیوتری، فرایندهای ساخت و سامانه‌های حمل و نقل دارند. یک مدل صف به وسیله‌ی فرایند ورود، توزیع زمان سرویس و تعداد سرویس دهنده‌ها مشخص می‌شود که به کمک آن‌ها می‌توان مدل‌های صف‌بندی را تحلیل و بهینه کرد. نظریه صف به منظور بهینه سازي (کاهش طول صف و یا کاهش زمان سرویس) و تهیه مدلی مناسب برای پیش‌بینی رفتار سامانه‌هایی که سعی دارند به درخواست‌های تصادفی متقاضیان پاسخ دهند گسترش یافته است. با استفاده از روش‌های موجود در این نظریه می‌توان یک مدل مناسب و بهینه برای مسئله‌ی مورد نظر تهیه کرد.

۲.۱ بیان مسئله

برای بهینه‌سازی مدل‌های صف‌بندی باید اندازه‌های مؤثر سامانه را به‌دست آوریم. برای به‌دست آوردن این اندازه‌ها لازم است متغیرهای موجود در مدل شناسایی شده و توزیع‌های آن‌ها به‌دست آیند. اما این توزیع‌ها دارای پارامترهایی هستند که معمولاً نامعلوم می‌باشند. بنابراین برای بهینه‌سازی اندازه‌های مؤثر، باید این پارامترها را براورد کنیم.

استنباط آماری در نظریه‌ی صف به براورد پارامترهای صف‌بندی با استفاده از داده‌های صف‌بندی می‌پردازد. همچنین اخیراً این موضوع در فرایندهای تصادفی و به طور خاص در فرایندهای صف مورد توجه محققان قرار گرفته است. استنباط آماری در براورد نقطه‌ای، آزمون فرض‌ها و فاصله‌های اطمینان سامانه‌های صف‌بندی دارای اهمیت زیادی است. مسئله براورد و آزمون فرض‌های مربوط به پارامترهای مدل‌های صف‌بندی مانند نرخ ورود، نرخ سرویس و شدت ترافیک از لحاظ چشم‌انداز طراحی صف‌ها و مقایسه عملکرد سامانه‌های صف‌بندی مهم است.

در این پایان‌نامه براورد بر روی دو سامانه صف‌بندی $M/M/۱/۱$ و $M/M/R/N$ با انصراف متقاضی و سرویس دهنده‌های نامتجانس مورد بررسی قرار می‌گیرد. در سامانه صف‌بندی $M/M/۱/۱$، براورد پارامترهای این سامانه را به روش‌های ماکسیمم درست‌نمایی و بیزی مورد بررسی قرار می‌دهیم که در روش بیزی براورد پارامترهای این سامانه را تحت دو شرط این‌که نرخ ورود و نرخ سرویس‌دهی از هم مستقل یا وابسته باشند را پیدا می‌کنیم. در سامانه‌ی صف‌بندی $M/M/R/N$ با انصراف متقاضی و سرویس‌دهنده‌های نامتجانس، براورد پارامترهای این سامانه را به روش ماکسیمم درست‌نمایی مورد بررسی قرار می‌دهیم. فاصله اطمینان برای پارامترهای این سامانه را به‌دست می‌آوریم و با استفاده از بررسی‌های عددی اثر تغییرهای b، N و R روی این فاصله‌های اطمینان را بررسی می‌کنیم.

۳.۱ پیشینه پژوهش

اولین تحقیق در مورد براورد پارامترها در مدل‌های صف‌بندی توسط کلارک (۱۹۵۷) انجام شده که ماکسیمم درست‌نمایی نرخ ورود و نرخ سرویس در صف تک سرویس دهنده $M/M/۱/\infty$ را به دست آورد. بنس (۱۹۵۷) براورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای یک مدل صف $M/M/\infty$ با تعداد سرویس دهنده‌های نامتناهی را مورد بحث قرار داد. ولف (۱۹۶۵) براورد ماکسیمم درست‌نمایی پارمترهای مدل های صف‌بندی $M/M/S$ و $M/M/\infty$ و مسأله تحلیل ماشین را مورد بررسی قرار داد. لیلی‌فرس (۱۹۶۶) فاصله اطمینان برای پارامترهای مدل‌های صف $M/M/۱$، $M/E_K/۱$ و $M/M/۲$ را مورد بررسی قرار داد. دیو و شاه (۱۹۸۰) براورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای یک فرایند صف‌بندی ایستای $M/M/۲$ برای سرویس دهنده‌های ناهمگن را به‌دست آوردند. باساوا و پرابهو (۱۹۸۱) براورد ماکسیمم درست‌نمایی و گشتاوری پارامترهای توزیع زمان‌های بین دو مراجعه و سرویس صف $GI/G/۱$ را مورد بررسی قرار دادند. با استفاده از تجزیه و تحلیل زنجیره مارکوف نشانده شده برای صف $M/G/۱$، هریش‌چاندرا و رائو (۱۹۸۸)

براورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامتر شدت ترافیک در یک صف $M/E_K/1$ را مطرح کردند. براورد فاصله اطمینان برای یک صف تک سرویس دهنده با ورودی‌های تصادفی و انصراف، توسط روبین و رابسون (۱۹۹۰) مورد بررسی قرار گرفت. آزمون فرض و فاصله اطمینان هم‌زمان برا ی پارامترهای یک مدل صف $M/E_K/1$، توسط جین (۱۹۹۱) بررسی شد. ابو- ال- عطا و حریری (۱۹۹۵) براورد نقطه‌ای و فاصله‌های اطمینان بریده شده برای صف $M/M/2/N$ با انصراف و سرویس دهنده‌های نامتجانس را توسعه دادند. باساوا و همکارانش (۱۹۹۶) براورد ماکسیمم درست‌نمایی را برای پارامترهای یک صف $GI/G/1$ بر اساس اطلاعات در مورد زمان‌های انتظار متقاضیان متوالی را به دست آوردند. مروری بر ادبیات در مورد تجزیه و تحلیل‌های آماری چند سامانه صف‌بندی توسط دشالالو (۱۹۹۷) ارایه شد. رودریگز و لیته (۱۹۹۸) تحلیل بیزی به منظور مطالعه‌ی فاصله‌های اطمینان یک صف $M/M/1$ را به‌کار بردند. هوانگ و بریل (۲۰۰۱) براوردگرهای نااریب با کمترین واریانس و براوردگر ماکسیمم درست‌نمایی برا ی یک مجموعه‌ی صف n کانالی مستقل را به‌دست آوردند. ونگ و همکاران (۲۰۰۴) براوردهای ماکسیمم درست‌نمایی و فاصله‌های اطمینان یک مدل صف $M/M/R/N$ با انصراف متقاضی و سرویس دهنده‌های نامتجانس را مورد بررسی قرار دادند. ونگ و همکاران (۲۰۰۶) براوردهای ماکسیمم درست‌نمایی و فاصله‌های اطمینان یک مدل صف $M/M/R$ با سرویس دهنده‌های نامتجانس را مورد بررسی قرار دادند. بررسی دقیق بر روی جنبه‌های مدل‌سازی صف و استنباط در صف در بات (۲۰۰۸) دیده می‌شود. هریش‌چاندرا و لاکشمی (۲۰۱۰) براورد ماکسیمم درست‌نمایی و بیزی پارامترهای یک سامانه صف‌بندی $M/M/1/1$ را مورد بررسی قرار دادند.

۴.۱ هدف پژوهش

هدف این پایان‌نامه براورد پارامترهای دو سامانه‌ی صف‌بندی به صورت زیر است:

- براورد پارامترهای سامانه صف‌بندی $M/M/1/1$ به روش‌های ماکسیمم درست‌نمایی و بیزی.
- براورد پارامترهای سامانه صف‌بندی $M/M/R/N$ با انصراف متقاضی و سرویس دهنده‌های نامتجانس به روش ماکسیمم درست‌نمایی و محاسبه‌ی فاصله اطمینان برای پارامتر شدت ترافیک (ρ)، احتمال تهی بودن سامانه (p_0) و میانگین تعداد متقاضیان در سامانه $(E[N])$ در این مدل و بررسی اثر تغییرهای b، N و R روی فاصله‌های اطمینان p_0 و $E[N]$.

در ادامه برخی از تعریف‌ها و مفهوم‌های مورد نیاز در این پایان‌نامه را می‌آوریم.

۵.۱ مشخصه‌های سامانه‌های صف‌بندی

برای بررسی سامانه‌های صف‌بندی معمولاً شش مشخصه‌ی زیر را در نظر می‌گیرند.

۱.۵.۱ الگوی ورود متقاضیان

الگوی ورود به یک سامانه‌ی صف‌بندی بر حسب تعداد ورودی در واحد زمان و یا به وسیله‌ی زمان بین دو ورود متوالی در نظر گرفته می‌شود. واضح است که هر کدام از این کمیت‌ها برای توصیف ورود به سامانه کافی است. اگر زمان‌های بین دو ورود متوالی ثابت باشد، می‌گوییم الگوی ورود متقاضیان همگن یا ثابت (قطعی) است. در حالت‌هایی که ورود متقاضیان قطعی است، الگوی ورود با میانگین نرخ ورود و یا میانگین فاصله زمانی بین دو ورود متوالی کاملاً مشخص می‌شود. اما در بیشتر مسأله‌های واقعی زمان بین دو ورود متوالی، متغیری تصادفی است. برای بررسی دقیق رابطه‌های ریاضی حاکم بر سامانه‌های صف‌بندی و محاسبه‌ی معیارهای ارزیابی آن، شناخت تابع توزیع این متغیرهای تصادفی ضرورت دارد. در بیشتر حالت‌های طبیعی متقاضیان به جای این که یک به یک وارد سامانه شوند، به صورت گروهی مراجعه می‌کنند. در این پیشامد که بیش از یک متقاضی می‌توانند هم‌زمان وارد شوند، می‌گوییم ورود متقاضیان به صورت گروهی یا دسته‌ای انجام می‌شود.

عامل دیگری که می‌توان در الگوی ورود متقاضیان در نظر گرفت روشی است که در آن الگوی ورودی با گذشت زمان تغییر می‌کند. الگوی ورودی را که مستقل از زمان نباشد و با گذشت زمان تغییر کند، نامانا و الگویی را که با گذشت زمان تغییر نمی‌کند، الگوی ورودی مانا گویند.

۲.۵.۱ الگوی ارایه‌ی سرویس

علاوه بر الگوی ورود، شناخت الگوی سرویس نیز بر عملکرد سامانه تأثیر گذار است. الگوی سرویس نیز می‌تواند به وسیله‌ی نرخ سرویس‌دهی، یعنی تعداد متقاضیانی که در واحد زمان سرویس دریافت می‌کنند (μ)، یا به وسیله‌ی طول زمان سرویس، زمان لازم برای سرویس‌دهی یک متقاضی، بیان می‌شود. وقتی که در مورد نرخ سرویس یا زمان سرویس صحبت می‌شود فرض بر این است که سامانه تهی نباشد. سرویس هم مانند ورودی‌ها می‌تواند قطعی یا تصادفی باشد. همچنین سرویس ممکن است به صورت انفرادی یا گروهی انجام شود، یعنی متقاضیان ممکن است در گروه‌های یکی، دو تایی و یا بیشتر سرویس بگیرند. الگوی ارایه‌ی سرویس هم مانند الگوی ورود متقاضیان می‌تواند مانا و یا نامانا باشد.

۳.۵.۱ نظم صف

منظور از نظم صف نحوه‌ی گزینش متقاضیان داخل صف برای سرویس‌دهی است. متداول‌ترین نظم، گرفتن نوبت است. یعنی هر کس زودتر وارد صف شود زودتر سرویس می‌گیرد که آن را با $FCFS$[۱] نشان می‌دهند. در برخی حالت‌ها روشی کاملاً عکس روش اول صورت می‌گیرد، به این صورت که آخرین متقاضی زودتر از سایرین سرویس دریافت می‌کند. این روش بیشتر در سامانه‌های انبارداری انجام می‌گیرد، به این صورت که آخرین کالایی که انبار قرار گرفته است، زودتر از سایر کالاها از انبار خارج می‌شود. این روش را با $LCFS$[۲] نشان می‌دهند. روش دیگر، انتخاب تصادفی متقاضیان برای سرویس است که با RSS نمایش داده می‌شود. همچنین می‌توان از روش‌های با حق تقدم برای نظم صف نام برد.

۴.۵.۱ گنجایش سامانه

در برخی از سامانه‌های صف‌بندی، به علت محدودیت فیزیکی و یا برخی عامل‌های دیگر، برای طول صف محدودیت تعیین می‌کنند، به این صورت که اگر طول صف به اندازه‌ی مشخصی رسید، متقاضیان بعدی اجازه‌ی ورود به سامانه را ندارند تا زمانی که حداقل یک متقاضی از سامانه خارج شود.

۵.۵.۱ تعداد باجه‌های سرویس

تعداد باجه‌های سرویس به تعداد سرویس‌دهنده‌های موازی که می‌توانند به متقاضیان به طور همزمان سرویس دهند، گفته می‌شود. در سامانه‌های چند باجه‌ای ممکن است متقاضیان یک صف واحد تشکیل دهند و با خالی شدن هر کدام از باجه‌های سرویس، متقاضی که در اول صف قرار دارد به آن باجه مراجعه می‌کند (با فرض $FCFS$ برای نظم صف) و یا ممکن است متقاضیان مقابل هر کدام از باجه‌های سرویس یک صف مخصوص به آن باجه را تشکیل دهند و با خالی شدن آن باجه، فقط متقاضیان همان صف می‌توانند به آن باجه مراجعه کنند.

---

[۱] First Come, First Service

[۲] Lost Come, First Service

۶.۵.۱ مراحل سرویس

بیشتر سامانه‌های صف‌بندی تنها یک مرحله سرویس دارند. اما در مواردی ممکن است یک سامانه، چندین مرحله سرویس‌دهی داشته باشد. مراحل آزمایش‌های پزشکی، مثالی از چنین سامانه‌های صف‌بندی است که در آن هر بیمار باید مراحل مختلف مثل آزمایش خون، نوار قلب، MRI و ... را بگذراند.

۶.۱ نمادگذاری

برای توصیف اختصاری سامانه‌های صف‌بندی، از نمادگذاری $A/B/X/Y/Z$ که توسط کندال (۱۹۵۳) ارایه شده است، استفاده می‌کنند. در این نماد A توزیع مدت زمان بین دو ورود متوالی، B الگوی ارایه‌ی سرویس است که با توزیع احتمال زمان سرویس توصیف می‌شود، X تعداد باجه‌های موازی سرویس، Y محدودیت در گنجایش سامانه و Z نظم صف را مشخص می‌کنند. برای مثال، $M/D/۱/\infty/FCFS$ نشان دهنده‌ی یک سامانه صف‌بندی با مدت زمان بین دو ورود متوالی که دارای توزیع نمایی، زمان‌های سرویس ثابت (قطعی) و با یک سرویس‌دهنده و نظم سرویس‌دهی به ترتیب ورود است. همچنین هیچ محدودیتی در پذیرش متقاضیان در سامانه وجود ندارد. زمانی که هیچ محدودیتی در پذیرش متقاضیان در سامانه وجود نداشته باشد و نظم صف هم به ترتیب ورود متقاضیان باشد، می‌توان از دو نماد آخر صرف نظر کرد و سامانه صف‌بندی را فقط با سه نماد ابتدایی نشان داد که برای مثال بالا خواهیم داشت $M/D/۱$.

۷.۱ مفاهیمی از نظریه‌ی براوردیابی نقطه‌ای

اگر پارامتر یا مشخصه‌ای از جامعه‌ی تحت بررسی مجهول باشد، باید آن را از روی داده‌های نمونه‌ای براورد کنیم. برای این کار، ابتدا نمونه‌ی تصادفی $X_۱, ..., X_n$ را در نظر گرفته و به کمک روش‌هایی که در بحث براوردیابی به کار می‌روند، تابعی بر حسب X_i، $i = ۱, ..., n$ برای براورد پارامتر مجهول به دست می‌آوریم. این تابع را که تابعی از مشاهدات است **آماره** می‌گویند. از قرار دادن مقدارهای مشاهده شده‌ی متغیرهای X_i، $i = ۱, ..., n$ در این آماره، مقدار پارامترهای مجهول به ازای داده‌های نمونه‌ای براورد می‌شود. این آماره را **براوردگر** می‌نامیم. در واقع براوردگر یا براوردکننده، متغیری تصادفی است که اگر مقدارهای نمونه‌ای را در آن قرار دهیم، رخدادی از آماره را که متناظر با نمونه‌ی مورد نظر است ارایه می‌دهد. این مقدار عددی آماره را **براورد** پارامتر یا مشخصه‌ی مجهول می‌گویند. براوردگرها به روش‌های مختلفی تولید می‌شوند. این

روش‌ها معمولاً **روش ماکسیمم درست‌نمایی**، **روش کم‌ترین توان‌های دوم**، **روش گشتاوری** و **روش بیزی** هستند. براوردگری از نظر آماری خوب است که در دو ملاک **ناارییی** و **سازگاری** صدق کرده و **کارایی** آن نسبت به براوردگرهای دیگر بیشتر باشد.

۱.۷.۱ روش‌های براوردیابی نقطه‌ای

فرض کنید که از جامعه‌ای با توزیع احتمال $f_\theta(x)$ نمونه‌ای تصادفی $X = (X_1, ..., X_n)$ با مشاهده‌های $x = (x_1, ..., x_n)$ را جمع‌آوری کنیم. اگر از روی این نمونه، مقدار آماره‌ی $T(X)$ را به دست آورده و این مقدار را به عنوان تقریبی از پارامتر مجهول جامعه ارایه دهیم، آن‌گاه مقدار $T(x)$ را یک براورد و متغیر تصادفی $T(X)$ را یک براوردگر پارامتر مجهول θ گویند. به عبارتی دیگر اگر مقدار یک آماره را برای براورد کردن پارامتر یک جامعه به کار بریم، این کار را براورد نقطه‌ای یا به اختصار براورد و به مقدار این آماره، براورد نقطه‌ای پارامتر و خود آماره را براوردگر نقطه‌ای یا به اختصار براوردگر می‌نامیم.

روش‌های مختلفی برای به دست آوردن یک براوردگر وجود دارند که از آن جمله روش گشتاوری، ماکسیمم درست‌نمایی، کم‌ترین توان‌های دوم و ... می‌باشند. روش‌هایی نیز وجود دارند که براوردگرهایی با خاصیت بهینه به دست می‌دهند. یکی از این روش‌ها، روش براورد بیزی است. در ادامه با دو روش براوردیابی و ویژگی‌های براوردگرهای حاصله که در این پایان‌نامه مورد استفاده قرار می‌گیرد، آشنا می‌شویم.

۱.۱.۶.۱ روش براورد ماکسیمم درست‌نمایی

در این بخش به بررسی روش براوردی که غالباً مورد استفاده قرار می‌گیرد، یعنی روش ماکسیمم درست‌نمایی که آن را به اختصار با عنوان ML[۳] یاد می‌کنیم، می‌پردازیم. این روش یکی از قدیمی‌ترین و پر اهمیت‌ترین روش‌ها در نظریه‌ی براوردیابی است. روش براورد ML متداول‌ترین روش در براوردیابی است. این روش با این که از لحاظ شهودی مورد توجه است، بهترین روش نیست و نباید همیشه مورد استفاده قرار گیرد. در حقیقت هیچ قضیه‌ای وجود ندارد که ثابت کند این روش، جز در حالت مجانبی، دارای ویژگی‌های بهینه است. همان‌گونه که خواهیم دید در تعریف این براوردگر، هیچ‌گونه اشاره‌ای به تابع زیان نمی‌شود.

روش ML عبارت است از دستورالعملی برای به دست آوردن براوردی به نام براوردگر ماکسیمم

[۳] Maximum Likelihood