بسم الله الرحمن الرحيم

باسمه تعالی

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

تعهدنامه اصالت اثر

اینجانب حمیدکنعانی معتهد میشوم که مطالب مندرج در این پایاننامه حاصل کار پژوهشی اینجانب است و

دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این پژوهش از آنها استفاده شده است، مطابق مقررات ارجاع و در فهرست منابع و مأخذ ذکر گردیده است .این پایاننامه/رساله قبلاً برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارایه نشده است .در صورت اثبات تخلف) در هر زمان (مدرک تحصیلی صادر شده توسط دانشگاه از اعتبار ساقط خواهد شد.

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی میباشد.

نام ونام خانوادگی دانشجو: حمیدکنعانی

امضاء

تهران – لویزان – کدپستی ۱۶۷۸۸- صنوق پستی ۱۶۳-۱۶۷۸۵ تلفن ۲۲۹۷۰۰۶۰(داخلی ۲۳۴۷)نمابر۲۲۹۷۰۰۱۱پست الکتریکی

sru@sru.ac.ir

دانشکده علوم پایه

گراف توانی نیم گروه‌ها و گروه‌های متناهی

نگارش

حمید کنعانی

استاد راهنما : دکترفرزانه نوروزی لرکی

استادمشاور : دکترحمیدرضا میمنی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

دررشته‌ریاضی محض

مهرماه ۱۳۹۰

تقدیم به

به پاس تعبیر عظیم و انسانی شان از کلمه ایثار و از خودگذشتگان
به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است به پاس قلب های بزرگشان که فریاد رس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می گراید و به پاس محبت های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی‌کند .
این پایان نامه را به مادر عزیزم تقدیم می‌کنم .

تقدیر و تشکر

در اینجا بر خود لازم می‌دانم که از زحمات و مساعدت‌های بی‌دریغ استاد محترم، سرکار خانم دکتر فرزانه نوروزی تشکر نمایم که نه تنها علم ، بلکه معرفت و اخلاق ایشان به اینجانب درس‌های زیادی آموخت. همچنین قدردانی خود را نثار استاد محترم و عزیز جناب آقای دکتر حمیدرضا میمنی می-نمایم که تلاشها، دلسوزی‌ها و همکاری‌های ایشان در رفع مشکلات پایان نامه از ابتدا تاکنون ، باعث دلگرم وتشویق اینجانب بوده است.

از همه اساتید بزرگوار گروه ریاضی تشکر می‌کنم که از محضرشان کسب علم نمودم.

جا دارد از همه دوستان عزیزم بویژه جلال یادپار و سجادآدینه‌وند به خاطر کمک‌ها و همراهی‌شان سپاس‌گزاری کنم و آرزوی موفقیت برایشان داشته باشم.

چکیده

گراف توانی متناظر با گروه یا نیم‌گروه G، گرافی است که مجموعه رئوس آن گروه یا نیم‌گروه G است و دو عنصر $x, y \in G$ مجاورند اگر یکی توانی از دیگری باشد. در این پایان‌نامه، خانواده نیم‌گروه‌های S که $g(S)$ همبند یا کامل است را مشخص می‌کنیم. ما توجه ویژه‌ای به نیم‌گروه ضربی Z_n و گروه U_n(گروه یکه‌های Z_n) داریم که $g(U_n)$ یک مولفه مهم از$g(Z_n)$ است و ثابت می‌کنیم $g(U_n)$ کامل است اگر و فقط اگر $2p$ یا $n = 1,2,4,p$، که p اول فرما است. در حالت کلی تعداد یال‌های $g(G)$ برای گروه متناهی G را محاسبه می‌کنیم و مقادیری از n را که $g(U_n)$ مسطح است مشخص می‌کنیم. همچنین ثابت می‌کنیم برای هر گروه دوری از مرتبه بزرگتر یا مساوی با ۳، $g(G)$ همیلتنی است و مقادیری از n را که $g(U_n)$ همیلتنی نیست مشخص می‌کنیم. مشاهده می‌کنیم که گروه‌های متناهی غیر یک‌ریخت، ممکن است گراف‌های توانی یک‌ریخت داشته باشند و ثابت می‌کنیم گروه‌های متناهی آبلی با گراف‌های توانی یک‌ریخت، خود یک‌ریخت هستند و تنها گروه متناهی که گروه خودریختی آن با گروه خودریختی گراف توانی متناظر با آن مساوی است، گروه چهارتایی کلاین است.

نشان می‌دهیم دو گروه متناهی با گراف‌های توانی یک‌ریخت تعداد یکسانی عنصر از هر مرتبه دارند.

کلیدواژه‌ها: نیم‌گروه، گروه، گراف توانی، یکریختی، خودریختی.

مقدمه

گراف‌های تعریف شده بر روی نیم‌گروه‌ها یا گروه‌ها چیز جدیدی نیست. در سال ۱۹۶۴، بوساک[۱] گراف مشخص را بر روی نیم‌گروه‌ها مطالعه کرد [۱۵] و زلینکا[۲] گراف‌های متقاطع زیرگروه‌های غیربدیهی گروه‌های آبلی متناهی را مورد بررسی قرار داد [۱۶] . اخیراً کلارو[۳] و کوین[۴] دو خانواده از گراف‌های جهت‌دار بنام‌های گراف بخشی و گراف توانی را تعریف کردند [۱۳].

گراف توانی جهت‌دار نیم‌گروه یا گروه S، گرافی با مجموعه‌ی رئوس S است و یالی از x به y وجود دارد اگر و فقط اگر $x \neq y$ و $y = x^m$ برای عدد طبیعی m و آن را با $\vec{g}(S)$ نشان می‌دهیم.

چاکرابارتی گراف توانی غیرجهت‌دار را بر روی نیم‌گروه یا گروه S تعریف کرد و گرافی با مجموعه‌ی رئوس S است و دو رأس متمایز x و y مجاورند اگر و فقط اگر یکی توانی از دیگری باشد و آن را با $g(S)$ نشان می‌دهیم.

در این پایان‌نامه سوال اساسی که حائز اهمیت است، این است که گراف توانی نیم‌گروه یا گروه چه اطلاعاتی در مورد نیم‌گروه یا گروه می‌دهد؟

این پایان‌نامه شامل ۳ فصل است، در فصل اول تعاریف و قضایایی در رابطه با گروه و گراف و مفاهیمی از نظریه اعداد آوردیم.

فصل دوم شامل ۳ بخش است، در بخش اول نشان می‌دهیم $g(S)$ (S متناهی) همبند است اگر و فقط اگر S شامل یک خودتوان منحصربه‌فرد باشد، در غیراین‌صورت $g(S)$ شامل چندین مولفه است و هر مولفه تنها یک خودتوان دارد. همچنین خانواده نیم‌گروه‌های S را مشخص می‌کنیم که $g(S)$ کامل است، به ویژه برای گروه متناهی G، ثابت می‌کنیم $g(G)$ کامل است اگر و فقط اگر G گروه دوری از مرتبه ۱ یا p^m که p اول و $m \in \mathbb{N}$. در بخش دوم نیم‌گروه ضربی Z_n را به‌طور خاص مورد بررسی قرار می‌دهیم و در بخش سوم گراف توانی گروه $(U_n, .)$ را به عنوان یکی از مولفه‌های مهم از $g(Z_n)$ مورد مطالعه قرار می‌دهیم [۵].

در فصل سوم، توجه خود را به گروه‌ها محدود می‌کنیم و به دو سوال زیر پاسخ می‌دهیم:

۱. واضح است $G_1 \cong G_2$ نتیجه می‌دهد که $g(G_1) \cong g(G_2)$. آیا عکس آن برقرار است ؟

---

[۱] Bosak

[۲] Zelinka

[۳] Kelrev

[۴] Quinn

۲. واضح است که گروه خودریختی G مشمول گروه خودریختی $g(G)$ می‌شود، چه موقع تساوی برقرار است ؟[۱۱] و [۱۴]

فهرست

فهرست شکل‌ها

فهرست علائم و اختصارات

مرتبه عنصر a .... $o(a)$

مرتبه گروه G .... $|G|$

زیرگروه تولید شده با a .... $\langle a \rangle$

یک‌ریختی .... $\cong$

حاصل‌ضرب مستقیم G و H .... $G \times H$

گروه خودریختی G .... $Aut(G)$

گروه متقارن از درجه n .... S_n

گروه خطی عام از درجه n روی میدان F .... $Gl(n,f)$

گروه پروفر .... C_{p^∞}

گروه اعداد صحیح به پیمانه n .... Z_n

گروه یکه به پیمانه n .... U_n

کلاس هم‌ارزی a به پیمانه n .... $[a]_n$ یا $\bar{a}$

کلاس a تحت رابطه ρ .... $a\rho$ یا $[a]$

تعداد اعداد طبیعی کوچکتر از n و متباین با آن .... $\varphi(n)$

بزرگترین مقسوم علیه مشترک a و b .... $\gcd(a,b)$

کوچکترین مقسوم علیه مشترک a و b .... $lcm(a,b)$

گراف توانی G .... $g(G)$

گراف توانی جهت‌دار G .... $\vec{g}(G_1)$

خودتوان .... e

مجموعه خودتوان‌های نیم‌گروه S .... $E(S)$

مولفه گراف متناظر با خودتوان e .... C_e

گراف کامل از مرتبه n .... K_n

خودریختی گرافی گروه G .... $Aut\big(g(G)\big)$

همسایگی بسته راس x .... $\bar{N}(x)$

درجه راس v .... $d(v)$

فصل اول

تعاریف و قضایای مقدماتی

مقدمه

در این فصل به طور خلاصه به تعاریف و قضایایی که در فصل‌های آتی از آن‌ها استفاده می‌شود اشاره می‌کنیم، لازم به ذکر است تعاریف و اثبات قضایا در بخش‌های ۱ ، ۲ و۳ به ترتیب از منابع ([1] ، [2]) ، [3] و [4] استفاده شده است.

۱-۱ تعاریف و قضایای گروه

۱-۱-۱- تعریف . ساختمان جبری G همراه با عمل دوتایی . یک نیم‌گروه است، اگر . یک عمل دوتایی شرکت‌پذیر بر G باشد، به عبارت دیگر؛

$$\forall\ a,b,c\ \in G\ \ ; a.(b.c)=(a.b).c$$

۱-۱-۲- تعریف . نیم‌گروه $(G,.)$ که دارای عنصر همانی و هر عنصرش دارای وارون باشد را گروه می‌نامیم.

۱-۱-۳- تعریف . گوییم گروه G متناهی است اگر تعداد متناهی عضو داشته باشد، در غیراین-صورت گروه نامتناهی است.

تعداد عناصر گروه متناهی G را مرتبه گروه می‌نامیم و آن را با $o(G)$ یا $|\mathrm{G}|$ نمایش می‌دهیم.

۱-۱-۴- تعریف . زیرمجموعه ناتهی H از گروه$(G,.)$ را یک زیرگروه می‌نامیم، اگر H نسبت به عمل دوتایی G یعنی . خود یک گروه باشد و در این صورت می‌نویسیم؛ $H\leq G$.

۱-۱-۵- قضیه لاگرانژ[۱] . فرض کنید G یک گروه متناهی باشد، در این‌صورت مرتبه هر زیرگروه G، مرتبه G را عاد می‌کند. یعنی؛

$$H\leq G\Longrightarrow o(H)|o(G)$$

عکس قضیه لاگرانژ برقرار نیست، یعنی اگر G یک گروه متناهی از مرتبه n باشد، لازم نیست به ازای مقسوم علیه m از n زیرگروهی از مرتبه m موجود باشد.

۱-۱-۶- تعریف . اگر در گروه $(G,.)$ برای هر a و b در G داشته باشیم $a.b=b.a$، در این‌صورت گروه G را یک گروه آبلی می‌نامیم.

۱-Lagrange

۱-۱-۷- تعریف . گروه G دوری است هرگاه عنصری مانند a در G وجود داشته باشد به طوری- که هر x در G توانی از a باشد. یعنی عدد صحیح n موجود باشد که $x = a^n$. در این‌صورت a را مولد گروه دوری G می‌نامیم و می‌نویسیم؛ $G = \langle a \rangle$.

به عبارت دیگر G دوری است اگر $G = \langle a \rangle = \{a^n | a \in G, n \in \mathbb{Z}\}$.

اگر G، گروهی آبلی یا دوری باشد، عکس قضیه لاگرانژ برقرار است.

۱-۱-۸- قضیه . فرض کنید G گروهی دوری و متناهی از مرتبه n و d یک مقسوم علیه مثبت n باشد در این‌صورت، G دقیقاً یک زیرگروه از مرتبه d دارد.

برهان . ر.ک[۲]، ص۱۵۰.

۱-۱-۹- قضیه . در مورد گروه‌های متناهی، هر زیر نیم‌گروه دوری، یک زیرگروه دوری است.

۱-۱-۱۰- قضیه . هر زیرگروه از یک گروه دوری، دوری است.

۱-۱-۱۱- قضیه . فرض کنید G یک گروه و $a \in G$ و $o(a) = n$ ، در این‌صورت؛

$$o(a^k) = \frac{n}{\gcd(n,k)} \, , k \in \mathbb{Z}^+ \qquad (۳-)$$

برهان . ر.ک[۲]، ص۱۲۰.

۱-۱-۱۲- نتیجه . اگر G گروه دوری و $G = \langle a \rangle$ و $o(G) = n$، آن‌گاه a^k مولد G است اگر و فقط اگر $\gcd(n,k) = 1$.

تعداد مولدهای گروه دوری متناهی G برابر $\varphi(n)$ است که φ تابع φ-اویلر است.(تعریف تابع φ در بخش ۳، قضیه ۱-۳-۳ آورده شده است.)

۱-۱-۱۳- قضیه . هر گروه متناهی که مرتبه آن عددی اول باشد، دوری است.

۱-۱-۱۴- تعریف . قرار می‌دهیم $Z_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{n-1}\}$، مجموعه Z_n همراه با عمل دوتایی $+$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم؛

$$\forall \, \overline{a}, \overline{b} \in G \;\; \overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}$$

در این صورت $(Z_n, +)$ یک گروه آبلی، متناهی و از مرتبه n است.

گروه $(Z_n, +)$ را گروه اعداد صحیح به پیمانه n تحت جمع می‌نامیم.

حال بر مجموعه $Z_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1}\}$ عمل دوتایی ضربی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم؛

$$\forall \, \overline{a}, \overline{b} \in Z_n : \overline{a}.\overline{b} = \overline{a.b}$$

در این‌صورت $(Z_n, .)$ یک نیم‌گروه با عنصر همانی است.

مجموعه $(Z_n, .)$ را مجموعه اعداد صحیح به پیمانه n تحت ضرب می‌نامیم.

۱-۱-۱۵- تعریف . قرار می‌دهیم $U_n = \{\bar{a} \in Z_n | \gcd(a,n) = 1\}$. در این‌صورت U_n تحت ضرب $\overline{ab} = \bar{a}.\bar{b}$ ، یک گروه آبلی از مرتبه $\varphi(n)$ تشکیل می‌دهد که در آن φ تابع φ- اویلر است.

نکته . فرض کنید n عدد طبیعی و d مقسوم علیه n باشد، در این‌صورت؛

$$|d.U_n| = \varphi(\frac{n}{d}) \qquad (۱-۲)$$

۱-۱-۱۶- قضیه . U_n دوری است اگر و فقط گر $n = 1,2,4,p^m,2p^m$ که p، اول فرد و $m \in N$.

نکته . pZ_{p^n} زیر نیم‌گروه دوری Z_{p^n} و تولید شده توسط $\bar{p} \in Z_{p^n}$ است، یعنی؛

(۱-۳)

نکته . نیم‌گروه $(Z_n, .)$ گروه است اگر و فقط اگر n عددی اول باشد.

نکته . هر گروه دوری متناهی با $(Z_n, +)$ و هر گروه دوری نامتناهی با $(\mathbb{Z}, +)$ یک‌ریخت است.

۱-۱-۱۷- قضیه . گروه های دوری هم مرتبه یک‌ریختند.

۱-۱-۱۸- تعریف . فرض کنید G و H دوگروه باشند، نگاشت $f: G \longrightarrow H$ را یک هم‌ریختی می‌نامند، هرگاه به ازای هر $x, y \in G$ داشته باشیم؛ $f(xy) = f(x)f(y)$.

به‌علاوه اگر f دوسویی (یک به یک و پوشا) باشد، آن گاه f را یک‌ریختی از G بروی H می‌نامند و چنین می‌نویسند؛ $G \cong H$.

یکریختی از G به G را خودریختی می‌نامند.

۱-۱-۱۹- تعریف . تعریف می‌کنیم $V_4 = \{e, x_1, x_2, x_3\}$ که در آن خواص زیر برقرار است؛

۱) $(x_i)^2 = e \,; i = 1,2,3$

۲) $x_i . x_j = x_k \,; i \neq j \neq k$

ساختمان جبری $(V_4 \,, .)$ تشکیل گروه می‌دهد و به آن گروه چهارتایی کلاین گوییم.

این گروه آبلی و از مرتبه ۴ است.

۱-۱-۲۰- تعریف . فرض کنیم X یک مجموعه غیرتهی است و S_X مجموعه تمام توابع یک به یک و پوشا از مجموعه X به X است، S_X تحت ترکیب توابع تشکیل گروه می‌دهد.

اگر X متناهی و دارای n عنصر باشد، در این صورت S_X را گروه متقارن از درجه n نامیده و آن را به صورت S_n نمایش می‌دهیم.

۱-۱-۲۱- تعریف . فرض کنید p یک عدد اول باشد. تعریف می‌کنیم؛

$$C(p^\infty) = \left\{\frac{a}{p^n} + \mathbb{Z} \,\middle|\, \gcd(a,p) = 1, a \in \mathbb{Z}, n \geq 0\right\} \qquad (۱-۴)$$

در این صورت $(C(p^{\infty}),+)$ یک گروه نامتناهی و آبلی است.

هر زیرگروه $C(P^{\infty})$ دوری و به شکل $\langle\frac{1}{p^n}+\mathbb{Z}\rangle$ است و این زیرگروه، متناهی و از مرتبه p^n است.

۱-۱-۲۲- تعریف . تعریف می‌کنیم

$$G=\{x\in\mathbb{C}|x^n=1\}=\{e^{\frac{2k\pi i}{n}}|k=0,1,\dots,n-1\} \quad (۱-۵)$$

G به همراه ضرب اعداد مختلط تشکیل یک گروه می‌دهد و G را گروه ضربی متشکل از ریشه‌های nام واحد می‌نامیم.

۱-۱-۲۳- قضیه اساسی گروه‌های آبلی متناهی . هر گروه آبلی متناهی حاصل ضرب مستقیم گروه‌های دوری می‌باشد.

برهان . ر.ک[۱]، ص۱۲۷.

۱-۱-۲۴- قضیه . هر گروه آبلی متناهی G به دو صورت مختلف با حاصل ضرب مستقیم گروه-های دوری یک‌ریخت است.

حالت اول : $G\cong Z_{{p_1}^{\alpha_1}}\times Z_{{p_2}^{\alpha_2}}\times\dots\times Z_{{p_k}^{\alpha_k}}$ که p_{i}ها عامل‌های اول متمایز مرتبه G و این حاصل ضرب (صرف‌نظر از ترتیب عوامل) منحصر به فرد است.

حالت دوم : $G\cong Z_{m_1}\times Z_{m_2}\times\dots\times Z_{m_k}$ که در آن m_{i}، $m_{\mathrm{i+1}}$ را عاد می‌کند و این m_{i}ها منحصر به فرد و مقسوم علیه‌های مرتبه G هستند.

۱-۱-۲۵-قضیه . اگر H آبلی و تعداد عناصر از هر مرتبه مشخص باشد، آن‌گاه H تا حد یک-ریختی یکتاست.

۱-۱-۲۶- تعریف . فرض کنیم G یک گروه و p یک عدد اول باشد، گروه G را یک p-گروه می-نامیم در صورتی‌که مرتبه هر عضو غیرهمانی G توان مثبتی از p باشد.

زیرگروه H از گروه G را یک p–زیرگروه G گوییم، در صورتی که یک p-گروه باشد.

۱-۱-۲۷- نتیجه . اگر G یک p -گروه باشد، آن‌گاه مرتبه G به صورت p^{α} است که در آن α یک عدد صحیح نامنفی است.

1-1-28- تعریف . p -گروه آبلی متناهی G را آبلی مقدماتی می‌نامیم در صورتی‌که مرتبه هر عضو غیر بدیهی G عدد اول p باشد.

۱-۱-29- قضیه کشی[۱] . فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و $p||\mathrm{G}|$، که در آن p یک عدد اول است. در این‌صورت G عضوی از مرتبه p دارد.

برهان . ر.ک[۲]، ص۱۹۰.

---
[۱] cauchy

۱-۱-۳۰- تعریف . فرض کنیم G یک گروه متناهی از مرتبه n باشد و $n = p^{\alpha}m$ که در آن α یک عدد صحیح نامنفی است و p عدد اولی است که $p \nmid m$، در این‌صورت هر زیرگروه G از مرتبه p^{α} را یک $p-$ زیرگروه سیلوی G می‌نامند.

۱-۱-۳۱- تعریف . فرض کنیم F یک میدان و n عددی طبیعی باشد، مجموعه همه ماتریس-های معکوس پذیر $n \times n$ را که درآیه‌های هر یک از آن‌ها در Fاند، با $GL(n, F)$ نمایش می‌دهیم و $GL(n, F)$ با عمل ضرب ماتریس‌ها تشکیل یک گروه می‌دهد و به آن گروه خطی عام می‌گوییم.

۱-۱-۳۲- قضیه . فرض کنیم n یک عدد طبیعی، q توان مثبتی از یک عدد اول باشد در این-صورت؛

$$|GL(n, q)| = (q^n - 1)(q^n - q) \dots (q^n - q^{n-1}) \tag{۱-۶}$$

برهان . ر.ک[۱]، ص۶۰.

۱-۱-۳۳- قضیه . فرض کنیم G یک گروه آبلی مقدماتی از مرتبه p^m باشد. در این‌صورت $Aut(G) \cong GL(m, p)$.

برهان . ر.ک[۱]، ص۱۴۴.

۱-۱-۳۴- تعریف . به ازای n طبیعی که $n \geq 2$، گروه کواترنیون تعمیم یافته که آن را با Q_{4n} نشان می‌دهند، زیرگروهی از گروه $GL(2, \mathbb{C})$ است که با دو ماتریس زیر تولید می‌شود؛

$\eta = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $\xi = \begin{bmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \varpi \end{bmatrix}$ که در آن $\omega = e^{i\pi/n}$.

۱-۱-۳۵- قضیه . گروه Q_{4n} دارای نمایش زیر است؛

$$Q_{4n} = \langle x, y | x^{2n} = 1, x^n = y^2, y^{-1}xy = x^{-1} \rangle \tag{۱-۷}$$

برهان . ر.ک[۱]،ص۱۷۳.

۱-۲ تعاریف و قضایای گراف

۱-۲-۱- تعریف . منظور از یک گراف G ، دوتایی $G = (V, E)$ است که V مجموعه غیر تهی و E مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های دو عضوی V است. به مجموعه ی V، مجموعه رأس می‌گوییم و با $V(G)$ نشان می‌دهیم و به مجموعه E مجموعه یال‌ها می‌گوییم و با $E(G)$ نشان می‌دهیم.هرگاه $e = \{v, w\}$ یال گراف G باشد، آن‌گاه می‌نویسیم؛ $e = vw$.هرگاه $e = vw$، یال گراف باشد آن‌گاه گوییم v مجاور با w است(v و w مجاورند).

۱-۲-۲- تعریف . در گراف G، تعداد رئوس را مرتبه‌ی G نامیده و معمولاً با n نشان می‌دهند تعداد یال‌های G را اندازه‌ی G نامیده و با m نمایش می‌دهند، یک گراف از اندازه m و مرتبه n را یک (n,m) - گراف نیز می‌گویند.

۱-۲-۳- تعریف . تعداد یال‌های گذرا از رأس v را درجه ی v نامیده و با $degv(dv)$ نمایش می‌دهیم.

اگر $degv = 0$ باشد، v را رأس ایزوله یا تنها می‌نامیم.

۱-۲-۴- تعریف . منظور از یک گراف جهت‌دار D، دوتایی $D = (V, E)$ است که V یک مجموعه غیرتهی (موسوم به رئوس) و E زیرمجموعه‌ای از زوج‌های مرتب با درایه‌های متمایز است.

تذکر . یال (a, b) و (b, a) متفاوت هستند.

۱-۲-۵- تعریف . فرض کنیم $G_1 = (V_1, E_1)$ و $G_2 = (V_2, E_2)$ دوگراف باشند گوییم G_1 یک‌ریخت با G_2 است، هرگاه تناظر دو سویی $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ چنان موجود باشد که $uv \in E_1$ اگروتنها اگر $\varphi(u)\varphi(v) \in E_2$.

هر یک‌ریختی از G به G را یک خودریختی می‌نامیم. در واقع یک خودریختی یک جایگشت از رئوس است که مجموعه یال‌ها را تغییر نمی‌دهد .

مجموعه کلیه خودریختی‌های G همراه با عمل ترکیب توابع ، تشکیل یک گروه می‌دهد که به آن گروه خودریختی G گفته و با $Aut(G)$ نمایش می‌دهیم.

۱-۲-۶- تعریف . گراف $H = (V_H, E_H)$ را زیرگراف $G = (V_G, E_G)$ گوییم هرگاه $V_H \subseteq V_G$ و $E_H \subseteq E_G$.

و در این حالت می‌نویسیم؛ $H \subseteq G$.

۱-۲-۷- تعریف . زیر گراف H از گراف G را فراگیر گوییم هرگاه $V_H = V_G$.

۱-۲-۸- تعریف . فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف و $\emptyset \neq X \subseteq E$، زیر گراف یال‌القایی (القا شده توسط X) را با $\langle X \rangle$ نمایش داده و آن زیرگرافی از G است که مجموعه یال‌های آن X بوده و رئوس آن، کلیه رئوس پایانی یال‌های X است.

۱-۲-۹- تعریف . فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف و $\emptyset \neq U \subseteq V$، زیرگراف رأس القایی (القا شده توسط U) را با $\langle U \rangle$ نمایش داده و آن زیرگرافی از G است که رئوس آن مجموعه U بوده و یال‌های آن، یال‌هایی از G است که هر دو انتهای آن در U است.

۱-۲-۱۰- تعریف . اگر G یک گراف و v رأس G باشد، منظور از $G \backslash v$، زیرگرافی از G است که با حذف رأس v و یال‌هایی که انتهای آن v است، بدست می‌آیند.

هرگاه e یال G باشد، منظور از $G-e$، زیرگراف G است که از حذف یال e به‌دست می‌آید.
اگر u و v دو راس غیر مجاور G باشند و $e=uv$ باشد، منظور از $G+e$ افزودن یال uv به G است.

۱-۲-۱۱- تعریف . فرض کنیم G یک گراف باشد، دنباله ی $v_0v_1v_2 \dots v_\mathrm{k}$ از رئوس G را یک گشت به طول k گوییم هرگاه $v_\mathrm{i}v_{\mathrm{i}+1}$، $0 \leq i \leq k-1$ یک یال در گراف باشد.

۱-۲-۱۲- تعریف . یک گذر به طول k، یک گشت به طول k است که هیچ یالی تکرار نشود.

۱-۲-۱۳- تعریف . یک مسیر به طول k، یک گشت به طول k است که هیچ رأسی تکرار نشود.

۱-۲-۱۴- تعریف . یک دور یک گشت است که فقط رأس ابتدا و انتها آن یکسان باشد و سایر رئوس متمایزند.

۱-۲-۱۵- تعریف . گراف G را گراف کامل گوییم هرگاه هر دو رأس آن مجاور باشند وآن را با K_n نمایش می‌دهیم.

۱-۲-۱۶- تعریف . یک خوشه درگراف G یک مجموعه S در G است به گونه‌ای که زیرگراف القا شده در S گراف کامل باشد.

خوشه S را ماکسیمم گوییم هرگاه اندازه‌ی S بزرگترین اندازه در میان خوشه‌های G باشد، عدد خوشه‌ای G را با $\omega(G)$ نمایش داده و آن را اندازه بزرگترین خوشه می‌گوییم.

۱-۲-۱۷- تعریف . گراف G را همبند گوییم هرگاه بین هر دو رأس G یک مسیر وجود داشته‌باشد.

۱-۲-۱۸- تعریف . گذر اویلری، گذری است که از تمام یال‌های G عبور می‌کند.

یک گذر اویلری بسته را یک مدار اویلری می‌نامیم.

۱-۲-۱۹- تعریف . گراف G را اویلری می‌گوییم هرگاه دارای یک مدار اویلری باشد.

۱-۲-۲۰- قضیه . فرض کنید G یک گراف همبند و غیر بدیهی باشد. G اویلری است اگر و فقط اگر درجه‌ی هر راس زوج باشد.

برهان . ر.ک [۴]، ص۹۴.

۱-۲-۲۱- تعریف . یک مسیر فراگیر در گراف G را یک مسیر همیلتونی (مسیر فراگیر) می‌نامیم.

۱-۲-۲۲- تعریف . دوری از گراف که شامل تمام رأس‌ها باشد را دور همیلتنی(دور فراگیر) می‌نامیم.

۱-۲-۲۳- تعریف . گراف G را همیلتونی گوییم هرگاه G دارای دور همیلتونی باشد.