بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه لرستان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

عنوان

بررسی وجود جواب های نامساوی تغییراتی و مسائل بهینه سازی روی خمینه های ریمانی

نگارش

زهره هدایت

استاد راهنما

دکتر علی بارانی

استاد مشاور

دکتر مجتبی قاسمی

پایان نامه کارشناسی ارشد

شهریور ۱۳۹۳

چکیده

نام خانوادگی: هدایت **نام:** زهره	
عنوان پایان‌نامه: بررسی وجود جواب های نامساوی تغییراتی و مسائل بهینه سازی روی خمینه های ریمانی	
استاد راهنما: دکتر علی بارانی **استاد مشاور:** دکتر مجتبی قاسمی	
درجه تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی محض **گرایش:** هندسه **محل تحصیل:** دانشگاه لرستان **دانشکده:** علوم پایه **تاریخ فارغ التحصیلی:** شهریور ماه ۱۳۹۳ **تعداد صفحه:**۱۰۰	
کلید واژه ها: خمینه هادمارد، خمینه ریمانی، نامساوی تغییراتی، بهینه سازی، تابع محدب، میدان برداری یکنوا.	

چکیده: در این پایان نامه، مفاهیم تحدب و مسائل نامساوی تغییراتی و همچنین مسائل بهینه سازی روی فضای خطی بررسی می شود. لازم به ذکر است که در بسیاری از مطالعات، فضای مورد استفاده غیر خطی می باشند. خمینه ها به عنوان فضای غیر خطی از اهمییت خاصی برخوردار می باشند. از آنجایی که خمینه هادمارد با فضای خطی $\mathbb{R}^n$ دیفئومورفیسم می باشد، بنابراین ابتدا تمامی مفاهیم را روی خمینه هادمارد بیان می کنیم، سپس با استفاده از تکنیک های آنالیز محدب این مفاهیم را از خمینه هادمارد به روی خمینه ریمانی تعمیم می دهیم و ارتباط بین آنها را بررسی خواهیم کرد.

تقدیر و تشکر:

شکر شایان نثار ایزد منان که توفیق را رفیق راهم ساخت تا این پایان نامه را به پایان برسانم.

با درود فراوان به روح پر فتوح پدر بزرگوارم و

سپاس بیکران بر همدلی و همراهی و همگامی مادر دلسوز و مهربانم

که سجده ی ایثارش گل محبت را در وجودم پروراند و دامان گهربارش لحظه های مهربانی را به من آموخت.

اما از آنجایی که تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تامین می کند و سلامت امانت هایی را که به دستش سپرده اند، تضمین؛ بر حسب وظیفه و از باب "من لم یشکر المنعم من المخلوقین لم یشکر الله عزّ و جلّ":

از استاد با کمالات و شایسته؛ جناب آقای دکتر علی بارانی که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این پایان نامه را بر عهده گرفتند؛

و از استاد صبور و با تقوا؛ جناب آقای دکتر مجتبی قاسمی، که زحمت مشاوره این پایان نامه را متقبل شدند؛

و از استاد فرزانه و دلسوز؛ جناب آقای دکتر امیرقاسم غضنفری که زحمت داوری این پایان نامه را متقبل شدند؛

کمال تشکر و قدردانی را دارم.

تقدیم به

مقدس‌ترین واژه‌ها در لغت نامه دلم، مادر مهربانم که زندگیم را مدیون مهر و عطوفت آن می دانم.

پدر، که خاطرش در یادم و یادش در دلم همیشه زنده است.

پیشگفتار

مساله نامساوی تغییراتی در فضای اقلیدسی و فضای غیر خطی از اهمیت ویژه ای برخوردارند. هدف ما حل مسائل با استفاده از نامساوی تغییراتی روی خمینه ریمانی می باشد. در گام اول نامساوی تغییراتی را روی خمینه هادمارد معرفی می کنیم. در واقع می خواهیم با بیان مفاهیم خم، میدان برداری یکنوا و قوی، قضیه وجود و یکتایی جواب مساله نامساوی تغییراتی روی فضای خطی را به خمینه هادمارد تعمیم دهیم و در ادامه ویژگی تحدب مجموعه جواب مساله نامساوی تغییراتی روی هر خمینه ای را اثبات کنیم. مساله نامساوی تغییراتی به مساله بهینه سازی مرتبط است. در ادامه مفاهیم جدید قطب ضعیف زیر مجموعه و هم چنین نتایج یکتایی و وجودی مساله نامساوی تغییراتی روی زیر مجموعه محدب موضعی با نقاط درونی قطب ضعیف را بیان می کنیم.

بردار بهینه در جهات مختلف در حوزه های بهینه پارتو [1] ، نظریه بازی، نامساوی تغییراتی رشد قابل ملاحظه ای داشته است. به علاوه با به کار بردن تحدب می توان بهینه سازی را توسعه داد و این تابع محدب تعمیم یافته است که نقش خیلی مهم در بهینه سازی ایفا می کند. تابع محدب و تابع محدب

[1] Pareto

تعمیم یافته کاربرد وسیعی در رشته های اقتصاد، مهندسی، مدیریت و بهینه سازی دارند. در گذشته مقالات زیادی منتشر شده اند که تمام توجه آن ها به وجود جواب مساله بهینه سازی در فضا با بعد متناهی می باشند.

در سال ۱۹۸۰ گیانسی [۲] اولین کسی است که مساله نامساوی تغییراتی در فضای اقلیدسی با بعد متناهی را معرفی کرده است. مساله نامساوی تغییراتی به مساله بهینه سازی مرتبط می باشد به طوری که چن ات ال [۳] ارتباط بین مساله نامساوی تغییراتی و مساله بهینه سازی روی فضا با بعد متناهی معرفی و بررسی کرده است. در سال های اخیر بردار بهینه ساز و تعمیم آن ها بسیار مورد استفاده قرار گرفته و ابزاری برای مطالعه مساله بهینه سازی می باشند. بیشتر مولفان ارتباط بین مساله نامساوی تغییراتی و مساله بهینه سازی را تحت شرایط مختلف بررسی کرده اند. در سال های گذشته مفاهیم مهم آنالیز غیر خطی و مساله بهینه سازی از فضای اقلیدسی به خمینه ریمانی تعمیم داده شده اند که برای مطالعه قضیه تحدب، قضیه نقطه ثابت، نامساوی تغییراتی به کار گرفته می شوند. در این حالت فضای خطی به خمینه هادمارد و یک قطعه خط به یک ژئودزی تبدیل می شود.

مساله بهینه سازی فشرده غیر هموار و غیر تحدب در فضا با بعد متناهی می تواند به مساله بهینه سازی غیر فشرده هموار و محدب روی خمینه تبدیل شود. یاد آوری تعمیم مفاهیم و تکنیک های آنالیز غیر خطی از فضای اقلیدسی به خمینه ریمانی که در مقالات اخیر مورد مطالعه قرار گرفته است بسیار با ارزش می باشند.

[۲] Giannessi

[۳] Chen et al

نمد [۴] و تانگ ات ال [۵] و لی ات ال [۶] و کولاوو ات ال [۷] مساله نامساوی تغییراتی و هم چنین وجود جواب مساله نامساوی تغییراتی تحت شرایط مناسب و دلخواه را روی خمینه هادمارد بررسی و مطالعه کرده اند.

با الهام گرفتن از کار های نام برده در بالا می توانیم نکات قابل ملاحظه ای را در بررسی ارتباط بین مساله نامساوی تغییراتی و مساله بهینه سازی روی خمینه هادمارد بیابیم. در حالت کلی خمینه یک فضای خطی نیست ولی می توان مفاهیم و تکنیک ها را از فضای خطی به خمینه ریمانی تعمیم داد. راپ شاک [۸] و ادریس [۹] تحدب تعمیم یافته که ژئودزی محدب نامیده می شود و نیز یکنوایی گرادیان تابع محدب را بررسی و مطالعه کرده اند. مفهوم میدان برداری یکنوا روی خمینه ریمانی عملگر یکنوای تعمیم یافته ای است که توسط نمد معرفی شده است.

مفاهیم یکنوایی و افزاینده ابزار با ارزشی برای مطالعه عملگر های مهم مانند گرادیان و زیر دیفرانسیل تابع محدب می باشند که این عملگرها بیشتر در مساله بهینه سازی و مساله نامساوی تغییراتی یا معادله دیفرانسیل ظاهر می شوند.

[۴] Németh

[۵] Tang et al

[۶] Li et al

[۷] Colao et al

[۸] Rapcsák

[۹] Udriste

هدف اصلی ما در این پایان نامه بررسی وجود و یکتایی مساله نامساوی تغییراتی روی خمینه ریمانی می باشد. در فصل اول کلیه مفاهیم و تعاریف و نکات مهم و مقدماتی که در فصل دوم مورد استفاده قرار می گیرند؛ از جمله مباحث تحدب و ضرایب کریستوفل و ژئودزی آورده شده است. در فصل دوم مساله مفاهیم مساله نامساوی تغییراتی و سپس هم ارزی بین آن و مساله بهینه سازی را روی خمینه هادمارد بیان می کنیم. سپس با استفاده از تکنیک های آنالیز محدب این مسائل را روی خمینه ریمانی تعمیم می دهیم و جواب یکتا و منحصر به فرد این مساله را طبق شرایط بیان شده در طی فصل، به دست می آوریم.

مقاله اصلی مورد مطالعه در این پایان نامه، مقاله زیر می باشد:

Existence of Solutions for Variational Inequality

on Riemannian Manifolds

فصل ۱

تعاریف

۱-۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این بخش تمامی تعاریف و مفاهیم مقدماتی مورد مطالعه را ارائه می دهیم.

تعریف ۱.۱.۱. گوییم تابع $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ در نقطه $x \in \mathbb{R}^n$ دیفرانسیل پذیر است هرگاه یک عملگر خطی $m \times n$ مانند A موجود باشد به قسمی که داشته باشیم:

$$\lim_{y\to 0} \frac{f(x+y)-f(x)-Ax}{\|y\|} = 0.$$

نکته ۱.۱.۱. اگر f در x دیفرانسیل پذیر باشد در این صورت مشتق دوم f در x به صورت زیر می باشد:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{bmatrix},$$

که آن را هسیان f در x گویند و با نماد $Hessf(x)$ و یا $\nabla^2 f(x)$ نشان می دهند.

تعریف ۲.۱.۱. مجموعه تراز [1] تابع دیفرانسیل پذیر $f:\mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$f^{-1}(c) := \{x \in \mathbb{R}^n | \quad f(x) = c\}.$$

تعریف ۳.۱.۱. برای تابع دیفرانسیل پذیر $f : U \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$، مجموعه تراز را به صورت $S = f^{-1}(c)$ در نظر می گیریم. S را یک n ـ رویه گویند هرگاه برای هر $p \in S$، $\nabla f(p) \neq 0$ باشد.

[1] level set

مثال ۱.۱.۱. فرض می کنیم $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی دیفرانسیل پذیر [۲] باشد. نشان می دهیم S تعریف شده در زیر یک nـ رویه است.

$$S = graph(f) = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) | \quad x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)\}$$

برهان. تابع g را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$g(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_{n+1} - f(x_1, \dots, x_n)$$

تابع g دیفرانسیل پذیر است (زیرا تفاضل دو تابع دیفرانسیل پذیر، دیفرانسیل پذیر است) و $S = g^{-1}(0)$ می باشد. برای اثبات nـ رویه بودن کافی است نشان دهیم $\nabla g \neq 0$ می باشد. بنابراین:

$$\nabla g(x_1, \dots, x_{n+1}) = (-\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial f}{\partial x_n}, 1) \neq 0,$$

بنابراین S یک nـ رویه است.

تعریف ۴.۱.۱. فرض می کنیم $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ و $x \in M$ باشد. گوییم بردار V در نقطه x بر M مماس است هرگاه خم دیفرانسیل پذیر $\alpha : I \longrightarrow M$ موجود باشد به قسمی که داشته باشیم:

(الف) $\alpha(0) = x,$

(ب) $\forall t \in I \quad \alpha(t) \in M,$

(ج) $\alpha'(0) = V.$

در این صورت فضای مماس [۳] بر M در نقطه x عبارت است از:

[۲] differentiable function

[۳] tangent space

$$T_xM = \{V| \quad \text{.مماس است}\ M\ \text{بر}\ x\ \text{در}\ V\}.$$

نکته ۲.۱.۱. گرادیان f در $p \in f^{-1}(c)$ بر تمام بردارهای مماس بر $f^{-1}(c)$ در p عمود است و برعکس. یعنی:

$$T_pS = [\nabla f(p)]^{\perp}.$$

مثال ۲.۱.۱. برای مجموعه $S = \{(x, y)| \quad x^2 + y^2 = 1\}$ در نقطه $p = (0, 1)$، T_pS را به دست می آوریم.

برهان. تابع $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ را با ضابطه $f(x, y) = x^2 + y^2$ تعریف می کنیم. $S = f^{-1}(1)$ مجموعه تراز می باشد و $\nabla f(p) = \nabla f(0, 1) = (2x, 2y)|_{(0,1)} = (0, 2) \neq 0$. در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} T_pS &= [\nabla f(p)]^{\perp} = [(0, 2)]^{\perp} \\ &= \{W \in \mathbb{R}^2| \quad W \cdot (0, 2) = 0\} \\ &= \{(w_1, w_2)| \quad (w_1, w_2) \cdot (0, 2) = 0\} \\ &= \{(w_1, 0)| \quad w_1 \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

در این صورت فضای مماس بر دایره یک خط می باشد.

مثال ۳.۱.۱. کره واحد $S = \{(x, y, z)| \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ را در نظر می گیریم. فضای مماس در نقطه $p = (x, y, z)$ بر کره را به دست می آوریم.

برهان. تابع $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ را با ضابطه $f(p) = x^2 + y^2 + z^2$ در نظر می گیریم. $S = f^{-1}(c)$ و $\nabla f(p) = (2x, 2y, 2z) \neq 0$ می باشد. در نتیجه داریم:

$$T_pS = [\nabla f(p)]^{\perp}$$

$$= \{(v_1, v_2, v_3) | \quad (v_1, v_2, v_3) \cdot (2x, 2y, 2z) = 0\}$$

$$= \{(v_1, v_2, v_3) | \quad 2xv_1 + 2yv_2 + 2zv_3 = 0\}$$

$$= \{(v_1, v_2, v_3) | \quad xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0\},$$

در این صورت فضای مماس یک صفحه می باشد.

تعریف ۵.۱.۱. تابع $f : M \longrightarrow N$ همئومورفیسم [4] است اگر f یک به یک و پوشا و پیوسته و f^{-1} نیز پیوسته باشد.

تعریف ۶.۱.۱. تابع $f : M \longrightarrow N$ دیفئومورفیسم [5] است اگر f همئومورفیسم و نیز f و f^{-1}، c^{∞} باشند.

تعریف ۷.۱.۱. گوییم خمینه [6] M موضعاً اقلیدسی از بعد n است هرگاه برای هر $p \in M$ یک همسایگی U و همئومورفیسم $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ موجود باشد به طوری که $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$.

از (φ, U) برای نمایش دستگاه مختصی روی خمینه استفاده می کنیم.

نکته ۳.۱.۱. بعد خمینه M، بعد فضای اقلیدسی است که $Im\varphi$ در آن قرار می گیرد.

نکته ۴.۱.۱. اگر یک تابع دارای مشتق مرتبه rام پیوسته ای باشد در این صورت تابع را c^r می نامیم. اگر برای هر r این خاصیت برقرار باشد گوییم تابع f دیفرانسیل پذیر یا c^{∞} است.

[4] homeomorfism

[5] diffeomorfism

[6] manifold

تعریف ۸.۱.۱. فضای برداری [۷] از یک مجموعه ناتهی V همراه با دو عمل جمع و ضرب اسکالر تشکیل شده است.

در زیر مفهوم نگاشت c^∞ بین خمینه ها را بیان می کنیم.

تعریف ۹.۱.۱. نگاشت $F : M \longrightarrow N$ در نقطه $p \in M$ دیفرانسیل پذیر (یا c^∞) است هرگاه دستگاه مختصی (φ, U) برای $p \in M$ (به طوری که $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^m$) و دستگاه مختصی (ψ, V) برای $F(p)$ (به طوری که $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$) موجود باشند به طوری که $F(U) \subseteq V$ و نگاشت $\hat{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ در $\varphi(p)$ دیفرانسیل پذیر باشد.

تعریف ۱۰.۱.۱. $c^\infty(p)$ را مجموعه ای از همه توابع c^∞ در یک همسایگی از p در نظر می گیریم.

اینک فضای مماس بر خمینه را بیان می کنیم.

تعریف ۱۱.۱.۱. فضای مماس بر خمینه M در $p \in M$ عبارتست از همه توابع $X : c^\infty(p) \longrightarrow \mathbb{R}$ که دارای خواص زیر باشند:

(۱) $\quad X[\alpha f + \beta g] = \alpha X[f] + \beta X[g],$

(۲) $\quad X[f \cdot g] = X[f] \cdot g(p) + f(p)X,$

به طوری که $X[f]$ مشتق جهتی تابع f در جهت X می باشد. جمع و ضرب اسکالر تعریف شده در زیر، فضای مماس را به یک فضای برداری تبدیل می کنند:

[۷] vector space

$(X+Y)[f] := X[f]+Y[f],$

$(\alpha X)[f] := \alpha X[f].$

تعریف ۱۲.۱.۱. نگاشت مشتق تابع $F: M \longrightarrow N$ را با نماد F_{*p} نشان می دهیم به طوری که:

$$DF(p) = F_{*p} : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$$

$$X_p \longrightarrow X_{F(p)}$$

وظیفه نگاشت مشتق انتقال بردارهای مماس از فضای مماس بر خمینه M به فضای مماس بر خمینه N می باشد. برای $X \in T_pM$ نگاشت مشتق به صورت زیر محاسبه می شود:

$$F_*(X)[f] := X[f \circ F],$$

$f \in c^\infty(F(p))$ می باشد.

نتیجه ۱.۱.۱. اگر $F: M \longrightarrow N$ دیفئومورفیسم باشد آنگاه $F_* : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ ایزومورفیسم است.

نکته ۵.۱.۱. فرض کنیم M خمینه n بعدی و $p \in M$ و (φ, U) دستگاه مختصی در p باشد و $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ پایه فضای مماس $\mathbb{R}^n$ باشد در این صورت $\{E_{ip} := \varphi_*^{-1}(\frac{\partial}{\partial x^i})\}_{i=1}^n$ پایه فضای مماس T_pM بر M در p می باشد.

تعریف ۱۳.۱.۱. فرم دو خطی روی فضای برداری V تابعی به صورت زیر است:

$$g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$g(av_1 + bv_2, w) = ag(v_1, w) + bg(v_2, w),$$

$$g(v, cw_1 + dw_2) = cg(v, w_1) + dg(v, w_2).$$

به طوری که $v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$ و d, c, b, a اعداد حقیقی می باشند. ضرب اسکالر روی فضای مماس T_xM را با $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ نشان می دهیم که به نرم $\|.\|_x$ وابسته می باشد. در بعضی موارد می توان اندیس x را حذف کرد.

اگر g یک فرم دو خطی متقارن (یعنی $g(v, w) = g(w, v)$) و معین مثبت (یعنی $g(v, v) \geq 0$ و اگر $g(v) = 0$ آنگاه $v = 0$) باشد آنگاه g یک نرم روی فضای برداری V به صورت زیر ایجاد می کند:

$$\|v\| = (g(v, v))^{\frac{1}{2}}.$$

تعریف ۱۴.۱.۱. میدان برداری g از فرم های دو خطی c^r تابعی است که به هر $p \in M$ یک فرم دو خطی مانند $g_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ نظیر می کند به قسمی که برای دستگاه مختصی (φ, U) در p، توابع $g_{ij} = g_p(E_{ip}, E_{jp})$ روی U توابعی c^r باشد.

دو میدان برداری X و Y را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$X = \sum_{i=1}^{n} a^i E_{ip} \quad \text{و} \quad Y = \sum_{j=1}^{n} b^j E_{jp}$$

که $(a^1, \ldots, a^n)$ و $(b^1, \ldots, b^n)$ توابعی دیفرانسیل پذیر روی U می باشند و $E_{ip} = \varphi_*^{-1}(\frac{\partial}{\partial x^i})$ برای $i = 1, \ldots, n$، پایه فضای مماس بر خمینه M است. در این صورت:

$$g(X, Y) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} a^i b^j.$$

مقدار $g(X, Y)$ در نقطه m تنها به مقدار میدان های برداری X و Y در m وابسته می باشد.

تعریف ۱.۱.۱۵. خمینه M که روی آن یک میدان برداری g از فرم های دو خطی متقارن و معین مثبت وجود داشته باشد را یک خمینه ریمانی [۸] می نامیم.

تعریف ۱.۱.۱۶. خمینه ریمانی M کامل [۹] است اگر وتنها اگر هر ژئودزی [۱۰] روی آن را بتوان به ژئودزی تعریف شده روی کل $\mathbb{R}$ توسیع داد.

در ادامه فرض می کنیم (M, g) خمینه ریمانی کامل با بعد متناهی باشد.

تعریف ۱.۱.۱۷. طول خم تکه ای دیفرانسیل پذیر $c : [0, 1] \longrightarrow M$ متصل از x به y را برای $x, y \in M$، به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$L(c) := \int_0^1 \|\dot{c}(t)\| dt.$$

تعریف ۱.۱.۱۸. فاصله ریمانی بین x و y را با $d(x, y)$ نشان می دهیم و به صورت $d(x, y) := \inf_c L(c)$ تعریف می کنیم. به طوری که اینفیمم روی کل خم های تکه ای دیفرانسیل پذیر $c : [0, 1] \longrightarrow M$ متصل از x به y می باشد.

تعریف ۱.۱.۱۹. نگاشت تصویر روی مجموعه A را با P_A نشان می دهیم و برای هر $x \in M$ آن را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$P_A(x) = \{\bar{x} \in A| \quad d(x, \bar{x}) = \inf_{z \in A} d(x, z)\}.$$

بنابراین اگر A مجموعه ای بسته باشد آنگاه $P_A(x) \neq \emptyset$ است. در حالت کلی P_A یک نگاشت مجموعه مقدار است. در گزاره زیر شرایطی را بیان می کند که $P_A(0)$ نگاشتی تک مقداری است.

[۸] Riemanian manifold

[۹] complete

[۱۰] geodesic