باسمه تعالی

دانشکده عمران

گروه سازه

پایان‌نامه

برای دریافت درجه دکتری در رشته سازه

عنوان

گسترش کاربرد فرم‌های کانونیکال و ضرب گراف‌ها در حل مسائل ویژه‌ی منظم و تکراری مکانیک سازه‌ها

اساتید راهنما

پروفسور علی کاوه

دکتر ناصر تقی‌زادیه

استاد مشاور

دکتر کامبیز کوهستانی

پژوهشگر

مهدی نوری

آذر ماه ۱۳۸۹

شماره


بسم الله الرحمن الرحیم

نام خانوادگی: نوری	**نام:** مهدی

عنوان پایان‌نامه: گسترش کاربرد فرم‌های کانونیکال و ضرب گراف‌ها در حل مسائل ویژه‌ی و منظم و تکراری مکانیک سازه‌ها

اساتید راهنما: پروفسور علی کاوه، استاد دانشگاه علم و صنعت ایران

دکتر ناصر تقی‌زادیه، استادیار دانشگاه تبریز

استاد مشاور: دکتر کامبیز کوهستانی، استادیار دانشگاه تبریز

مقطع تحصیلی: دکتری تخصصی **رشته:** عمران **گرایش:** سازه **دانشگاه:** تبریز

دانشکده: مهندسی عمران **تعداد صفحه:**۱۳۶

کلید واژه‌ها: ضرب گراف‌ها، تاشه‌پردازی، فرم‌های کانونیکال، سازه‌های منظم و تکراری، حل ویژه‌ی مسائل بزرگ مقیاس.

چکیده:

پایاننامه‌ی حاضر به گسترش کاربرد فرم‌های کانونیکال و ضرب گراف‌ها در حل مسائل ویژه‌ی منظم و تکراری مکانیک سازه‌ها می‌پردازد. در این راستا مطالب آن در دو بخش ارائه می‌شود. در بخش نخست به توسعه‌ی ضرب گراف‌ها، به ضرب گراف‌های وزندار برای تاشه‌پردازی سازه‌ها و در بخش دوم به حل مسائل مقدار ویژه‌ی ماتریس‌های سه قطری بلوکی بزرگ مقیاس برای محاسبه‌ی مقادیر و بردارهای ویژه‌ی ماتریس‌های مجاورت، لاپلاسین، سختی و جرم سازه‌های منظم و متقارن، پرداخته شده است.

ضرب گراف‌ها به ضرب گراف‌های وزندار تعمیم داده شده و دامنه کاربرد آن برای تولید اتوماتیک تاشه‌ی انواع مختلفی از مدل‌های سازه‌ای، تعمیم داده شده است. سیکل‌ها و مسیرهای وزندار به فرم جبری و ریاضی بیان شده‌اند. بیان فرم جبری و ریاضی سیکل‌ها و مسیرهای وزندار به عنوان مولد ضرب، باعث شده است تا اطلاعات توپولوژیک و تاشه یک سازه توسط یک عبارت ریاضی و جبری ساده بیان شود. استفاده از ضرب‌های گسترش یافته منجر به تولید طیف وسیعی از سازه‌های مهندسی به وسیله‌ی ضرب گراف‌ها گردیده است. تعریف ضربهای تعمیم یافته، تبدیلات مربوط به محورهای مختصات، جابجایی گرهی، افزودن شرایط هندسی به شرایط هر یک از ضربها، استفاده از عملگر اجتماع گراف‌ها و همچنین محورهای مختصات تعمیم یافته باعث شده است تا

دامنه‌ی کاربرد ضرب گراف‌ها برای تاشه‌پردازی سازه‌های فضاکار به طور قابل ملاحظه‌ای افزایش یابد. با توجه به بیان جبری مدل یک سازه توسط حاصل‌ضرب دو مولد وزندار حافظه‌ی لازم برای ذخیره‌سازی اطلاعات یک سازه به طور محسوسی کاهش یافته است لذا برای بیان تمامی اطلاعات مربوط به یک سازه تنها ذخیره‌ی اطلاعات مولدهای آن کافی می‌باشد.

حل مسائل مربوط به مقادیر ویژه‌ی ماتریس‌های مجاورت، لاپلاسین، سختی و جرم سازه‌های منظم و متقارن بزرگ مقیاس مورد توجه قرار گرفت. ماتریس‌های سه قطری بلوکی حاصل از این سیستم‌ها به زیر ماتریس‌هایی برای محاسبه‌ی سریع مقادیر ویژه‌ی آن تجزیه گردید. با توجه به اینکه محاسبه‌ی مقادیر ویژه‌ی یک ماتریس مستلزم محاسبه‌ی ریشه‌های معادله‌ی مشخصه‌ی آن می‌باشد بنابراین با تجزیه‌ی ماتریس‌های مذکور به زیر ماتریس‌های کوچکتر، زمان و هزینه‌ی محاسباتی برای سازه‌های بزرگ مقیاس کاهش، قابل توجهی یافته است.

روشی برای تعیین مقادیر ویژه حداقل و حداکثر ماتریس‌های مورد بحث و اینکه در کدام یک از بلوک‌های تجزیه شده قرار دارند، ارایه گردید که نتیجه‌ی آن افزایش سرعت در تعیین m مقدار ویژه حداقل و حداکثر این نوع ماتریس‌ها می‌باشد. مقدار خطای حاصل از تجزیه‌ی ماتریس‌های سه قطری بلوکی مورد توجه قرار گرفت و روابطی برای محاسبه‌ی تقریب حاصل ارائه گردید رابطه‌ی مذکور بیانگر این است که با افزایش ابعاد ماتریس‌ها مقدار خطای حاصل از این تقریب به سمت صفر میل می‌کند.

فهرست مطالب

فصل اول: پایه‌های نظری و پیشینه‌ی تحقیق

فصل دوم: مواد و روش‌ها

فهرست اشکال

فصل اول

فصل دوم

فصل سوم

پیوست

فهرست جداول

جدول علائم و نشانه‌ها

ضرب کارتزین	$\times$
ضرب مستقیم	O
ضرب کارتزین قوی	$\otimes$
فضای گرهی گراف S	N(S)
لیست اعضای گراف S	E(S)
درخت n گرهی	P_n
سیکل n گرهی	C_n
درخت n گرهی وزندار	$P_n w$
سیکل n گرهی	$C_n w$
مقدار ویژه‌ی i ام	λ_i
مقادیر ویژه‌ی ماتریس K	$eig(K)$

فصل اول:

پایه‌های نظری و پیشینه‌ی تحقیق

۱-۱- مقدمه

گسترش سریع شهرها و نیاز به ایجاد تاسیسات اولیه، کارخانجات، مجتمع‌های صنعتی و ... نیازمند تولید سازه‌های پیش‌ساخته بزرگ مقیاس با قابلیت تولید، ساخت و نصب سریع می‌باشد.

بدین منظور پژوهشگران مطالعاتی را پیرامون سازه‌ها با تاشه‌پردازی منظم و بزرگ مقیاس آغاز کرده‌اند. مزیت اساسی این نوع سازه‌ها – با توجه به پیش‌ساخته بودن آنها– در این است که از یک سری مدول ثابت و حرکت آنها حول و یا امتداد یک محور و یا منحنی تشکیل می‌شوند. گنبدها، قوس‌ها، شبکه‌ها و سازه‌های فضاکار، نمونه‌هایی از سازه‌های تکراری[1] هستند که مدل آنها از حرکت یک پاره سازه[2] متکی به یک منحنی و یا از دوران پاره سازه‌ای حول یک محور تولید می‌شوند. اکثر این سازه‌ها برای پوشش دهانه‌های وسیع کاربرد دارند و در گروه سازه‌های بزرگ مقیاس قرار می‌گیرند.

اولین مرحله برای طراحی این نوع سازه‌ها، تاشه‌پردازی، مدل‌سازی و همچنین تهیه‌ی مدل ریاضی آن برای مطالعه و بررسی رفتار آنها می‌باشد. تاشه پردازی سازه‌های بزرگ و تهیه‌ی مشخصات هندسی آن یکی از مراحل وقت‌گیر و خسته‌کننده در طراحی این گونه سازه‌ها می‌باشد.

مطالعاتی در خصوص چگونگی مدل‌سازی این نوع سازه‌ها در دهه‌های اخیر انجام یافته است. جبر فرمکس‌ها، تئوری مجموعه‌ها و تئوری گراف‌ها از جمله ابزارهایی هستند که برای تولید تاشه سازه‌های فضایی، توسط محققین معرفی شده‌اند و در دهه‌های اخیر به طور گسترده مورد استفاده قرار گرفته‌اند.

سازه‌های تکراری با توجه به روند تولید آن در گروه سازه‌*های منظم و متقارن قرار می‌گیرند*. تقارن و انواع آن به طور وسیع در مکانیک سازه‌ها و سایر علوم مورد استفاده قرار گرفته است. ماتریس‌های حاصل از انواع سیستم‌های تکراری، که در بررسی این نوع سیستم های سازه‌ای ساخته می‌شوند، در زیر مجموعه‌ای از گروه فرم‌های کانونیکال جای می‌گیرد.

1- Repeated structure
2- Sub-structure

مطالعه و بررسی سازه‌ها - از جمله سازه‌های تکراری- در نهایت به مطالعه‌ی خواص ماتریس‌های حاصل از مدل‌سازی ریاضی سازه‌های مورد بحث خلاصه می‌شود که مقادیر و بردارهای ویژه‌ی این ماتریس‌ها، ارتباط تنگاتنگی با خواص مکانیکی و دینامیکی سازه‌های مورد بحث دارند.

ماتریس‌هایی که از مطالعه‌ی سازه‌های تکراری بدست می‌آیند عمدتا" در دو گروه کلی ماتریس‌های سه قطری[1] بلوکی و ماتریس‌های سیرکولانت[2] قرار می‌گیرند و مطالعات گسترده‌ای پیرامون آنها توسط محققین انجام شده است.

با توجه به طبیعت سازه‌های تکراری، ماتریس‌های حاصل از مدل‌سازی ریاضی آنها، دارای خواص و ویژگیهایی است که با در نظر گرفتن آن ویژگیها، می‌توان حل ویژه‌ی[3] این نوع مسائل را با سرعت و دقت بیشتری بدست آورد.

در ادامه‌ی فصل حاضر به بررسی پیشینه و منابع مرتبط خواهیم پرداخت. در فصل دوم به اهم کارهای انجام یافته پرداخته می‌شود که در سه بخش زیر تنظیم شده است:

۱- گسترش ضرب‌گراف‌ها به ضرب‌گراف‌های وزندار و فرمول‌بندی جبری توپولوژیک سازه‌ها،
۲- حل مسئله‌ی مقدار ویژه‌ی ماتریس‌های مجاورت و لاپلاسین مدل‌های سازه‌ای تکراری بزرگ مقیاس،
۳- بررسی ارتعاش آزاد سازه‌های تکراری بزرگ مقیاس.

در فصول ۳ و ٤ به ترتیب نتیجه‌گیری و پیشنهادات مرتبط با بحث ارائه می‌شود.

1- Tri-diagonal matrix
2- Circulant matrix
3- Eigensolution

۱- ۲- تاشه پردازی سازه‌ها

کاربردهای عملی روش‌های کلی تحلیل‌سازه‌ها، نیازمند به تشکیل اطلاعات و مشخصات هندسی، مکانیکی و ... سازه مورد مطالعه می‌باشد. بنابراین اولین مرحله برای تحلیل و طراحی سازه‌ها، تاشه‌پردازی، مدل‌سازی و همچنین تهیه‌ی مدل ریاضی آنها می‌باشد.

تاشه‌پردازی سازه‌های بزرگ و تهیه‌ی مشخصات هندسی آن، یکی از مراحل وقت‌گیر در مدل‌سازی و طراحی این گونه سازه‌ها می‌باشد، که می‌تواند همراه با خطا نیز باشد. مطالعاتی در خصوص چگونگی مدل‌سازی این نوع سازه‌ها در دهه‌های اخیر انجام یافته است. تولید اتوماتیک حلقه[1] در روش المان محدود مد نظر پژوهشگران بوده است. از این گروه می‌توان به مطالعات انجام یافته به وسیله‌ی لمافوکو[2] و همکاران [۱]، قاسمی[3] [۲] و بری[4] [۳]، اشاره کرد، که کارهای آنها بیشتر شامل تولید اتوماتیک المان‌های مورد استفاده در روش اجزای محدود تک بعدی، دو بعدی و سه بعدی می‌باشد.

تولید داده‌ها با استفاده از جبر فرمکس‌ها[5] از جمله روش‌هایی می‌باشد که برای تولید تاشه سازه‌های فضایی، توسط دکتر نوشین معرفی شده است، [٦-٤] و در چند دهه‌ی اخیر به طور گسترده توسط محققین مورد استفاده قرار گرفته است. جبر فرمکس‌ها شامل توابعی است که باعث ایجاد تاشه‌های سازه‌ای منظم با استفاده از توابع دوران[6]، انتقال[7]، عملگر آینه‌ای[8] و ... می‌شود، [۷].

تئوری مجموعه‌ها[9]، برای تولید تاشه‌های سازه‌ای، به وسیله‌ی بهروش و همکاران مورد استفاده استفاده قرار گرفته است. در این روش به وسیله‌ی تئوری‌های مقدماتی مجموعه‌ها، روابطی منطقی برای تولید اتوماتیک ارتباطات داخلی[10] بین گره‌ها و المان‌های یک سازه، ایجاد شده است، [۸]. روش مذکور روشی جبری را برای تولید مدل‌های سازه‌ای معرفی می‌کند و همچنین می‌تواند برای ایجاد مدل‌های سازه‌های فضایی نیز بکار رود.

1- Mesh generation
2- Lmafuku
3- Ghassemi
4- Berry
5- Formex algebra
6-Rotation
7-Translation
8-Reflaction
9- Set theory
10- Interconnection

گراف تئوری دارای کاربرد فراوان در مکانیک سازه‌ها می‌باشد و برای تاشه پردازی سازه‌ها نیز مورد استفاده قرار گرفته است. تاشه پردازی سازه‌ها توسط روش گراف تئوریکی به وسیله‌ی کاوه[1]، برای تولید مدل‌های سازه‌ای مورد استفاده قرار گرفته است. توابع تعریف شده بدون هیچ محدودیتی قادر به تولید اتوماتیک مدل‌های سازه‌ای می‌باشند، [۱۰و۹].

استفاده از ضرب گراف‌ها نیز برای تاشه پردازی[2] سازه‌های منظم، در سال‌های اخیر مورد توجه توجه محققین بوده است، [۱۱]. گسترش ضرب گراف‌ها به ضرب گراف‌های جهت‌دار به عنوان روش دیگری برای تولید مدل‌های سازه‌ای توسط کاوه و کوهستانی انجام شده است، [۱۲]. این روش برای تولید سازه‌های فضایی تک لایه و دو لایه بکار رفته است.

گراف‌های وزندار برای ایجاد مدل‌های سازه‌های فضاکار به وسیله‌ی کاوه و همکاران مورد مطالعه قرار گرفته است. گراف‌های وزندار در حالت کلی دارای اطلاعات بیشتری نسبت به گراف‌های ساده هستند و این امر باعث شده است که دامنه‌ی تولید تاشه‌های سازه‌ای توسط ضرب گراف‌ها افزایش یابد. نشان داده شده است که تمامی ضرب گراف‌های تعریف شده برای تاشه پردازی سازه‌ها را می‌توان توسط یک ضرب واحد گراف‌های وزندار بیان کرد. ضرب‌های تعریف شده می‌تواند در روش المانهای محدود نیز بکار رود، [۱۳].

در تمامی روش‌های اشاره شده ابتدا تاشه سازه ایجاد و سپس از تبدیلات هندسی مناسب، برای ایجاد شکل دلخواه، استفاده شده است.

1- Kaveh
2- Configuration

۱- ۳- سازه‌های با تقارن سیکلی

مدل سازه‌های با تقارن سیکلی[1] از دوران مدل یک پاره سازه حول یک محور دوران به وجود می‌آیند و با توجه به چگونگی شکل‌گیری آن در گروه سازه‌های منظم و متقارن قرار می‌گیرند. تاشه بسیاری از سازه‌ها دارای الگوی منظمی هستند که می‌توان تاشه آنها را توسط ضرب دو یا چند گراف ساده بیان کرد. این زیر گراف‌ها، که در شکل‌گیری مدل سازه‌ای استفاده می‌شوند، *مولد*[2] آن مدل سازه‌ای نامیده می‌شوند.

تقارن و انواع آن به طور وسیع، در مکانیک سازه‌ها و سایر علوم مورد استفاده قرار گرفته است، [١٤] . ماتریس‌های حاصل از مطالعه‌ی این نوع سیستم‌های تکراری دوار، که در بررسی سیستم‌های سازه‌ای ظاهر می‌شوند، در زیر مجموعه‌ای از گروه فرم‌های کانونیکال قرار می‌گیرند، [۱۵]. با توجه به طبیعت سازه‌های تکراری با تقارن سیکلی، ماتریس‌های حاصل از مدل‌سازی ریاضی آنها، دارای خواص و ویژگیهایی است که با در نظر گرفتن آن ویژگیها، می‌توان حل ویژه‌ی این نوع مسائل را با سرعت و دقت بیشتری بدست آورد. سازه‌های تکراری سیکلی و سازه‌های حاصل از ضرب چند مولد در هم (مشابه الگوهای ایجاد شده توسط ضرب گراف‌ها)، از جمله گنبدها، پوسته‌ها و رویه‌های دوار، سازه‌های فضایی تک‌لایه و دولایه‌ی گنبدی و ... از گروه این نوع مسائل می‌باشند.

ماتریس‌های حاصل از مدل‌سازی ریاضی، سازه‌های با تقارن سیکلی، از جمله مجاورت و لاپلاسین، سختی و جرم، همگی دارای الگوی[3] مشابهی هستند که پروسه‌ی حل عددی و تحلیلی آنها را آسان می‌کند. مطالعات وسیعی توسط پژوهشگران در خصوص ماتریس‌های حاصل از چنین سازه‌هایی انجام یافته است. این ماتریس‌ها خانواده‌ای از ماتریس‌ها را تشکیل می‌دهند که به ماتریس‌های *سیرکولانت*[4] معروف می‌باشند، [١٦] .

روش‌های متنوعی برای حل ماتریس‌های سیرکولانت ارائه شده است. این روش‌ها بیشتر روش‌های مستقیم جبری هستند، که مبتنی بر تجزیه‌ی ماتریس‌های سیرکولانت به زیر ماتریس‌های کوچکتر می‌باشند. از این گروه می‌توان به تجزیه‌ی **LU** اشاره کرد که مورد توجه محققینی از جمله

1- Cyclic symmetric structures
2- Generator
3- Pattern
4- Circulant matrices

صلاح [1] و همکاران بوده است. تجزیه‌ی **LU** ی ماتریس سیرکولانت منجر به حل معادله‌ی غیر خطی ماتریسی درجه دوم می‌شود، [۱۷].

الگوریتم‌هایی برای حل عددی، تحلیلی و تکراری [2] معادله‌ی مذکور، به وسیله‌ی برسیلاو [3] ارائه شده است، [۱۸].

از دیگر روش‌های حل دستگاه معادلات روش‌های تکراری هستند که سرعت همگرایی این روش‌ها بستگی به شعاع طیفی ماتریس مورد مطالعه دارد و اغلب با ضرب ماتریس‌های پیش حالت ساز [4] همگرایی بهبود می‌یابد. ماتریس بلوکی موثر پیش حالت ساز برای تسریع در همگرایی حل تکراری ماتریس‌های سیرکولانت توسط پژوهشگرانی چون کومار [5] و همکاران مورد توجه بوده است، [۱۹].

ماتریس‌های مجاورت و لاپلاسین سازه‌های دوار نیز به فرم سه قطری بلوکی با بلوک‌هایی در دو انتهای قطر فرعی است که پروسه‌ی حل این فرم کانونیکال را برای دستیابی به مقادیر و بردارهای ویژه‌ی آن به سهولت امکان پذیر می‌نماید، این نوع ماتریس‌های سیرکولانت نیز توسط کاوه و کوهستانی مورد بررسی قرار گرفته است، [۱۲].

صلبیت سازه‌های فضایی با تقارن سیکلی با اتصالات مفصلی به وسیله‌ی بررسی ماتریس ضرایب حاصل از معادلات تعادل آن توسط ترنای [6] مورد بررسی قرار گرفته است و نشان داده شده است که صلبیت و درجه‌ی نامعینی چنین سیستمی به تعداد سیکل‌های تشکیل دهنده‌ی آن بستگی ندارد، [۲۰]. در ضرب گراف‌ها اگر حداقل یکی از مولدها سیکل باشد با شماره‌گذاری [7] مناسب گرهی، ماتریس‌های مجاورت و لاپلاسین حاصل نیز به فرم ماتریس سیرکولانت خواهد بود. روابطی برای ایجاد ارتباط بین مقادیر ویژه‌ی مولدها و کل سیستم توسط کاوه و همکاران ایجاد شده و برای شماره‌گذاری بهینه‌ی گره‌ها مورد استفاده قرار گرفته است، [۲۱].

1- Salah & El-Sayed
2- Iterative
3- Borislav
4- Preconditioner
5- Kumar
6- Tarnai
7- Ordering

ارتعاش سازه‌های با تقارن سیکلی به وسیله‌ی شن[1] و همچنین تحلیل دینامیکی سازه‌های فضایی بزرگ مقیاس توسط مک دانیل[2] مورد مطالعه قرار گرفته است، که استفاده از خواص تقارن سیکلی با کاهش زیادی در زمان حل مسئله و همچنین باعث افزایش دقت محاسباتی شده است، [۲۳و۲۲].

تحلیل مدال سازه‌های با تقارن سیکلی و همچنین تحلیل دینامیکی غیرخطی این نوع سازه‌ها به نقل از منبع، [۲٤] بررسی شده است، که با توجه به تقارن موجود در سیستم همراه با دقت بالا و کاهش قابل توجه در حجم عملیات محاسباتی بوده است، [۲۵].

مسائل تعمیم یافته مقدار ویژه برای بررسی ارتعاش آزاد سازه‌های با تقارن سیکلی توسط تجزیه ماتریسی، توسط کوهستانی[3] مورد مطالعه قرار گرفته است. در این روش معادله‌ی دینامیکی متناظر با سیستم، توسط تجزیه‌ی ماتریسی به وسیله‌ی انطباق ماتریس حاصل با کانونیکال فرم‌ها، به زیر ماتریس‌های کوچک‌تر تجزیه شده و مقادیر و بردارهای ویژه به سهولت و دقت بالایی محاسبه شده‌اند، [۲٦] .

محاسبه‌ی مقادیر ویژه‌ی ضرب کارتزین، مستقیم، کارتزین قوی و ... گراف‌ها توسط کاوه و همکاران بررسی شده است، که روش آنها مبتنی بر تجزیه‌ی ضرب گراف‌ها و بدست آوردن مقادیر ویژه‌ی کل سیستم با استفاده از مقادیر ویژه‌های زیر گراف‌های وزن‌دار اصلاح شده، می‌باشد. ماتریس مجاورت و لاپلاسین چنین ضرب‌هایی به کمک ضرب کرونکر تشکیل، و نحوه‌ی محاسبه‌ی مقادیر ویژه‌ی آنها مورد مطالعه قرار گرفته است، [۲۷] .

اخیرا" روش‌هایی برای تحلیل سازه‌های تکراری منظم، با تقارن سیکلی به کمک مقادیر و بردارهای ویژه‌ی آن به وسیله‌ی کاوه و رحامی[4] ارائه شده است. در این روش معکوس ماتریس سختی با استفاده از مقادیر و بردارهای ویژه مستقیما" بدست می‌آید. جابجایی‌های گرهی و همچنین نیروهای داخلی المان‌های سازه با استفاده از مقادیر و بردارهای ویژه محاسبه شده است، [۲۸] .

بارهای کمانشی سازه‌های تکراری با تقارن سیکلی توسط کاوه و همکاران مورد مطالعه قرار گرفته است. محاسبه بارهای کمانشی توسط کانونیکال فرم منطبق بر شرایط مسئله به سهولت انجام

1- Shen
2- Mc Daniel & Chang Rahami
3- Koohestani
4- Rahami

یافته است. نتایج بدست آمده حاکی از این است که سرعت و دقت محاسباتی تواما" افزایش یافته است، [۲۹] .

ارتعاش آزاد رویه‌ها و پوسته‌های با تقارن سیکلی بوسیله‌ی فرم‌های کانونیکال ماتریسی محاسبه شده است. تمامی مدهای ارتعاشی این سازه‌ها به وسیله‌ی محاسبه‌ی مدهای ارتعاشی یک قطاع از سازه بدست آمده است، [۳۰] .

تحلیل کمانشی سازه‌های تکراری پوسته‌ای با تقارن سیکلی نیز به وسیله‌ی سن[1] و همکاران مورد مطالعه قرار گرفته است. با بررسی تغییر شکل‌های آن، کل سازه به زیر سازه‌هایی تقسیم شده است و برای محاسبه بارهای کمانشی کل سیستم مورد استفاده قرار گرفته است، [۳۱] .

بررسی بارهای کمانشی پوسته‌ها به روش المانهای محدود، [۳۲] و همچنین مقایسه‌ای بین روش‌های مختلف حل ارتعاش آزاد با بارگذاری کلی سازه‌های با تقارن سیکلی به نقل از منبع، [۳۳] مورد بررسی قرار گرفته است.

1- Cen