دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی
دانشکده علوم

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی–آنالیز عددی

عنوان

روش‌های هم‌محلی چندگامی و کاربرد آنها برای معادلات انتگرالی

نگارش

رقیه حسین زاده

استاد راهنما

دکتر محمود هادیزاده یزدی

۱۳۹۲

چکیده

در این پایان‌نامه به بررسی روش‌های هم‌محلی چندگامی برای معادلات انتگرالی ولترا با هدف افزایش مرتبه همگرایی روش هم‌محلی بدون افزایش هزینه محاسباتی خواهیم پرداخت. روش ارائه شده ضمن استفاده از مقادیر تابع در r گام قبلی با اعمال شرایط درونیابی در این نقاط تقریب پیوسته‌ای برای تابع مجهول ارائه می‌دهد. نشان می‌دهیم روش‌های هم‌محلی r گامی با m پارامتر از مرتبه همگرایی یکنواخت $m+r$ و $2m+r-1$ در حالت فوق همگرایی هستند. در ادامه به معرفی روش دوگامی هم‌محلی می‌پردازیم که با متعادل کردن شرایط هم‌محلی، مرتبه همگرایی روش هم‌محلی را افزایش می‌دهد و بدلیل داشتن پارامترهای آزاد، A−پایداری را برای روش بدست می‌دهد. همچنین به بررسی روش هم‌محلی چندگامی برای معادلات انتگرال دو بعدی ولترا می‌پردازیم. در انتها با ارائه مثال‌های عددی متنوعی برتری روش‌های مذکور را نسبت به روش هم‌محلی نشان می‌دهیم.

کلمات کلیدی: معادلات انتگرال ولترا، روش‌های هم‌محلی چندگامی، چندجمله‌ای‌های اسپلاین، معادلات انتگرال دوبعدی ولترا، تحلیل همگرایی، ناحیه پایداری روش.

مقدمه

معادلات انتگرال ولترا (VIEs)، مدل ریاضی بسیاری از مسائل تکاملی [1] است که در زیست شناسی، شیمی، فیزیک و مهندسی رخ می‌دهد. به‌دلیل محاسبه جمله لنگی که شامل پیشینه پدیده و لذا وابسته به زمان است، تعیین جواب‌های عددی این دسته از معادلات پرهزینه است. هدف از این پایان‌نامه معرفی روش‌های عددی برای حل عددی معادلات انتگرال ولترا است که جواب تقریبی خوبی با هزینه محاسباتی پایین ارائه می‌دهند. در این راستا روش هم‌محلی چندگامی ارائه شده است که استفاده از مقادیر تقریب هم‌محلی در گام‌های قبل، که سبب تقریب پیوسته‌ای برای جواب می‌شود، این امکان را فراهم می‌آورد که با طول گام نه چندان کوچک هم جواب‌های بهتری بدست آورد. همگرایی روش عددی را نیز بررسی خواهیم کرد. ایده روش را برای معادلات انتگرال دوبعدی ولترا بکار برده و با ارائه مثال‌هایی کارآیی روش را نشان می‌دهیم.

در فصل اول این پایان‌نامه، ابتدا معادلات انتگرال ولترا معرفی و به بیان قضیه وجود و یکتایی جواب برای این دسته از معادلات می‌پردازیم. سپس قضایا و تعاریف مورد نیاز در فصل‌های آتی بیان می‌شود.

در فصل دوم، روش‌های هم‌محلی برای معادلات انتگرال ولترای نوع دوم را بیان نموده و پس از توصیف ساختار روش، مرتبه همگرایی روش در دو حالت سرتاسری و موضعی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در فصل سوم، روش‌های هم‌محلی چندگامی برای حل عددی این دسته از معادلات در شکل‌های خطی و غیر خطی معرفی شده و به بررسی مرتبه همگرایی و پایداری این روش‌ها می‌پردازیم.

نهایتاً در فصل چهارم، ایده روش را برای حل عددی معادلات انتگرال دوبعدی ولترا بکار می‌بریم و با ارائه مثال‌هایی برتری روش نسبت به روش هم‌محلی نشان داده می‌شود.

---

[1] حافظه‌دار

فهرست مطالب

لیست تصاویر

لیست جداول

فصل ۱

مفاهیم اولیه

در این فصل به معرفی معادلات انتگرال ولترا و برخی مفاهیم و قضایایی که در فصل‌های بعدی مورد نیاز است می‌پردازیم.

۱.۱ تاریخچه

نظریه معادلات انتگرال زمینه تحقیقاتی پرکاری برای سال‌های متمادی بوده است و مبتنی بر آنالیز تابعی و نظریه تقریب است.

یک معادله انتگرال، معادله تابعی است که تابع مجهول زیر یک یا چند علامت انتگرال ظاهر می‌شود. در معادله انتگرال از نوع ولترا انتگرال‌های شامل تابع مجهول، با حد بالای انتگرال‌گیری متغیر مشخص می‌شوند. به عبارت دقیق‌تر فرض کنید $I=[0,T]$ بازه کراندار معلومی باشد که در آن $T>0$ و $S=\{(t,s): 0\leq s\leq t\leq T\}$. معادله تابعی با تابع مجهول y به‌فرم زیر، معادله انتگرال ولترای غیرخطی نوع دوم نامیده می‌شود:

$$y(t)=\int_0^t K(t,s,y(s))ds+f(t),\quad t\in I$$

که در آن f و K توابع حقیقی معلومی هستند .

در یک معادله انتگرال نوع اول تابع مجهول فقط زیر علامت انتگرال ظاهر می‌شود؛ از اینرو معادله انتگرال

ولترای غیرخطی نوع اول به‌فرم زیر داده می‌شود:

$$\int_0^t K(t,s,y(s))ds = f(t), \quad t \in I.$$

واژه"Integral Equation" در سال ۱۸۸۸ در مقاله‌ای در ارتباط با معادلات دیفرانسیل جزئی بیضوی توسط ریاضیدان آلمانی ریموند[۱] ظاهر شد. واژه"Volterra Integral Equation" توسط ریاضیدان رومانیایی ترایان لالسکو[۲] در سال ۱۹۰۸ ابداع شد، که ظاهراً ادامه کارهای استاد فرانسوی‌اش امیل پیکارد[۳] بود.

نظریه معادلات انتگرال به قبل از قرن نوزدهم می‌رسد. ریاضیدان نروژی آبل[۴] در کارهایش در سال‌های ۱۸۲۳ و ۱۸۲۶، مساله تعیین معادله منحنی در یک صفحه عمودی را مورد بررسی قرار داد و نشان داد زمان سپری شده توسط یک جسم برای لغزش تحت تاثیر نیروی ثقل، در امتداد این منحنی از یک ارتفاع مثبت تا صفحه افقی برابر با تابع یکنواختی از ارتفاع است. او نشان داد که این مساله می‌تواند با یک معادله انتگرال نوع اول به‌فرم زیر شرح داده شود:

$$\int_0^t (t-s)^{-\alpha} y(s)ds = f(t), \quad t > 0.$$

و ثابت کرد که برای هر $\alpha \in (۰,۱)$ جواب معادله فوق با فرمول زیر داده می‌شود:

$$y(t) = c_\alpha \frac{d}{dt}(\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds), \quad t > 0,$$

که در آن $c_\alpha = sin(\alpha\pi)/\pi = ۱/(\Gamma(\alpha)\Gamma(۱-\alpha))$.

در سال ۱۸۹۶، ریاضیدان ایتالیایی "ولترا" نظریه‌ای راجع به معکوس معادلات انتگرال نوع اول را منتشر کرد. وی معادله انتگرال زیر را با مشتق‌گیری به معادله انتگرال نوع دوم تبدیل کرد:

$$\int_0^t K(t,s)y(s)ds = f(t), \quad t \in [0,T], \quad f(0) = 0,$$

---

[۱] Paul du Bois-Reymond

[۲] Traian Lalesco

[۳] Emile Picard

[۴] Niels Hendrik Abel

که در آن هسته و تابع آزاد به‌صورت زیر است

$$\tilde{K}(t,s) = -\frac{\partial K(t,s)}{\partial t} \cdot \frac{1}{K(t,t)}, \quad و \quad \tilde{f}(t) = \frac{\acute{f}(t)}{K(t,t)}.$$

و جواب یکتای معادله حاصله عبارتست از:

$$y(t) = f(t) + \int_0^t \tilde{R}(t,s) f(s) ds, \quad t \in I,$$

که در آن $\tilde{R}(t,s)$ هسته حلال $\tilde{K}(t,s)$ بوده و برحسب هسته‌های تکراری $\tilde{K}_n$ به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\tilde{K}_n(t,s) = \int_s^t \tilde{K}(t,u)\tilde{K}_{n-1}(u,s) du, \quad n \geq 2, \quad \tilde{K}_1(t,s) = \tilde{K}(t,s).$$

ولترا ثابت کرد که این دنباله یک دنباله مطلقاً همگرای یکنواخت در مجموعه زیر است،

$$S = \{(t,s) : 0 \leq s \leq t \leq T\}.$$

وجود جواب برای این دسته از معادلات بطور رسمی با معرفی هسته‌های تکراری و سری‌های نیومن وابسته به آن ثابت شد. مفهوم هسته‌های تکراری و سری‌های نیومن وابسته، اولین بار توسط ریاضیدان فرانسوی جوزف کاکیو[1] در سال ۱۸۶۴ استفاده شد. برای جزئیات بیشتر و تاریخچه معادلات انتگرال ولترا می‌توان به [۷] مراجعه کرد.

معادلات انتگرال ولترا در بررسی مسائل مرتبط با جمعیت انسانی، انتشار اپیدمی، استهلاک تجهیزات و نرخ جایگزینی آن‌ها، مسائل الکتروتکنیک و بسیاری از مسائل علمی پدید می‌آیند [۷، ۱۶].

روش‌های عددی متعددی برای این مرتبه از معادلات انتگرال وجود دارد. در مراجع [۷، ۴] بطور جامع به حل عددی معادلات انتگرال ولترا پرداخته شده است.

۲.۱ معادلات انتگرال ولترا

معادله انتگرال، معادله تابعی است که در آن تابع مجهول زیر علامت انتگرال ظاهر می‌شود و به دو دسته کلی معادلات ولترا و معادلات فردهولم تقسیم می‌شود. در مباحث نظری مربوط به معادلات انتگرال، معادلات ولترا

[1] Joseph Caque

نقش و اهمیت ویژه‌تری نسبت به معادلات فردهولم دارند. در یک معادله فردهولم ناحیه انتگرال‌گیری ثابت است، در حالی‌که در معادلات ولترا، این ناحیه متغیر است، به‌طوری‌که ناحیه انتگرال‌گیری وابسته به تابعی ساده از متغییری مستقل است.

یک تمایز مهم بین معادلات ولترا و فردهولم مربوط به چگونگی تبدیل مسائل مقادیر اولیه و مسائل مقادیر مرزی در معادلات دیفرانسیل معمولی [1] (ODE) است. معادلات ولترا در ارتباط با سیستم‌های تکاملی یا وابسته به زمان پدید می‌آیند به‌عبارتی دیگر رفتار مساله در لحظه مشخص t علاوه بر زمان t به موقعیت‌های قبلی نیز وابسته است. در حالت کلاسیک، جواب معادله دیفرانسیل معمولی

$$\acute{y}(t) = f(t, y(t)),$$

به‌فرض معلوم بودن $y(t_\circ)$ برای $t > t_\circ$، به‌راحتی مشخص شده و رفتار جواب و محاسبه مقدار عددی آن در نقطه $t = t_\circ$ به مقادیر قبلی آن نیاز ندارد. با این وجود مسائلی وجود دارد که تنها اطلاع در نقطه جاری کافی نیست و لازم است بدانیم برای برآورد لحظه بعدی، موقعیت $y(t_\circ)$ چگونه است. در مواقعی، چنین مدل‌هایی را سیستم‌های حافظه‌دار [2] می‌نامند. اگر وابستگی به پیشینه را با

$$\int_0^t K(t, s, y(s))ds,$$

نشان دهیم، آنگاه معادله مدل شده از نوع ولترا است. معادله احیاء [3]، از شناخته شده‌ترین معادلات از این نوع است.

۱.۲.۱ معادلات انتگرال ولترای تک بعدی

در حالت کلی می‌توان معادلات انتگرال فردهولم را به‌فرم زیر در نظر گرفت:

$$q(t)y(t) = g(t) + \int_a^b K(t, s, y(s))ds,$$

[1] Ordinary Differential Equations

[2] History-Depedent

[3] Renewal

که در آن $a, b \in \mathbb{R}$، در صورتیکه $q(t) = 0$ معادله فوق به معادله انتگرال فردهولم نوع اول و اگر $q(t) = 1$ به معادله انتگرال فردهولم نوع دوم مبدل خواهد شد. معادله‌ای به‌فرم

$$g(t) + \int_a^t K(t,s,y(s))ds = y(t), \quad t \in I = [a,T], \tag{۱.۱}$$

را معادله انتگرال ولترا از نوع دوم می‌نامند [۳]. که در اینجا $g(t) \in C(I)$ و $K(t,s,.) \in C(D \times \mathbb{R})$ توابعی معلوم و $y(.)$ تابع مجهول است، که در آن

$$D := \{(t,s) : a \le s \le t \le T\}.$$

در حالت کلی یک معادله انتگرال ولترا را می‌توان به‌فرم زیر بیان کرد:

$$F(y(t), t, \int_a^t K(t,s,y(s))ds, g(t)) = 0, \qquad a \le t \le T.$$

از آنجا که در اکثر کاربردهای عملی، رفتار جواب روی کل محور حقیقی مورد نظر هست در این حالت رفتار جواب را از روی جواب محدود شده روی مقادیر بزرگ ولی متناهی T بدست می‌آورند و لذا در محاسبات عددی ضروریست حالتی در نظر گرفته شود که T متناهی است.

بدون از دست دادن کلیت مساله، حدود متغیر مستقل را به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که حد پایین انتگرال‌گیری صفر باشد و معادله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$g(t) + \int_0^t K(t,s,y(s))ds = y(t), \quad 0 \le t \le T.$$

معادلات ولترا را می‌توان حالت خاصی از معادلات فردهولم نیز در نظر گرفت. برای مثال معادله

$$g(t) + \int_0^t K(t,s,y(s))ds = y(t),$$

می‌تواند به شکل معادله فردهولم زیر نوشته شود:

$$g(t) + \int_0^b K(t,s,y(s))ds = y(t)$$

که در آن برای $s > t$ داریم $K(t,s,.) = 0$،

$$g(t) + \int_0^t K(t,s,y(s))ds + \int_t^b K(t,s,y(s)) = y(t).$$

هسته K را منظم گوییم هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

- برای هر $a \le s, t \le b$، داشته باشیم:

$$\int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2 ds dt < \infty,$$

- برای هر $a \le s \le b$،

$$\int_a^b |K(s,t)|^2 dt < \infty,$$

- برای هر $a \le t \le b$،

$$\int_a^b |K(s,t)|^2 ds < \infty.$$

در سراسر این پایان‌نامه معادلات انتگرال ولترا را با هسته‌های منظم در نظر خواهیم گرفت.

۲.۲.۱ معادلات انتگرال ولترا در $\mathbb{R}^۲$

اگر در معادلات انتگرال ولترا تابع مجهول دومتغیره باشد، آنگاه یک معادله انتگرال ولترای دوبعدی به‌صورت زیر خواهیم داشت:

$$f(x,y) = g(x,y) + \int_0^x \int_0^y K(x,y,\xi,\eta) f(\xi,\eta) d\eta d\xi, \quad (x,y) \in D, \tag{۲.۱}$$

که در آن $K \in C(S)$ و $g \in C(D)$ توابعی معلوم و $f \in C(D)$ تابعی مجهول است به‌طوری‌که

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0 \le x \le X, \quad 0 \le y \le Y\},$$

$$S := \{(x,y,\xi,\eta) : \quad 0 \le \xi \le x \le X, \quad 0 \le \eta \le y \le Y\}.$$

۳.۱ وجود و یکتایی جواب معادلات انتگرال ولترا

قضیه ۱.۳.۱. اگر $K(t,s)$ و $g(t)$ توابع پیوسته‌ای بترتیب روی $T \ge t \ge s \ge ۰$ و $۰ \le t \le T$ باشند، آنگاه معادله انتگرال

$$y(t) = g(t) + \int_0^t K(t,s) y(s) ds, \quad t \in [0,T],$$

دارای جواب یکتای پیوسته‌ای است (رجوع کنید به [۱۹]،صفحه ۳۰).

در قضیه بعدی وجود و یکتایی جواب برای معادلات انتگرال ولترای غیرخطی بیان می‌شود. برای جزئیات بیشتر و برهان قضیه، [۳] را ببینید.

قضیه ۲.۳.۱. معادله انتگرال زیر را در نظر بگیرید:

$$y(t) = g(t) + \int_0^t K(t,s,y(s))ds, \quad t \in [0,T],$$

فرض کنید a, b و L اعداد مثبتی باشند و برای $\alpha \in (\circ, \text{۱})$ ثابت، $c = \alpha/L$ تعریف شود و

۱. $g \in C[\circ, a]$،

۲. $K \in C(D)$ که در آن، $D = \{(t,s,y): \quad \circ \le s \le t \le a,\ |y - g(t)| \le b\}$

۳. K روی مجموعه D در شرط لیپ‌شیتس زیر صدق کند:

$$|K(t,s,y) - K(t,s,x)| \le L|y - x|,$$

اگر $M = \max_D |K(t,s,y)|$، $T = min[a, b/M, c]$، آنگاه جوابی یکتا روی $[\circ, T]$ که، برای معادله فوق وجود دارد.

قضیه ۳.۳.۱. فرض کنید که $K \in C(S)$. آنگاه برای هر $g \in C(D)$ معادله انتگرال (۲.۱) دارای جواب یکتای $f \in C(D)$ است. این جواب به‌فرم زیر نشان داده می‌شود:

$$f(x,y) = g(x,y) + \int_0^x \int_0^y R(x,y,\xi,\eta) g(\xi,\eta) d\eta d\xi, \quad (x,y) \in D$$

که در آن $R = R(x,y,\xi,\eta)$ هسته حلال متناظر با هسته داده شده K است *[۴]*.

در این پایان‌نامه ما به دنبال توابعی به شکل چندجمله‌ای‌های تکه‌ای برای جواب تقریبی معادلات انتگرال ولترا هستیم. چنین توابعی، چندجمله‌ای‌های اسپلاین[۱] نامیده می‌شوند.

[۱] Spline Polynomials

۴.۱ افراز و فضاهای اسپلاین $S_k^{(d)}(\Pi_N)$

برای $N \in \mathbb{N}$ داده شده فرض کنید:

$$\Pi_N = \{t_0, t_1, ..., t_N : \quad 0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_N = T\}$$

افرازی از بازه $[\circ, T]$ باشد، افراز Π_N را منظم[1] نامیم اگر

$$\max_{n=0,\dots,N-1}(t_{n+1} - t_n) \to 0 \quad s.t \quad N \to \infty.$$

دنباله‌ای از افرازها را برای $[\circ, T]$ افراز شبه یکنواخت[2] نامیم اگر عدد ثابت θ وابسته به N موجود باشد به‌طوری‌که:

$$\max_{n=0,\dots,N-1}(t_{n+1} - t_n) / \min_{n=0,\dots,N-1}(t_{n+1} - t_n) \leq \theta, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{۳.۱}$$

اگر $\theta = ۱$، آنگاه Π_N افراز یکنواخت است.

حال نشان می‌دهیم یک افراز شبه یکنواخت، منظم نیز هست. داریم:

$$h_n = t_{n+1} - t_n, \quad n = 0, \dots, N-1$$

$$h = \max_{n=0,\dots,N-1}(t_{n+1} - t_n)$$

چون

$$\min_{n=0,\dots,N-1} h_n \leq \frac{T}{N},$$

از نامساوی (۳.۱) داریم:

$$h \leq \theta \min_{n=0,\dots,N-1} h_n \leq \theta \frac{T}{N},$$

که منظم بودن افرازهای شبه یکنواخت را نشان می‌دهد.

---

[1] Regular

[2] Quasi-Uniform

تعریف ۱.۴.۱. فرض کنید k و d اعداد صحیحی باشند که در رابطه $-1 \leq d \leq k-1$ صدق می‌کنند. فضای چندجمله‌ای‌های اسپلاین از درجه k تا مشتق مرتبه d پیوسته را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} S_k^{(d)}(\Pi_N) =& \{w : w|_{(t_n,t_{n+1}]} := w_n \in \pi_k, n = 0, ..., N-1; \\ & w_n^{(i)}(t_n) = w_{n+1}^{(i)}(t_n) \quad 0 \leq i \leq d, n = 0, ..., N-1\}, \end{aligned}$$

که π_k، مجموعه چندجمله‌ای‌هایی از درجه نابیشتر از k بوده و $w|_{(t_n,t_{n+1}]}$ نشان دهنده تحدید $w : [0,T] \to \mathbb{R}$ روی زیر بازه $(t_n, t_{n+1}]$ است.

توجه کنید که $S_k^{(-1)}(\Pi_N) = \{w : w|_{(t_n,t_{n+1}]} \in \pi_k, n = 0, ..., N-1\}$ در نقاط شبکه‌ای $t_1, ..., t_{N-1}$، ناپیوستگی دارد.

بدیهی است که فضای $S_k^{(-1)}(\Pi_N)$ همواری کمتری نسبت به $S_k^{(d)}(\Pi_N)$ دارد و با افزایش d همواری بیشتر می‌شود. همچنین می‌دانیم که بعد فضای $S_k^{(d)}(\Pi_N)$ برابر است با([۷]):

$$dim S_k^{(d)}(\Pi_N) = N(k-d) + d + 1 \qquad -1 \leq d \leq k-1.$$

۵.۱ درونیابی

۱.۵.۱ درونیاب چندجمله‌ای تکه‌ای

در هر زیر بازه $(t_n, t_{n+1}],\ n = 0, \ldots, N-1$ از شبکه Π_N، $m \geq 1$ نقطه درونیابی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$t_{n,j} = t_n + c_j h_n, \quad j = 1, ..., m, \quad n = 0, ..., N-1,$$

که $h_n = t_{n+1} - t_n$ و $c_1, \ldots, c_m$ پارامترهای ثابت (پارامترهای هم‌محلی) هستند که مستقل از n و N بوده و در رابطه زیر صدق می‌کنند :

$$0 \leq c_1 < ... < c_m \leq 1.$$

عملگر درونیاب را به‌صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$P_N = P_N^{(k)} : C\,[0,T] \longrightarrow S_{k-1}^{-1}(\Pi_N),$$

که برای هر تابع پیوسته $x : [\circ, T] \longrightarrow \mathbb{R}$، درونیاب چندجمله‌ای تکه‌ای[1] آن را در نقاط درونیاب بدست می‌دهد:

$$P_N x \in S_{k-1}^{-1}(\Pi_N), \quad x \in C[\circ, T],$$
$$(P_N x)(t_{n,j}) = x(t_{n,j}), \quad j = 1, ..., k; \quad n = \circ, ..., N-1.$$

تابع $(P_N x)(t)$ بطور مستقل در هر زیر بازه $[t_n, t_{n+1}]$ تعریف می‌شود. منظور از $(P_N x)(t_{n,1})$ حد راست $\lim_{t\to t_n, t>t_n}(P_N x)(t)$ و $(P_N x)(t_{n,m})$ نشان دهنده حد چپ $\lim_{t\to t_{n+1}, t<t_{n+1}}(P_N x)(t)$ است بنابراین $(P_N x)(t)$ می‌تواند در نقاط $t = t_\circ, t_1, \dots, t_{N-1}$ ناپیوسته باشد. توجه داریم که در حالت $c_1 = \circ, c_m = 1$ تابع $(P_N x)$ روی بازه $[\circ, T]$ پیوسته است [۷].

۲.۵.۱ درونیابی دومتغیره

در این بخش به معرفی درونیاب دومتغیره از فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^2$ با ناحیه مستطیلی می‌پردازیم که در واقع تعمیمی از درونیابی توابع تک‌متغیره است[۲۲].

معادله $z = f(x,y)$ که متناظر با رویه‌ای در فضای سه‌بعدی اقلیدسی است را در نظر می‌گیریم با ثابت گرفتن نقاط $x = x_\circ, x_1, \dots, x_m$ و استفاده از درونیابی لاگرانژ تک‌متغیره، تابع درونیابی به‌صورت زیر ساخته می‌شود؛

$$\xi(x,y) = \sum_{i=0}^{m} f(x_i, y) L_i(x),$$

که در آن:

$$L_i(x) = \prod_{j\neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

[1] Piecewise Polynomial Interpolation

تابع $\xi(x,y)$ را تابع آمیختگی [۱] گویند که برای نشان دادن وابستگی آن به تابع f به‌صورت $\xi(f;x,y)$ نشان داده می‌شود. تابع ترکیب $\xi(f;x,y)$ در صفحه $x=x_i$ برابر با تابع $f(x,y)$ است.

حال برای درونیابی در نقاط $y=y_۰,y_۱,\dots,y_n$ می‌توان نقش متغیر x را با y در ساخت تابع ترکیب عوض کرد. چندجمله‌ای پایه‌ای نسبت به متغیر y را با $M_j(y)$ نشان خواهیم داد، که

$$M_j(y)=\prod_{k\neq j}\frac{y-y_k}{y_j-y_k}.$$

پس تابع ترکیب دیگری به‌صورت زیر ساخته می‌شود؛

$$\eta(x,y)=\eta(f;x,y)=\sum_{j=0}^{n}f(x,y_j)M_j(y),$$

که با $f(x,y)$ در تقاطع صفحه‌های $y=y_j$ با $z=f(x,y)$ مقدار برابری دارد. با بکار بردن فرآیند تابع ترکیب دومی برای تابع ترکیب اول $\xi(x,y)$ بدست می‌آوریم؛

$$p(x,y)=\eta(\xi;x,y)=\sum_{j=0}^{n}(\sum_{i=0}^{m}f(x_i,y_j)L_i(x))M_j(y)$$

که به صورت زیر نشان می‌دهیم؛

$$p(x,y)=\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{m}f(x_i,y_j)L_i(x)M_j(y).$$

با تعریف شبکه مستطیلی متشکل از $(n+۱)\times(m+۱)$ نقطه، به‌فرم زیر

$$X\times Y=\left\{(x_i,y_j)|x_i\in X,y_j\in Y\right\},$$

که در آن

$$X=\{x_0,x_1,\dots,x_m\},\quad Y=\{y_0,y_1,\dots,y_n\},$$

مشاهده می‌کنیم که $L_i(x)M_j(y)$ در نقطه (x_i,y_j) مقدار یک و در سایر نقاط $X\times Y$ مقدار صفر را اختیار می‌کند که در آن $L_i(x)$ و $M_j(y)$ و $L_i(x)M_j(y)$ بترتیب چندجمله‌ای‌های پایه‌ای درونیاب لاگرانژ برای مجموعه‌های X و Y و $X\times Y$ است. توجه داریم که $p(x,y)$ روی همه نقاط $X\times Y$ مقداری برابر با $f(x,y)$ دارد.

[۱] Blending Function

۶.۱ قواعد انتگرال‌گیری عددی

در حل عددی معادلات انتگرال ولترا، در حالت کلی انتگرال‌های موجود در معادله را نمی‌توان به‌صورت تحلیلی محاسبه کرد و برای این منظور می‌توان از قواعد انتگرال‌گیری عددی مناسبی استفاده کرد[؟، ۷].

۱.۶.۱ انتگرال‌گیری گاوس-لژاندر

در قواعد انتگرال‌گیری عددی تقریب‌هایی به‌صورت زیر را در حالت کلی در نظر می‌گیریم:

$$I_n(f)=\sum_{j=1}^{n} w_{j,n}f(x_{j,n}) \doteq \int_a^b W(x)f(x)dx = I(f)$$

که در آن تابع $W(s)$ تابع وزن نامیده می‌شود به‌طوری‌که روی $[a,b]$ نامنفی و انتگرال‌پذیر بوده و گره‌های $x_{j,n}$ و وزن‌های $w_{j,n}$ طوری انتخاب می‌شوند که برای چندجمله‌ای $f(x)$ تا بزرگترین درجه ممکن، $I_n(f)$ برابر با $I(f)$ باشد.

در انتگرال‌گیری گاوس-لژاندر[۱] گره‌های زیر را داریم:

$$x_{n,j}=\frac{b-a}{2}t_{n,j}+\frac{b+a}{2}, \quad j=0,\dots,n,$$

که در آن $t_{n,j}$، $n+۱$ ریشه چندجمله‌ای لژاندر $p_{n+۱}(t)$ بوده و وزن‌ها از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$w_{n,j}=\frac{b-a}{(1-t_{n,j})^2}\frac{1}{[\acute{p}_{n+1}(t_{n,j})]^2}.$$

۲.۶.۱ قواعد رادو و لباتو

گره‌های x_j بدست آمده از انتگرال‌گیری گاوس-لژاندر شامل نقاط ابتدایی و انتهایی بازه نمی‌باشند. در مواردی نیاز است که برای بدست آوردن فوق همگرایی روش هم‌محلی از یک یا هر دو نقطه انتهایی بازه نیز استفاده شود. با انتخاب سایر نقاط به‌طوری‌که بیشترین دقت ممکن را برای قواعد انتگرال‌گیری داشته باشیم، بترتیب

---

[۱] Gauss-Legendre