بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه کاشان
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
در رشته ریاضی کاربردی (گرایش آنالیز عددی)

عنوان:

آنالیز همگرائی و پایداری طرح‌های تفاضلات متناهی برای حل برخی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی

استاد راهنما:

دکتر اکبر محبی

توسط:

زهرا فراز

شهریورماه ۱۳۹۲

بسمه تعالی

تاریخ:
شماره:
پیوست:

دانشگاه کاشان
دانشکده علوم

مدیریت تحصیلات تکمیلی دانشگاه

صورتجلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

نام و نام خانوادگی دانشجو : **خانم زهرا فراز**

شماره دانشجویی : ۹۰۱۱۵۸۶۰۱۱

رشته : **ریاضی کاربردی گرایش آنالیزعددی** دانشکده : علوم ریاضی

عنوان پایان‌نامه : " آنالیز همگرایی و پایداری طرح‌های تفاضلات متناهی برای حل برخی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی"

این پایان‌نامه به مدیریت تحصیلات تکمیلی به منظور بخشی از فعالیتهای تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد ارائه می‌گردد.دفاع از پایان نامه در تاریخ ۹۲/۰۶/۲۷ مورد تأیید و ارزیابی هیأت داوران قرار گرفت و

با نمره به عدد: ۱۹٫۵ به حروف: نوزده و نیم و درجه عالی به تصویب رسید.

اعضاء هیأت داوران

عنوان	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱. استاد راهنما :	دکتر اکبر محبی	استادیار	
۲. استاد مشاور :	دکتر حمیدرضا تبریزی‌دوز	استادیار	
۳. متخصص و صاحب نظر داخل دانشگاه :	دکتر عباس سعادتمندی	دانشیار	
٤. متخصص و صاحب نظر داخل دانشگاه :	دکتر فاطمه ذبیحی	استادیار	
۵. نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه	دکتر عباس سعادتمندی	دانشیار	

مدیر تحصیلات تکمیلی:	دکتر منصورنیا

آدرس: کاشان-بلوار قطب راوندی
کدپستی ۵۱۱۶۷ - ۸۷۳۱۷
تلفن ۵۵۵۲۹۳۵-دورنگار ۵۵۵۲۹۳۵
http: www.kashanu.ac.ir

تقدیم به پدر و مادر مهربانم

به پاس تعبیر عظیم و انسانی شان از کلمه ایثار و از خودگذشتگی،

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودشان که در این

سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است.

به پاس قلب های بزرگشان که فریادرس است

و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می گراید.

و به پاس محبّت های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی کنند.

سپاس

حمد و سپاس خداوندی را که آثار قدرت او بر چهره روز روشن، تابان است و انوار حکمت او در دل شب تار، درفشان. پروردگاری که طریق معرفت و کمال را به ما شناساند و درهای علم را بر ما گشود و عمری و فرصتی عطا فرمود تا بدان، بنده ضعیف خویش را در طریق علم و معرفت بیازماید.

سلام و درود بی‌پایان بر حضرت محمّد (ص) و خاندان پاک او، که وجودمان وامدار وجودشان است.

و سپاس ویژه‌ی من بر

استاد فرهیخته و بزرگوار جناب آقای دکتر اکبر محبی

که راهنمایی مرا در تهیه و نگارش این تحقیق به‌عهده داشتند و با دقت علمی فراوان، مرا در این زمینه یاری نمودند و در طول دوران تحصیل با نکته‌های زیبا و پندهای ارزشمندشان، صحیفه‌های سخن را علم‌پرور نموده، راهنما و راه‌گشای بنده بوده‌اند.

هم‌چنین، از تلاش‌های **جناب آقای دکتر حمیدرضا تبریزی‌دوز** به‌عنوان استاد مشاور، **جناب آقای دکتر عباس سعادتمندی** به‌عنوان استاد داور داخل دانشگاه و نماینده تحصیلات تکمیلی و هم‌چنین **سرکار خانم دکتر فاطمه ذبیحی** به‌عنوان استاد داور داخل دانشگاه که این تحقیق را مورد مطالعه قرار دادند و در جلسه‌ی دفاع شرکت نمودند، قدردانی و تشکر می‌نمایم.

و سپاس صمیمانه دیگر من بر خانواده و دوستان بامحبّتم است، که مرا در طول دوران تحصیل یاری داده‌اند. برای تمامی این عزیزان، توفیق روز افزون را از خداوند متعال خواستارم.

چکیده

هدف این پژوهش، به‌دست آوردن طرح‌های تفاضلات متناهی با مرتبه دقت بالا برای حل عددی برخی از معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی است. به همین منظور برخی از معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی مهم در علوم پایه و مهندسی از جمله معادلات شرودینگر، کراماتو–سوزوکی، رزنائو–برگرز، دگاسپرس–پروسس و رزنائو–کا.دی.وی مورد بررسی قرار گرفته‌اند. به خاطر پیچیدگی و غیرخطی بودن این معادلات بیشتر روش‌های عددی برای حل آن‌ها دارای مرتبه دقت خوب یا پایدار مطلوب نمی‌باشند. در این پایان‌نامه، برای معادلات فوق با پیشنهاد برخی طرح‌های تفاضلات متناهی با مرتبه دقت بالا، از روش نرم بی‌نهایت، نرم انرژی و نرم دو برای اثبات پایداری و همگرائی طرح‌های تفاضلی بهره گرفته‌ایم. نتایج حاصل از به‌کارگیری طرح‌های پیشنهاد شده، بیانگر کارائی بالای این روش‌ها می‌باشد.

کلمات کلیدی

معادلات دیفرانسیل جزئی، تقریب‌های تفاضلات متناهی، حل‌پذیری، پایداری، همگرائی، معادله‌ی شرودینگر، معادله‌ی کراماتو–سوزوکی، معادله‌ی رزنائو–برگرز، معادله‌ی دگاسپرس–پروسس و معادله‌ی رزنائو–کا.دی.وی.

فهرست مطالب

عنوان صفحه

ه

فهرست تصاویر

عنوان صفحه

پیشگفتار

بسیاری از پدیده‌های طبیعی را می‌توان با مدل‌های ریاضی توصیف کرد. محاسبات عددی یا آنالیز عددی، به تنظیم، مطالعه و اعمال شیوه‌های تقریبی محاسباتی برای حل آن دسته از مسائل ریاضیات پیوسته که با روش‌های تحلیلی قابل حل نیستند، می‌پردازد. از آثار مکتوب به‌جا مانده چنین برمی‌آید که گویا نخستین رساله در حساب با معنی امروزی را **محمّد بن موسی خوارزمی** نوشته است. آوازه‌ی وی چنان در اروپا پیچید که واژه‌ی الگوریتم را (که از خوارزمی گرفته شده است) بر روش‌های حل مساله در محاسبات عددی نهادند. با پیشرفت علم روش‌های عددی برای حل مسائل ریاضی، بیش از پیش احساس می‌شد در این هنگام ریاضی‌دانانی از جمله **اویلر**[۱] و **نیوتن**[۲] پا به این عرصه گذاشتند و روش‌هایی کارا ارائه دادند. به این ترتیب محاسبات عددی شکل نوین خود را یافت. از جمله مسائلی که در ریاضی وجود دارند، معادلات با مشتقات جزئی (PDE) هستند که غالباً در ریاضیات، علوم مهندسی و طبیعی به‌کار می‌روند که **زبانی بین رشته‌ای**[۳] برای علوم تشکیل می‌دهند. تقریب عددی PDE ها شامل قلمرو وسیعی می‌شود که تاکنون قسمت کوچکی از آن بررسی شده است. حل مسائل واقعی در این قلمرو، غالباً تلفیق زیرکانه‌ی نظریه، سابقه‌ی فیزیکی و تجزیه‌ی محاسباتی را می‌طلبد. خوانندگان علاقه‌مند می‌توانند به مراجع [۲، ۱۶، ۲۳، ۲۴] برای مطالعه‌ی بیشتر رجوع کنند. در سال‌های اخیر با رشد علم، معادلات با مشتقات جزئی غیرخطی در معادلات فیزیکی پدیدار

[۱] Euler
[۲] Newton
[۳] Lingua franca

شدند که مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است. حل تحلیلی این‌گونه از معادلات به خصوص معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی، جز در حالت‌های خاص، امکان‌پذیر نیست. ما نیز در این تحقیق، به دنبال ایجاد طرح‌های تفاضلات متناهی با مراتب دقت بالا، برای PDE های غیرخطی هستیم. به‌علاوه آنالیز روش‌ها شامل حل‌پذیری، همگرائی و پایداری نیز بررسی می‌شوند که در روش‌های عددی از اهمیت بالایی برخوردارند. در فصل اول ابتدا تعاریف و روابط لازم را که در طول این تحقیق به آن‌ها نیاز داریم، بیان می‌کنیم. در فصل دوم نیز به بررسی لم گرونوال که نقش بسزایی در این تحقیق دارد، می‌پردازیم. در فصل‌های بعدی نیز به بررسی معادلات غیرخطی مهم از جمله معادله‌ی شرودینگر، معادله‌ی کراماتو-سوزوکی، معادله‌ی رزنائو-برگرز، معادله‌ی دگاسپرس-پروسس و معادله‌ی رزنائو-کا.دی.وی پرداخته و با ارائه طرح‌های تفاضلاتی مناسب، این معادلات را حل می‌کنیم. عمده مطالب این پایان‌نامه از مراجع [۱۴، ۱۸، ۲۰، ۲۹، ۳۲، ۳۳] اقتباس شده است.

فصل ۱

آشنایی با مفاهیم مقدماتی

در این فصل مفاهیم و روابط مقدماتی را که در سراسر این تحقیق به‌کار رفته‌اند، به اختصار بیان می‌کنیم. هم‌چنین قضایایی که گاهی به آن‌ها استناد می‌شود، بیان شده‌اند که برخی از آن‌ها را اثبات کرده‌ایم و برای بقیه مرجعی مناسب معرفی شده است که خواننده در صورت نیاز می‌تواند با مراجعه به آن، اثبات قضیه را مشاهده کند.

۱.۱ معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرال-دیفرانسیل

از آن‌جا که در این پایان‌نامه از مفاهیم مشتق معمولی و مشتق جزئی استفاده می‌شود، لذا جهت تأکید بیشتر در این بخش به یادآوری انواع معادلات دیفرانسیل می‌پردازیم و در مورد هریک توضیح مختصری می‌دهیم.

تعریف ۱.۱. معادله دیفرانسیل معمولی[۱]: معادله‌ای که شامل یک تابع یک متغیره و مشتقات آن نسبت به متغیر مستقل است.

شکل کلی یک معادله دیفرانسیل معمولی از مرتبه n به صورت زیر است:

$$F(x, y(x), y^{'}(x), \cdots, y^{n}(x)) = \circ,$$

[۱] Ordinary differntial equation

حال اگر این عبارت نسبت به $y(x), y'(x), \cdots, y^{(n)}(x)$ یک عبارت خطی باشد، معادله را یک معادله‌ی خطی می‌نامند. شکل کلی معادله مرتبه n-ام خطی به‌صورت زیر است:

$$a_n(x)y^n(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g(x),$$

در غیر این‌صورت، معادله را غیرخطی می‌نامند.

تعریف ۲.۱. معادله دیفرانسیل جزیی[۲]: معادله‌ای که شامل یک تابع چندمتغیره و مشتق‌های آن نسبت به متغیرهای مستقل است.

تعریف ۳.۱. معادله‌ی انتگرال[۳]: معادله‌ای که در آن تابع مجهول زیر علامت انتگرال است.

برای مثال اگر تابع $g(x)$ را تابع مجهول معادله‌ی زیر در نظر بگیریم:

$$f(x) = \int_a^b k(x,y)g(y)dy,$$

معادله‌ی بالا نمونه‌ای از یک معادله انتگرال است.

تعریف ۴.۱. معادله‌ی انتگرال-دیفرانسیل[۴]: معادله‌ی انتگرالی است که شامل مشتقات تابع مجهول نیز هست.

حال اگر حد بالایی انتگرال عدد ثابت باشد، معادله را یک **معادله‌ی انتگرال فردهلم**[۵]می‌نامیم و اگر حد بالایی متغیر باشد آن‌را **معادله‌ی انتگرال ولترا**[۶]می‌نامیم.

---

[۲] Partial differntial equation
[۳] Integral equation
[۴] Integral differntial equation
[۵] Fredholm integral equation
[۶] Volterra integral equation

۲.۱ روش‌های تحلیلی برای یافتن جواب PDE ها

برخی روش‌های تحلیلی برای یافتن جواب PDE ها به صورت زیر می‌باشد:

۱. روش جداسازی متغیرها و استفاده از **سری‌های فوریه** [۷]؛

۲. روش **تبدیل لاپلاس**[۸]؛

۳. روش **تبدیل فوریه** [۹] (فوریه سینوسی، فوریه کسینوسی و نامتناهی)؛

۴. دیگر روش‌های تبدیل انتگرالی مانند روش **تبدیل ملین** [۱۰]؛

۵. یافتن فرم کانونی PDE و حل فرم کانونی حاصل.

هر کدام از روش‌های فوق برای حل PDEها شامل محدودیت‌هایی می‌باشد و با افزایش بعد PDE و نامنظم شدن ناحیه حل، محدودیت‌های روش‌های فوق افزایش می‌یابد. بنابراین در یافتن جواب ها استفاده از روش‌های عددی ضروری است. در این تحقیق یک روش عددی به‌نام **روش تفاضلات متناهی** [۱۱] برای حل PDEها معرفی و آنالیز می‌شود.

۳.۱ روش تفاضلات متناهی

اساس این روش، استفاده از فرمول‌های مشتق‌گیری عددی برای تقریب مشتقات موجود در معادله می‌باشد. قبل از آن عملگرهای تفاضلات متناهی را برای یادآوری بیان می‌کنیم.

[۷]Fourier series
[۸]Laplace transforme
[۹]Fourier transforme
[۱۰]Melin transforme
[۱۱]Finite difference method

۴.۱ مروری بر عملگرها

۱.۴.۱ عملگر انتقال E

فرض کنیم $y = f(x)$ یک تابع باشد و مقدار آن در نقاط x، $x+h$، $x+2h$، ... معلوم باشد در این صورت عملگر انتقال E به صورت زیر تعریف می‌شود

$$Ef(x) = f(x+h).$$

عملگر انتقال دارای خواص زیر است،

۱. $E^n f(x) = f(x+nh)$؛

۲. $E^{-n} f(x) = f(x-nh)$؛

۳. $E(f(x)+g(x)) = Ef(x) + Eg(x)$؛

۴. $E(cf(x)) = cEf(x)$؛

۵. $E^n(E^m f(x)) = E^m(E^n f(x)) = E^{n+m} f(x)$؛

۶. $E^n(E^{-n} f(x)) = f(x)$.

۲.۴.۱ عملگر تفاضلی پیشرو ∇

فرض کنیم $y_0, y_1, \ldots, y_n$ مقادیر تابع $y = f(x)$ در نقاط متساوی الفاصله‌ی $x_0, x_1, \ldots, x_n$ با طول گام h باشند یعنی $y_i = f(x_0 + ih)$. در این صورت ∇y_i تفاضل پیشرو مرتبه اول y است به طوری‌که،

$$\nabla y_i = y_{i+1} - y_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$