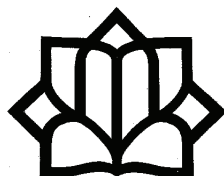


بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه کاشان
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
در رشته ریاضی کاربردی (گرایش آنالیز عددی)

عنوان:

آنالیز همگرایی و پایداری طرح‌های تفاضلات متناهی برای حل برخی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی

استاد راهنما:

دکتر اکبر محبی

توسط:

زهرا فراز

شهریورماه ۱۳۹۲



دانشگاه کاشان
دانشکده علوم

بسمه تعالی

تاریخ:
شماره:
پیوست:

مدیریت تحصیلات تکمیلی دانشگاه

صورتجلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

نام و نام خانوادگی دانشجوی: خانم زهرا فراز

شماره دانشجویی: ۹۰۱۱۵۸۶۰۱۱

رشته: ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی دانشکده: علوم ریاضی

عنوان پایان نامه: " آنالیز همگرایی و پایداری طرح‌های تفاضلات متناهی برای حل برخی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی "

این پایان نامه به مدیریت تحصیلات تکمیلی به منظور بخشی از فعالیت‌های تحصیلی

لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد ارائه می‌گردد. دفاع از پایان نامه در تاریخ

۹۲/۰۶/۲۷ مورد تأیید و ارزیابی هیأت داوران قرار گرفت و

با نمره _____ به عدد: و درجه عالی به تصویب رسید.

به حروف:

اعضای هیأت داوران

عنوان	نام و نام خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱. استاد راهنما:	دکتر اکبر محبی	استاد یار	
۲. استاد مشاور:	دکتر حمیدرضا تبریزی دوز	استاد یار	
۳. متخصص و طلب نظر دلائل دانشگاه:	دکتر عباس سعادت‌مندی	دانشیار	
۴. متخصص و طلب نظر دلائل دانشگاه:	دکتر فاطمه ذبیحی	استاد یار	
۵. نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه	دکتر عباس سعادت‌مندی	دانشیار	

مدیر تحصیلات تکمیلی: دکتر منصور نیا

آدرس: کاشان - بوار قطب رانندی

کد پستی: ۸۷۳۱۷-۵۱۱۶۷

تلفن: ۵۵۵۲۱۳۵ - دورنگار ۵۵۵۲۱۳۵

http: www.kashanu.ac.ir

تقدیم به پدر و مادر مهربانم

به پاس تعبیر عظیم و انسانی‌شان از کلمه ایشا و از خودگذشتگی،
به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که در این
سردترین روزگار ان بهترین پشتیبان است.

به پاس قلب‌های بزرگشان که فریادس است
و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می‌گراید.
و به پاس محبت‌های بی‌دینشان که هرگز فروکش نمی‌کنند.

سپاس

حمد و سپاس خداوندی را که آثار قدرت او بر چهره روز روشن، تابان است و انوار حکمت او در دل شب تار، درفشان. پروردگاری که طریق معرفت و کمال را به ما شناساند و درهای علم را بر ما گشود و عمری و فرصتی عطا فرمود تا بدان، بنده ضعیف خویش را در طریق علم و معرفت بیازماید. سلام و درود بی‌پایان بر حضرت محمد (ص) و خاندان پاک او، که وجودمان وامدار وجودشان است.

و سپاس ویژه‌ی من بر

استاد فرهیخته و بزرگوار جناب آقای دکتر اکبر محبی

که راهنمایی مرا در تهیه و نگارش این تحقیق به‌عهده داشتند و با دقت علمی فراوان، مرا در این زمینه یاری نمودند و در طول دوران تحصیل با نکته‌های زیبا و پندهای ارزشمندشان، صحیفه‌های سخن را علم‌پرور نموده، راهنما و راه‌گشای بنده بوده‌اند.

هم‌چنین، از تلاش‌های جناب آقای دکتر حمیدرضا تبریزی دوز به‌عنوان استاد مشاور، جناب آقای دکتر عباس سعادت‌مندی به‌عنوان استاد داور داخل دانشگاه و نماینده تحصیلات تکمیلی و هم‌چنین سرکار خانم دکتر فاطمه ذبیحی به‌عنوان استاد داور داخل دانشگاه که این تحقیق را مورد مطالعه قرار دادند و در جلسه‌ی دفاع شرکت نمودند، قدردانی و تشکر می‌نمایم.

و سپاس صمیمانه دیگر من بر خانواده و دوستان بامحبت‌م است، که مرا در طول دوران تحصیل یاری داده‌اند. برای تمامی این عزیزان، توفیق روز افزون را از خداوند متعال خواستارم.

چکیده

هدف این پژوهش، به دست آوردن طرح‌های تفاضلات متناهی با مرتبه دقت بالا برای حل عددی برخی از معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی است. به همین منظور برخی از معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی مهم در علوم پایه و مهندسی از جمله معادلات شرودینگر، کراماتو-سوزوکی، رزنائو-برگرز، دگاسپرس-پروسس و رزنائو-کا.دی.وی مورد بررسی قرار گرفته‌اند. به خاطر پیچیدگی و غیرخطی بودن این معادلات بیشتر روش‌های عددی برای حل آن‌ها دارای مرتبه دقت خوب یا پایدار مطلوب نمی‌باشند. در این پایان‌نامه، برای معادلات فوق با پیشنهاد برخی طرح‌های تفاضلات متناهی با مرتبه دقت بالا، از روش نرم بی‌نهایت، نرم انرژی و نرم دو برای اثبات پایداری و همگرایی طرح‌های تفاضلی بهره گرفته‌ایم. نتایج حاصل از به‌کارگیری طرح‌های پیشنهاد شده، بیان‌گر کارایی بالای این روش‌ها می‌باشد.

کلمات کلیدی

معادلات دیفرانسیل جزئی، تقریب‌های تفاضلات متناهی، حل‌پذیری، پایداری، همگرایی، معادله‌ی شرودینگر، معادله‌ی کراماتو-سوزوکی، معادله‌ی رزنائو-برگرز، معادله‌ی دگاسپرس-پروسس و معادله‌ی رزنائو-کا.دی.وی.

فهرست مطالب

صفحه	عنوان
۱	پیشگفتار
۳	۱ آشنایی با مفاهیم مقدماتی
۳	۱.۱ معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرال-دیفرانسیل
۵	۲.۱ روش‌های تحلیلی برای یافتن جواب (PDE) ها
۵	۳.۱ روش تفاضلات متناهی
۶	۴.۱ مروری بر عملگرها
۶	۱.۴.۱ عملگر انتقال E
۶	۲.۴.۱ عملگر تفاضلی پیشرو ∇
۷	۳.۴.۱ عملگر تفاضلی پسرو Δ
۸	۴.۴.۱ عملگر مرکزی δ
۹	۵.۴.۱ عملگر مشتق D
۹	۶.۴.۱ ارتباط بین عملگرها
۱۱	۵.۱ نرم‌های برداری و ماتریس‌ها
۱۴	۶.۱ فضای ضرب داخلی
۲۳	۲ انواع نابرابری گرونوال و کاربردهای آن
۲۳	۱.۲ دیباچه

۲۴	شکل پیوسته	۲.۲
۲۵	شکل گسسته	۳.۲
۲۶	شکل دیگری از نامساوی گرونوال	۴.۲
۲۸	کاربردهایی از نابرابری گرونوال	۵.۲
۳۴		طرح‌های تفاضلات متناهی برای معادله‌ی یک بعدی- غیرخطی شرودینگر	۳
۳۴	دیباجه	۱.۳
۳۵	طرح‌های تفاضلات متناهی فشرده مرتبه‌ی چهار	۲.۳
۳۸	برآورد خطا	۳.۳
۴۱	طرح‌های تفاضلات متناهی خطی	۴.۳
۴۱	۱.۴.۳ پایداری	
۴۴	۲.۴.۳ همگرایی	
۴۸	طرح‌های تفاضلات متناهی غیرخطی	۵.۳
۵۲	نتایج عددی	۶.۳
۵۲	۱.۶.۳ معادله‌ی خطی شرودینگر	
۵۲	۲.۶.۳ مثال ۱	
۵۵	۳.۶.۳ معادله‌ی غیرخطی شرودینگر	
۵۶	۴.۶.۳ مثال ۲	
۵۹	۵.۶.۳ مثال ۳	
۶۰	۶.۶.۳ مثال ۴	
۶۱	نتیجه‌گیری	۷.۳
۶۳		معادله‌ی غیرخطی کراماتو-سوزوکی	۴
۶۳	دیباجه	۱.۴
۶۴	تقریب تفاضلات متناهی مرتبه دو	۲.۴

۶۵	طرح عددی غیرخطی	۳.۴
۶۷	پایداری	۱.۳.۴
۷۱	یکتایی جواب‌ها	۲.۳.۴
۷۳	همگرایی	۳.۳.۴
۷۹	طرح عددی خطی	۴.۴
۸۰	همگرایی	۱.۴.۴
۹۲	پایداری	۲.۴.۴
۹۴	معادله‌ی ناهمگن	۵.۴
۹۶	نتایج عددی	۶.۴
۹۷	مثال	۱.۶.۴
۱۰۰	نتیجه‌گیری	۷.۴
۱۰۱	طرح تفاضلات متناهی برای معادله‌ی غیرخطی رزنائو-برگرز	۵
۱۰۱	دبیاچه	۱.۵
۱۰۳	طرح عددی براساس تقریب مرتبه دو	۲.۵
۱۰۴	تخمین خطا	۳.۵
۱۰۶	پایداری	۴.۵
۱۰۹	حل‌پذیری	۵.۵
۱۱۱	همگرایی	۶.۵
۱۱۷	نتایج عددی	۷.۵
۱۱۷	مثال	۱.۷.۵
۱۲۱	نتیجه‌گیری	۸.۵
۱۲۲	طرح‌های تفاضلات متناهی معادله‌ی غیرخطی دگاسپرس-پروسس	۶
۱۲۲	دبیاچه	۱.۶

۱۲۵	طرح‌های عددی	۲.۶
۱۳۰	طرح‌های پایستار H و H_{-1}	۳.۶
۱۳۰	اولین فرم بیان شده با u	۴.۶
۱۳۱	طرح تفاضلات متناهی غیرخطی پایستار H و H_{-1}	۵.۶
۱۳۲	طرح تفاضلات متناهی غیرخطی (طرح ۱)	۱.۵.۶
۱۳۴	حل‌پذیری	۲.۵.۶
۱۳۷	طرح تفاضلات متناهی خطی پایستار H و H_{-1}	۶.۶
۱۳۸	طرح تفاضلات متناهی خطی (طرح ۲)	۱.۶.۶
۱۴۰	حل‌پذیری	۲.۶.۶
۱۴۲	نتایج عددی	۷.۶
۱۴۲	مثال ۱	۱.۷.۶
۱۴۲	مثال ۲	۲.۷.۶
۱۴۴	نتیجه‌گیری	۸.۶
۱۴۷	طرح تفاضلات متناهی پایستار برای معادله‌ی غیرخطی رزنائو-کا.دی.وی	۷
۱۴۷	دیباجه	۱.۷
۱۴۸	طرح عددی براساس تقریب مرتبه دو	۲.۷
۱۵۱	حل‌پذیری	۳.۷
۱۵۳	همگرایی	۴.۷
۱۵۹	نتایج عددی	۵.۷
۱۵۹	مثال	۱.۵.۷
۱۶۱	نتیجه‌گیری	۶.۷
۱۶۶	فهرست مراجع	
۱۷۲	آ لیست نمادها	

فهرست تصاویر

صفحه	عنوان
۱۰۳	نمودارهای جواب تقریبی و واقعی (سمت راست) و منحنی قدر مطلق جواب تقریبی (سمت چپ) برای مثال ۱ با $(x, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$ و $h = 0.05$
۵۲ $\tau = 0.001$
۲۰۳	منحنی‌های قسمت موهومی (سمت راست) و قسمت حقیقی (سمت چپ) جواب تقریبی برای مثال ۱ با $t \in [0, 1]$ و $h = 0.005$ و $\tau = 0.001$
۵۴
۳۰۳	نمودارهای جواب تقریبی و واقعی (سمت راست) و منحنی قدر مطلق جواب تقریبی (سمت چپ) برای مثال ۲ با $(x, t) \in [-20, 20] \times [0, 3]$ و $h = 0.1$
۵۷ $\tau = 0.01$
۴۰۳	منحنی‌های قسمت موهومی (سمت راست) و قسمت حقیقی (سمت چپ) جواب تقریبی برای مثال ۲ با $t \in [0, 3]$ و $h = 0.1$ و $\tau = 0.01$
۵۸
۵۰۳	منحنی قدر مطلق جواب تقریبی برای مثال ۳ با $(x, t) \in [-10, 30] \times [0, 5]$
۶۰ $\tau = 0.01$ و $h = 0.1$
۶۰۳	منحنی قدر مطلق جواب تقریبی برای مثال ۴ با $(x, t) \in [0, 100] \times [0, 60]$
۶۱ $\tau = 0.125$ و $h = 0.25$

- ۷.۳ منحنی‌های قسمت موهومی (سمت راست) و قسمت حقیقی (سمت چپ) برای
 مثال ۳ با $(x, t) \in [-10, 30] \times [0, 5]$ و $h = 0.1$ و $\tau = 0.01$ ۶۲
- ۸.۳ منحنی‌های قسمت موهومی (سمت راست) و قسمت حقیقی (سمت چپ) برای
 مثال ۴ با $(x, t) \in [0, 100] \times [0, 60]$ و $h = 0.25$ و $\tau = 0.125$ ۶۲
- ۱.۴ نمودارهای جواب تقریبی و واقعی (سمت راست) و نمودار خطا (سمت چپ) با
 $h = \tau = 0.25$ در زمان نهایی $T = 2$ ۹۷
- ۲.۴ منحنی‌های قسمت حقیقی (سمت چپ) و موهومی (سمت راست) جواب تقریبی
 با $h = \tau = 0.125$ در زمان نهایی $T = 2$ ۹۹
- ۳.۴ منحنی قدر مطلق جواب تقریبی با $h = \tau = 0.125$ در زمان نهایی $T = 2$ ۱۰۰
- ۱.۵ نمودار جواب‌های تقریبی با $h = 0.3125$ و $\tau = 0.1$ برای $\alpha = 0.5$ ۱۱۸
- ۲.۵ نمودار جواب‌های تقریبی با $h = 0.3125$ و $\tau = 0.1$ برای $\alpha = 5$ ۱۲۰
- ۱.۶ نمودار جواب‌های تقریبی طرح ۱، با $\Delta x = \frac{40}{38}$ و $\Delta t = 0.05$ برای مثال ۱ ۱۴۳
- ۲.۶ طرح ۱، با $\Delta t = 0.2$ (سمت چپ)، $\Delta t = 0.1$ (وسط) و $\Delta t = 0.01$ (سمت راست) ۱۴۵
- ۳.۶ طرح ۲، با $\Delta t = 0.2$ (سمت چپ)، $\Delta t = 0.1$ (وسط) و $\Delta t = 0.01$ (سمت راست) ۱۴۵
- ۴.۶ طرح ۲، (سمت چپ بالا) با $\Delta x = \frac{40}{38}$ و $\Delta t = 0.05$ ، طرح ۱، (سمت راست بالا) با $\Delta x = \frac{40}{38}$ و $\Delta t = 0.5$ ، طرح ۱، (سمت چپ پایین) با $\Delta x = \frac{40}{37}$ و $\Delta t = 0.33$ ۱۴۶

- ۵.۶ طرح ۲، (سمت چپ بالا) با $\Delta x = \frac{4^\circ}{38}$ و $\Delta t = 0.05$ ، طرح ۱، (سمت راست بالا) با $\Delta x = \frac{4^\circ}{38}$ و $\Delta t = 0.5$ ، طرح ۱، (سمت چپ پایین) با $\Delta x = \frac{4^\circ}{37}$ و $\Delta t = 0.33$ ، طرح ۱، (سمت راست پایین) با $\Delta x = \frac{4^\circ}{192}$ و $\Delta t = 2$ ۱۴۶
- ۱.۷ نمودارهای جواب تقریبی و واقعی (سمت چپ) و نمودار خطا (سمت راست) برای $h = 0.5$ و $\tau = 0.1$ در زمان نهایی $T = 10$ ۱۶۱
- ۲.۷ نمودارهای جواب تقریبی در زمان‌های مختلف برای $t \in [0, 40]$ ، با $h = 0.5$ و $\tau = 0.1$ ۱۶۲

پیشگفتار

بسیاری از پدیده‌های طبیعی را می‌توان با مدل‌های ریاضی توصیف کرد. محاسبات عددی یا آنالیز عددی، به تنظیم، مطالعه و اعمال شیوه‌های تقریبی محاسباتی برای حل آن دسته از مسائل ریاضیات پیوسته که با روش‌های تحلیلی قابل حل نیستند، می‌پردازد. از آثار مکتوب به‌جا مانده چنین برمی‌آید که گویا نخستین رساله در حساب با معنی امروزی را محمد بن موسی خوارزمی نوشته است. آوازه‌ی وی چنان در اروپا پیچید که واژه‌ی الگوریتم را (که از خوارزمی گرفته شده است) بر روش‌های حل مساله در محاسبات عددی نهادند. با پیشرفت علم روش‌های عددی برای حل مسائل ریاضی، بیش از پیش احساس می‌شد در این هنگام ریاضی‌دانانی از جمله اویلر^۱ و نیوتن^۲ پا به این عرصه گذاشتند و روش‌هایی کارا ارائه دادند. به این ترتیب محاسبات عددی شکل نوین خود را یافت. از جمله مسائلی که در ریاضی وجود دارند، معادلات با مشتقات جزئی (PDE) هستند که غالباً در ریاضیات، علوم مهندسی و طبیعی به‌کار می‌روند که زبانی بین رشته‌ای^۳ برای علوم تشکیل می‌دهند. تقریب عددی PDE ها شامل قلمرو وسیعی می‌شود که تاکنون قسمت کوچکی از آن بررسی شده است. حل مسائل واقعی در این قلمرو، غالباً تلفیق زیرکانه‌ی نظریه، سابقه‌ی فیزیکی و تجزیه‌ی محاسباتی را می‌طلبد. خوانندگان علاقه‌مند می‌توانند به مراجع [۲، ۱۶، ۲۳، ۲۴] برای مطالعه‌ی بیشتر رجوع کنند. در سال‌های اخیر با رشد علم، معادلات با مشتقات جزئی غیرخطی در معادلات فیزیکی پدیدار

^۱Euler

^۲Newton

^۳Lingua franca

شدند که مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است. حل تحلیلی این‌گونه از معادلات به خصوص معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی، جز در حالت‌های خاص، امکان‌پذیر نیست. ما نیز در این تحقیق، به دنبال ایجاد طرح‌های تفاضلات متناهی با مراتب دقت بالا، برای PDE های غیرخطی هستیم. به‌علاوه آنالیز روش‌ها شامل حل‌پذیری، همگرایی و پایداری نیز بررسی می‌شوند که در روش‌های عددی از اهمیت بالایی برخوردارند. در فصل اول ابتدا تعاریف و روابط لازم را که در طول این تحقیق به آن‌ها نیاز داریم، بیان می‌کنیم. در فصل دوم نیز به بررسی لم گرونوال که نقش بسزایی در این تحقیق دارد، می‌پردازیم. در فصل‌های بعدی نیز به بررسی معادلات غیرخطی مهم از جمله معادله‌ی شرودینگر، معادله‌ی کراماتو-سوزوکی، معادله‌ی رزنائو-برگرز، معادله‌ی دگاسپرس-پروسس و معادله‌ی رزنائو-کا.دی.وی پرداخته و با ارائه طرح‌های تفاضلاتی مناسب، این معادلات را حل می‌کنیم. عمده مطالب این پایان‌نامه از مراجع [۱۴، ۱۸، ۲۰، ۲۹، ۳۲، ۳۳] اقتباس شده است.

فصل ۱

آشنایی با مفاهیم مقدماتی

در این فصل مفاهیم و روابط مقدماتی را که در سراسر این تحقیق به کار رفته‌اند، به اختصار بیان می‌کنیم. هم‌چنین قضایایی که گاهی به آن‌ها استناد می‌شود، بیان شده‌اند که برخی از آن‌ها را اثبات کرده‌ایم و برای بقیه مرجعی مناسب معرفی شده است که خواننده در صورت نیاز می‌تواند با مراجعه به آن، اثبات قضیه را مشاهده کند.

۱.۱ معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرال-دیفرانسیل

از آن‌جا که در این پایان‌نامه از مفاهیم مشتق معمولی و مشتق جزئی استفاده می‌شود، لذا جهت تأکید بیشتر در این بخش به یادآوری انواع معادلات دیفرانسیل می‌پردازیم و در مورد هریک توضیح مختصری می‌دهیم.

تعریف ۱.۱. معادله دیفرانسیل معمولی^۱: معادله‌ای که شامل یک تابع یک متغیره و مشتقات آن نسبت به متغیر مستقل است.

شکل کلی یک معادله دیفرانسیل معمولی از مرتبه n به صورت زیر است:

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^n(x)) = 0,$$

^۱Ordinary differential equation

حال اگر این عبارت نسبت به $y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)$ یک عبارت خطی باشد، معادله را یک معادله‌ی خطی می‌نامند. شکل کلی معادله مرتبه n -ام خطی به صورت زیر است:

$$a_n(x)y^n(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g(x),$$

در غیر این صورت، معادله را غیرخطی می‌نامند.

تعریف ۲.۱. معادله دیفرانسیل جزئی^۲: معادله‌ای که شامل یک تابع چندمتغیره و مشتق‌های آن نسبت به متغیرهای مستقل است.

تعریف ۳.۱. معادله‌ی انتگرال^۳: معادله‌ای که در آن تابع مجهول زیر علامت انتگرال است.

برای مثال اگر تابع $g(x)$ را تابع مجهول معادله‌ی زیر در نظر بگیریم:

$$f(x) = \int_a^b k(x, y)g(y)dy,$$

معادله‌ی بالا نمونه‌ای از یک معادله انتگرال است.

تعریف ۴.۱. معادله‌ی انتگرال-دیفرانسیل^۴: معادله‌ی انتگرالی است که شامل مشتقات تابع مجهول نیز هست.

حال اگر حد بالایی انتگرال عدد ثابت باشد، معادله را یک معادله‌ی انتگرال فردهلم^۵ می‌نامیم و

اگر حد بالایی متغیر باشد آن را معادله‌ی انتگرال ولتررا^۶ می‌نامیم.

^۲Partial differential equation

^۳Integral equation

^۴Integral differential equation

^۵Fredholm integral equation

^۶Volterra integral equation

۲.۱ روش‌های تحلیلی برای یافتن جواب PDE ها

برخی روش‌های تحلیلی برای یافتن جواب PDE ها به صورت زیر می‌باشد:

۱. روش جداسازی متغیرها و استفاده از سری‌های فوریه^۷؛

۲. روش تبدیل لاپلاس^۸؛

۳. روش تبدیل فوریه^۹ (فوریه سینوسی، فوریه کسینوسی و نامتناهی)؛

۴. دیگر روش‌های تبدیل انتگرالی مانند روش تبدیل ملین^{۱۰}؛

۵. یافتن فرم کانونی PDE و حل فرم کانونی حاصل.

هر کدام از روش‌های فوق برای حل PDE ها شامل محدودیت‌هایی می‌باشد و با افزایش بعد PDE و نامنظم شدن ناحیه حل، محدودیت‌های روش‌های فوق افزایش می‌یابد. بنابراین در یافتن جواب‌ها استفاده از روش‌های عددی ضروری است. در این تحقیق یک روش عددی به نام روش تفاضلات متناهی^{۱۱} برای حل PDE ها معرفی و آنالیز می‌شود.

۳.۱ روش تفاضلات متناهی

اساس این روش، استفاده از فرمول‌های مشتق‌گیری عددی برای تقریب مشتقات موجود در معادله می‌باشد. قبل از آن عملگرهای تفاضلات متناهی را برای یادآوری بیان می‌کنیم.

^۷Fourier series

^۸Laplace transforme

^۹Fourier transforme

^{۱۰}Melin transforme

^{۱۱}Finite difference method

۴.۱ مروری بر عملگرها

۱.۴.۱ عملگر انتقال E

فرض کنیم $y = f(x)$ یک تابع باشد و مقدار آن در نقاط $x, x + h, x + 2h, \dots$ معلوم باشد در این صورت عملگر انتقال E به صورت زیر تعریف می‌شود

$$Ef(x) = f(x + h).$$

عملگر انتقال دارای خواص زیر است،

$$۱. E^n f(x) = f(x + nh)$$

$$۲. E^{-n} f(x) = f(x - nh)$$

$$۳. E(f(x) + g(x)) = Ef(x) + Eg(x)$$

$$۴. E(cf(x)) = cEf(x)$$

$$۵. E^n(E^m f(x)) = E^m(E^n f(x)) = E^{n+m} f(x)$$

$$۶. E^n(E^{-n} f(x)) = f(x)$$

۲.۴.۱ عملگر تفاضلی پیشرو ∇

فرض کنیم y_0, y_1, \dots, y_n مقادیر تابع $y = f(x)$ در نقاط متساوی الفاصله x_0, x_1, \dots, x_n با طول گام h باشند یعنی $y_i = f(x_0 + ih)$. در این صورت ∇y_i تفاضل پیشرو مرتبه اول y است به طوری که،

$$\nabla y_i = y_{i+1} - y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$