بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه تربیت معلم تهران

دانشکده علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد آمار

عنوان:

تغییرات آهسته و یکتایی ریشه‌های معادله تابعی در قدم زدن تصادفی شاخه‌ای

استاد راهنما:

دکتر علی‌اکبر رحیم‌زاده‌ثانی

تدوین:

اعظم رجبی‌قاسم‌آبادی

پاییز ۱۳۷۹

آگهی دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد آمار

عنوان:

تغییرات آهسته و یکتایی ریشه‌های معادله تابعی در قدم زدن تصادفی شاخه‌ای

استاد راهنما : آقای دکتر علی‌اکبر رحیم‌زاده

داور خارجی : آقای دکتر محمدقاسم وحیدی اصل

داور داخلی : آقای دکتر عین‌اله پاشا

دانشجو : خانم اعظم رجبی قاسم‌آبادی

زمان : ساعت ۴ بعدازظهر روز دوشنبه مورخ ۷۹/۸/۲۳

آدرس : دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر دانشگاه تربیت معلم.

خلاصه:

در این رساله فرایند قدم زدن تصادفی شاخه‌ای یک بعدی با زمان گسسته، $\{Z^{(n)}(r); r = 1, 2, \ldots, z^{(n)}\}_{n\geq 0}$ روی R در نظر گرفته می‌شود که در آن $Z^{(n)}(r)$ مکانهای هر یک از افراد در نسل nـام می‌باشد. فرض کنیم $m(\theta)$ تبدیل لاپلاس اندازه شدت وابسته به فرایند باشد، به طوری که $m(\theta)$ دربازه‌ای مشتق‌پذیر و متناهی است. ما با تعریف مارتینگل $\{W^{(n)}(\theta)\}_{n=0}$ وابسته به این فرایند، نشان می‌دهیم این مارتینگل به طور $a.s.$ همگراست و تبدیل لاپلاس حد آن تابعی است که یک ریشه معادله تابعی $\psi(x) = E\left[\prod_{i=1}^{z^{(1)}} \psi\left(x\frac{e^{-\theta z^{(1)}(i)}}{m(\theta)}\right)\right]$ می‌باشد. همچنین نشان می‌دهیم تحت برقراری فرضهای اولیه و شرایط زیر بحرانی و بحرانی هر ریشه غیربدیهی این معادله تابعی، یک وابستگی با توابع با تغییر آهسته دارد. علاوه بر این ثابت می‌کنیم $\{\frac{\partial}{\partial\theta}W^{(n)}(\theta)\}$ نیز یک مارتینگل بوده و همگراست و تحت برقراری فرضهای اولیه و با شرط بحرانی، حد این مارتینگل تبدیل لاپلاسی دارد که یک ریشه منحصربفرد معادله تابعی مذکور بوده و وابستگی آن با تابع با تغییر آهسته نیز مورد بررسی قرار می‌گیرد.

بسمه تعالی

دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

دانشگاه تربیت معلم

تاریخ ....

شماره ....

پیوست ....

واحد ....

صورتجلسهٔ دفاع از پایان نامهٔ کارشناسی ارشد

جلسهٔ دفاع از پایان نامه خانم اعظم رجبی قاسم‌آبادی دانشجوی دورهٔ کارشناسی ارشد رشتهٔ آمار تحت عنوان:

تغییرات آهسته و یکتائی ریشه‌های معادله تابعی در قدم زدن تصادفی شاخه‌ای

در روز دوشنبه مورخه ۷۹/۸/۲۳ در دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر تشکیل گردید و نتیجه آزمون به شرح زیر تعیین می‌گردد. نمرهٔ این آزمون ۱۸/۲۱ (هجده بیست و یکم) می باشد.

۱- عالی ☑

۲- بسیار خوب ☐

۳- خوب ☐

۴- قابل قبول ☐

۵- غیر قابل قبول ☐

استاد راهنما	داور خارجی	داور داخلی
دکتر علی‌اکبر رحیم‌زاده	دکتر محمدقاسم وحیدی‌اصل	دکتر عین‌اله پاشا

اسماعیل بابلیان

رئیس دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

تهران، خیابان طالقانی بین بهار و شریعتی، پلاک ۵۹۹ کدپستی ۱۵۶۱۸ تلفن ۷۵۰۷۷۷۲ فاکس ۷۶۲۹۸۸

تقدیم به پدر و برادر مرحومم

«روحشان شاد»

تقدیم به مادر مهربان و خواهران خوبم

سپاسگزاری

از استاد عالیقدر، جناب آقای دکتر رحیم‌زاده ثانی که راهنمایی این رساله را عهده‌دار شدند و در تمام مراحل تکوین آن مرا راهنمایی کردند و به خاطر زحمات دوران تحصیل، تشکر می‌نمایم. همچنین از جناب آقای دکتر پاشا به خاطر زحمات دوران تحصیل و داوری این رساله قدردانی می‌کنم. شایسته است از جناب آقای دکتر وحیدی اصل که قبول زحمت نموده و داوری این رساله را به عهده گرفته‌اند نیز قدردانی نمایم.

چکیده

در این رساله فرآیند قدم زدن تصادفی شاخه‌ای یک بعدی با زمان گسسته، $\left\{Z^{(n)}(r)\,;\, r=1,2,\dots,Z^{(n)}\right\}_{n\geq 0}$ روی R در نظر گرفته می‌شود که در آن $Z^{(n)}(r)$ مکان‌های هر یک از افراد در نسل nـام می‌باشد. فرض کنیم $m(\theta)$ تبدیل لاپلاس اندازه شدت وابسته به فرآیند باشد، به‌طوری‌که $m(\theta)$ در بازه‌ای مشتق‌پذیر و متناهی است. ما با تعریف مارتینگل $\left\{W^{(n)}(\theta)\right\}_{n=0}$ وابسته به این فرآیند، نشان می‌دهیم این مارتینگل به‌طور $a.s.$ همگراست و تبدیل لاپلاس حد آن تابعی است که یک ریشه معادله تابعی $\psi(x)=E\left[\prod_{i=1}^{Z^{(1)}}\psi\left(x\,\frac{e^{-\theta Z^{(1)}(i)}}{m(\theta)}\right)\right]$ می‌باشد. همچنین نشان می‌دهیم تحت برقراری فرض‌های اولیه و شرایط زیربحرانی و بحرانی هر ریشه غیربدیهی این معادله تابعی، یک وابستگی با توابع با تغییر آهسته دارد. علاوه براین ثابت می‌کنیم $\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}W^{(n)}(\theta)\right\}$ نیز یک مارتینگل بوده و همگراست و تحت برقراری فرض‌های اولیه و با شرایط بحرانی حد این مارتینگل تبدیل لاپلاسی دارد که یک ریشه منحصر به‌فرد معادله تابعی مذکور بوده و وابستگی آن با تابع با تغییر آهسته نیز مورد بررسی قرار می‌گیرد.

پیشگفتار

موضوع فرآیندهای شاخه‌ای *(BP)* به حدود یک‌صد سال قبل برمی‌گردد ولیکن اصطلاح فرآیندهای شاخه‌ای اولین‌بار توسط کولموگروف[۱] و دیمتریو[۲] در سال (۱۹۴۷) به‌عنوان دسته‌ای از فرآیندهای تصادفی به‌کار رفت. از آن تاریخ افرادی چون هاریس[۳] (۱۹۵۱) و آتریا[۴] (۱۹۷۲) و بیگنز[۵] (۱۹۷۷) و (۱۹۹۱)، [5] و [6] و بیگنز و کیپریانو[۶] (۱۹۹۷)، [7]، به بسط این تئوری و فرآیند قدم زدن تصادفی شاخه‌ای که نوعی فرآیند تصادفی نقطه‌ای است پرداختند.

تبدیلات لاپلاس اندازه شدت وابسته به فرآیندهای نقطه‌ای در معادلات تابعی خاصی صدق می‌کنند که می‌توان آن را در مقالاتی چون کاهن و پیرئیر[۷] (۱۹۷۶)، [14] و پیکس[۸] (۱۹۹۲)، [20] و برینگهاوس و گرابل[۹] (۱۹۹۵)، [4] (در قضیه مشخصه) و ویمیر و ویلیامز[۱۰] (۱۹۹۶)، [21] در مطالعه *(random cascades)* جستجو کرد. یک شرح عمومی از معادله تابعی $\psi(x)$ را می‌توان در دارت و لیگت[۱۱] (۱۹۸۳)، [12] و لیو[۱۲] (۱۹۹۷) و (۱۹۹۸)، [17] و [18] یافت.

ما در این رساله، قدم زدن تصادفی شاخه‌ای یک بعدی $\left\{Z^{(n)}(r)\,;\, r=۱,۲,\ldots,Z^{(n)}\right\}_{n\geq ۰}$ را روی R در نظر می‌گیریم که در آن $Z^{(n)}=Z^{(n)}(R)$ یک فرآیند گالتون واتسون با

---

1. Kolmogorov
2. Dimitriev
3. Harris
4. Athreya
5. Biggins
6. Biggins and Kyprianou
7. Kahane and Peyriere
8. Pakes
9. Baringhaus and Grübel
10. Waymire and Williams
11. Durrett and Liggett
12. Liu

$Z^{(0)}=1$ می‌باشد. برای هر مجموعه اندازه‌پذیر A در R اندازه شدت $\mu(A)$را تعریف می‌کنیم که عبارت است از متوسط تعداد افراد در مجموعه A، ما با در نظرگیری تبدیل لاپلاس این اندازه شدت یعنی $m(\theta)$که تابعی مشتق‌پذیر و متناهی است، به بررسی ریشه‌های معادله تابعی $\psi(x)=E\left[\prod_{t=1}^{Z^{(1)}}\psi\left(x\frac{e^{-\theta Z^{(1)}(t)}}{m(\theta)}\right)\right]$، که در آن ψ متعلق به مجموعه توابع تبدیلات لاپلاس متغیرهای نامنفی است، می‌پردازیم. این بررسی به موضوع توابع با تغییرات آهسته وابسته است. این‌گونه توابع حالت خاصی از توابع با تغییرات منظم بوده و برای اولین‌بار توسط جی‌کاراماتا[1] در سال (۱۹۳۰) مطرح شده و اغلب در مطالعه فرآیندهای شاخه‌ای مورد بررسی قرار می‌گیرد.

رسالهٔ حاضر مقالهٔ کیپریانو (۱۹۹۸)، [16] را مورد بررسی قرار می‌دهد. در این رساله فصلی را به‌تعریف و خواص توابع با تغییرات آهسته اختصاص دادیم که در نهایت منجر به حل معادلات دیفرانسیل و انتگرالگیری شد. در فصل یک ما با تعریف فرایند قدم زدن تصادفی شاخه‌ای و معرفی تبدیلات لاپلاس و مارتینگل‌ها به تعریف مارتینگل $\left\{W^{(n)}(\theta)\right\}_{n=0}$ نسبت به σ ـ میدان F_n (حاصل از اطلاعات نسل نخست تا نسل n ـ ام) پرداخته و ثابت می‌کنیم حد این مارتینگل، تبدیل لاپلاسی دارد که یک ریشه معادله تابعی قید شده می‌باشد، همچنین در این فصل مارتینگل $\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}W^{(n)}(\theta)\right\}$ نیز مورد بررسی قرار می‌گیرد. فصل ۳ به شرح نمادها، شرایط حاکم، قضایای کمکی و نتایج مرتبط با قضایای اصلی می‌پردازد. در فصل ۴ ما به اثبات ۳ قضیه اصلی تحت شرایط زیربحرانی و بحرانی که هدف نهایی این رساله است، می‌پردازیم. همچنین در این فصل یک کاربرد قضیه اصلی ۱ نیز آمده است.

1. J-Karamata

فهرست مطالب

فصل اول

فرآیند تصادفی شاخه‌ای
و قدم زدن تصادفی

این فصل به‌ارائه مطالب ریاضی مورد نیاز اختصاص دارد. در ابتدای فصل به‌تعریف و خواص فرآیندهای تصادفی شاخه‌ای با زمان گسسته و قدم زدن تصادفی شاخه‌ای می‌پردازیم.

در بخش‌های پایانی به‌معرفی تبدیلات لاپلاس و مارتینگل‌ها پرداخته و سپس مارتینگل $\{W^{(n)}(\theta)\}$ را تعریف می‌کنیم و به‌کمک قضیه همگرایی مارتینگل‌ها، ثابت می‌کنیم این مارتینگل همگرا به‌متغیری مانند $W(\theta)$ می‌باشد. پس از آن با یافتن تبدیل لاپلاس $W(\theta)$، ثابت خواهیم کرد، این تبدیل لاپلاس تابعی است که در یک معادله تابعی صدق می‌کند، به‌عبارت دیگر ریشه یک معادله تابعی است. این مطلب موضوع بخش ۸ این فصل است.

عمده مطالب این فصل از کتاب‌های کارلین [۱] و شلدون م.راس [۲] می‌باشد.

۱ـ۱) تعریف یک فرآیند تصادفی

یک فرایند تصادفی $X=\{X(t),t\in T\}$ مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی است که بر روی فضای احتمال مشترکی مانند S تعریف شده‌اند. یعنی به‌ازای هر $t\in T$، $X(t)$ یک متغیر تصادفی است. اغلب t را به‌زمان تعبیر می‌کنیم.

بسته به‌این‌که T شمارا باشد، $\{X(t)\}$ را فرآیندی با زمان گسسته و اگر T زیرمجموعه‌ای از فاصلهٔ $(-\infty, \infty)$ باشد، آن را فرآیند با زمان پیوسته گویند.

۱ـ۲) زنجیرهای مارکوف

بسیاری از دستگاه‌ها دارای این خاصیت‌اند که وقتی وضعیت فعلی آن‌ها مشخص باشد، وضعیت‌های گذشته هیچ تأثیری روی وضعیت‌های آینده ندارند. این خاصیت به‌خاصیت مارکوفی موسوم است. فرآیندهایی که دارای این خاصیت هستند، فرآیندهای مارکوفی نامیده می‌شوند و وقتی زمان گسسته باشد به‌آن‌ها زنجیرهای مارکوف گویند.

به‌عبارتی یک فرآیند مارکوف (زمان گسسته) فرآیندی مانند $\{Z_n\}_{n=0}$ است که در آن رابطه:

$$p(Z_{n+1}=z_{n+1} \mid Z_0=z_0,\dots,Z_n=z_n)=P(Z_{n+1}=z_{n+1} \mid Z_n=z_n)$$

به‌ازاء هر عدد صحیح و نامنفی n و اعداد دلخواه z_0 ، ... ، z_{n+1} از فضای وضعیت $\tilde{S}$، برقرار است.

۱ـ۳) فرآیندهای تصادفی شاخه‌ای با زمان گسسته

ما در این رساله به‌فرآیندهای تصادفی شاخه‌ای با زمان گسسته می‌پردازیم که در آن‌ها زمان تکثیر، از نسلی به نسل دیگر ثابت است. به‌بیان دیگر واحد زمان یک نسل می‌باشد.

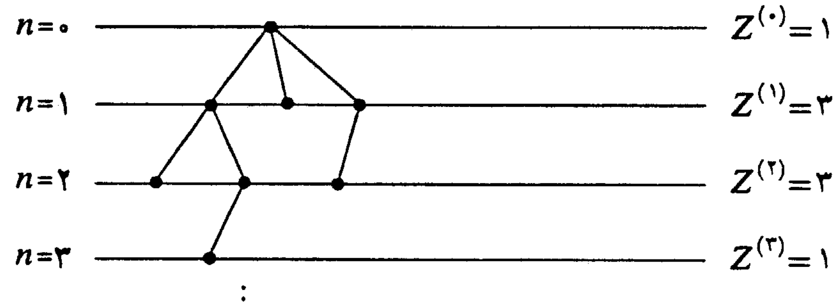
۱ـ۳ـ۱) تعریف فرآیند تصادفی شاخه‌ای

جامعه‌ای را که اعضای آن نوزادانی از همان نوع می‌توانند تولید کنند در نظر بگیرید، فرض کنید هر فرد در پایان عمر خود j نوزاد با احتمال p_j، $j \geq 0$، مستقل از تعداد نوزادان تولید شده به‌وسیله سایرین، تولید کرده باشد. تعداد افرادی را که در ابتدا حضور دارند با $Z^{(0)}$ نشان می‌دهیم و آن را اندازه نسل صفر می‌نامیم. تمام نوزادن نسل صفر، نسل اول را تشکیل می‌دهند.

و تعداد آن را با $Z^{(۱)}$ نشان می‌دهیم. به‌طور کلی فرض کنیم $Z^{(n)}$، اندازه نسل n ـ ام باشد، زنجیر مارکوف $\{Z^{(n)}, n\geq ۰\}$ را فرآیند شاخه‌ای می‌نامیم.

لازم به‌ذکر است که در تمام این رساله، تعداد افراد نسل نخست، $Z^{(۰)}=۱$ فرض می‌شود، مگر جاهایی که قید شده باشد.

به‌عنوان مثال، شکل (۱ـ۱) نمودار یک تحقق از یک فرآیند شاخه‌ای تا نسل سوم را نشان می‌دهد.



شکل (۱ـ۱)

۱ـ۳ـ۲) تابع مولد احتمال‌ها

فرض کنیم $\xi_۰$، $\xi_۱$، ... متغیرهای تصادفی $i.i.d$ باشند که مقادیر ۰ ، ۱ ، ۲ ، ... ، k، ... را با احتمالهای $p_۰$، $p_۱$، $p_۲$، ... ، p_k، ... می‌گیرند، یعنی: $P(\xi_i=k)=P_k$ ، $i=۰, ۱, ۲, ...$ که در آن $P_k\geq ۰$ و $\sum_{k=۰}^{\infty} P_k=۱$.

ξ_i را عدهٔ فرزندان فرد i ـ ام از جامعه می‌خوانیم، در نتیجه p_k احتمال داشتن k فرزند می‌باشد. اگر احتمال این‌که هر نفر اولادی به‌وجود نیاورد صفر باشد، یعنی $p_۰=۰$، در این‌صورت انقراض هرگز رخ نمی‌دهد. لذا، در بررسی احتمال انقراض فرض می‌کنیم $p_۰>۰$،