بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شهید باهنر کرمان

دانشکده ریاضی و کامپیوتر

گروه ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض

بهترین تقریب برای مجموعه های بسته در فضاهای باناخ

استاد راهنما :

دکتر حسین محبی

مؤلف :

فرزانه مرادی شهربابک

شهریور ماه ۱۳۸۶

دانشگاه شهید باهنر کرمان

این پایان نامه

به عنوان یکی از شرایط احراز کارشناسی ارشد

به

بخش ریاضی – دانشکده ریاضی و کامپیوتر

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود .

دانشجو : فرزانه مرادی

استاد راهنما : دکتر حسین محبی

داور ۱ : دکتر محمدعلی ولی

داور ۲ : دکتر محمودمحسنی مقدم

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه : دکتر سید ناصر حسینی

تقدیم به:

عزیزانی که دوستشان دارم.

پدر و مادر مهربانم :

که به من راه ورسم زندگی کردن ، مهر بانی ، فداکاری و عشق ورزیدن را آموختند . وجودشان برایم عین محبت است و دعای خیرشان بدرقه راه زندگیم .با قلبی مالامال از عشق و محبت ، بر دستان پر مهرشان بوسه می زنم و می گویم هیچ کلمه ای برای تقدیر از محبتهایتان وجود ندارد .

همسر عزیزم:

آنکه عشق ، محبت و آرامش را به من هدیه داد و کلام پر از مهرش امید بخش لحظه به لحظه زندگیم است .

پسر عزیزم:

گلی که با تولدش ، زندگیم معنایی دگر یافت وبا گل وجودش عشق و محبت را در زندگیم دو چندان کرد.

خدایا :

"من در کلبه فقیرانه خود چیزی دارم که تودر عرش کبریائی خود نداری ، من چون تویی دارم وتو چون خود نداری."

تشکر ویژه :

از تمام کسانیکه در طي کردن این راه پر فراز و نشیب ، صمیمانه و صادقانه هدایتم کردند . به خصوص استاد گرامي آقلي دکتر محي که با صبر وحوصله دانش خود را در اختیارم گذاشتند و هرگز مرا از اندوخته هاي خویش بي نصیب نگذاشتند وهمیشه مدیون محبتهاي ایشان بوده وهستم . سپاس و قدرداني خود را تقدیم خانواده عزیزم ، همسر مهربانم و پسر عزیزم مي نمایم که در انجام دادن کارهاي پایان نامه ام از هیچ کمکي و کوششي دریغ نکردند .

چکیده:

در این پایان نامه ابتدا با روشهای محدب سازی ، بهترین تقریب برای یک مجموعه بسته C در یک فضای هیلبرت را مورد بررسی قرار می دهیم. علاوه بر این شرایط اغتشاش مرتبط با C و یک دستگاه نامساوی غیر خطی را هم مطالعه می کنیم، لازم به ذکر است که دستگاه متناهی است. بعضی از نتایج معادل بهترین تقریب و خاصیت قید اساسی (BCQ) اثبات شده اند.

دوم اینکه ، چندین مفهوم اساسی مانند BCQ و خاصیت اشتراک غلاف مرکزی قوی (CHIP) و اغتشاش برای دستگاههای محدب از نامساویها را در فضاهای باناخ (بر $\mathbb{R}$یا $\mathbb{C}$) ارائه شده و مورد مطالعه قرار گرفته اند که در اینجا دستگاهها الزاما متناهی نیستند.

روابط آنها با یکدیگر در ارتباط با بهترین تقریب مورد بررسی قرار گرفت .

در هنگام کاربرد، نتایج در خصوص فرمول بندی مجدد غیر قیدی بهترین تقریب با شروط فراوان در فضاهای هیلبرت را اثبات می کنیم، همچنین چندین توصیف از بهترین تقریب دامنه محدود را در $C(Q)$ تحت قیدهای کاملا کلی ارائه می دهیم.

مقدمه :

در این پایان نامه در فصل اول به بیان پیش نیازها و تعاریف و مقدمات می پردازیم.

در فصل دوم به مساله بهترین تقریب برای مجموعه های غیرمحدب و خاصیت اغتشاش با دستگاههای نامساوی غیرمحدب در فضاهای هیلبرت می پردازیم. (یعنی دستگاههای غیرمحدب را به دستگاههای محدب تبدیل کرده و با استفاده از آنها روابط معادل بهترین تقریب را بدست می آوریم.)

در فصل سوم به مطالعه بهترین تقریب با دستگاههای نامتناهی در فضاهای با ناخ می پردازیم.

سرانجام در فصل چهارم به پیدا کردن روشی به منظور استفاده از نتایج دو فصل قبل برای بدست آوردن بهترین تقریب در فضاهای هیلبرت و $C(Q)$ می پردازیم.

فهرست

فصل اول:

تعاریف ومقدمات

این فصل شامل تعاریف و پیش نیازهای لازم برای سایر فصلها است، که در سه بخش بیان می شوند:

بخش اول شامل تعاریف و علامتهایی است که به کار برده می شوند.

در بخش دوم مطالب پیش نیاز برای مطالعه بهترین تقریب در فضاهای هیلبرت با قیود متناهی بیان می شوند.

بخش سوم شامل مطالب موردنیاز برای مطالعه بهترین تقریب در فضاهای با ناخ و هیلبرت با قیود نامتناهی است.

بخش اول:نمادهاوعلامات

ابتدا نمادها و علامتهایی که در این پایان نامه استفاده شده اند و استاندارد هستند ، بیان می کنیم . در حالت خاص برای مجموعه Z (در فضایY یا در $\mathbb{R}^n$ یا در هر فضای دیگر) مجموعه نقاط درونی (به ترتیب درون نسبی، بستار ، غلاف محدب ، غلاف مخروط محدب ، فضای آفینی ، فضای خطی تولید شده ، قطب منفی و مرز) از Z توسط $\operatorname{int} Z$ (به ترتیب $ri\,Z$ ، $bd\,Z, Z^{\circ}, span\,Z, aff\,Z, cone\,Z, conv\,Z, \overline{Z}$) نمایش داده می شوند و مخروط نرمال از Zدر $\bar{z}$ با $N_Z(\bar{z})$ نشان داده و با $N_Z(\bar{z})=(Z-\bar{z})^{\circ}$ تعریف می شود.

فرض کنید $ext\,Z$ مجموعه نقاط اکستریم از Z و $\mathbb{R}_{-}$زیر مجموعه تمام اعداد حقیقی نامثبت از $\mathbb{R}$ باشد.

برای یک تابع محدب حقیقی مقدار f بر X، زیر دیفرانسیل f در $x \in X$ را با $\partial f(x)$ نمایش داده و به وسیله رابطه زیر تعریف می کنیم:

$$\partial f(x)=\{z^* \in X^* : f(y)-f(x) \geq < z^*, y-x >, \forall y \in X\}$$

که $< z^*, x >$ مقدار تابع z^* از X^* را در نقطه $x \in X$ نمایش می دهد یعنی $< z^*, x >= z^*(x)$ واگر فضا هیلبرت باشد آنگاه $X^* = X$. به ازای هر z^* یک z منحصر بفرد در Yوجود داردکه $z^*(x)=< z,x >$ لذا داریم:

$$\partial f(x)=\{z \in X : f(x)+ < z, y-x > \leq f(y), \forall y \in X\}$$

فرض کنید $P_Z(x)$ عملگر تصویر از نقطه x به مجموعه Z باشد که به صورت زیرتعریف می شود:

$$P_Z(x)=\{y \in Z : \|x-y\| = d_Z(x)\}$$

که $d_Z(x)$ نمایش فاصله نقطه x از مجموعه Z است. به صورت زیر تعریف میشود:

$$d_Z(x)=\min_{y \in Z}\|x-y\|$$

بخش دوم:پیش نیازهای دستگاههای متناهی

در این بخش فرض کنید Y,X دوفضای هیلبرت بر فضای حقیقی $\mathbb{R}$ باشند. Cیک زیر مجموعه محدب و بسته از X باشد و فرض کنید K مجموعه تمام $x\in C$هایی باشد که در دستگاه نامساوی غیرمحدب صدق می کنند:

$$A_i(x)\leq \cdot, \forall i=\text{۱},\ldots,\mathrm{m} \qquad \text{(NIS)}$$

که به ازای هر i، A_i تابع ترکیبی به صورت $H_i o F_i$ است کـه $F_i:X\to Y, H_i:Y\to\mathbb{R}$ و H_i تـابعی محدب وپیوسته و F_i یک تابع مشتق پذیر بر X با مشتق پیوسته باشد، که مشتق آن با $F_i^{'}(.)$ نمایش داده می شود.

وفـرض کنیـد $I(x)$ مجموعـه اندیـسهای فعـال x باشـد.یعنـی: $I(x)=\{i:A_i(x)=\cdot\}$ و P_C,P_K عملگرهای تصویری از فضای Y به مجموعه های K و Cرانمایش دهند.چون در حالت کلی محاسـبه P_C از روی P_Kآسان است، تعریف زیر را ارائه می دهیم:

تعریف۱،۱: می گوئیم x^* دارای خاصیت اغتشاش با توجه به C و دستگاه (NIS) است،اگر بـه ازای هـر $x\in X$ داشته باشیم:

$$x^*=P_K(x) \;\Leftrightarrow\; x^*=P_C\left(x-\sum_{i=\text{۱}}^{m}\lambda_i h_i\right)$$

برای $h_i\in\partial A_i(x^*)$, $\lambda_i\geq\cdot$, $\lambda_i=\cdot$ برای هر $i\notin I(x^*)$.

قضیه۱۰۲[۶]: در فضاهای ضرب داخلی بهترین تقریب یک مجموعه محدب و بـسته همیـشه موجـود و یکتاست.

لذا $P_K(x)$ راکه یک مجموعه است به صورت یک نقطه مـی نویـسند کـه منظـور از $P_K(x)=x^*$ همـان $P_K(x)=\{x^*\}$ است.

تعریف۱۰۳:تابع محدب سازی از A_i در x^* را با $\widetilde{A}_i$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\widetilde{A}_i(x)=H_i\,(F_i(x^*)+F_i'(x-x^*)),\forall\; x\in X \qquad \text{۱۰۳۰۱}$$

لم۱۰۴: $\widetilde{A}_i$ یک تابع محدب و پیوسته است.

اثبات : چون H_i پیوسته و F_i مشتق پذیر با مشتق پیوسته و $F_i'(x^*)$ یک تابعک خطی است.(یادآوری: مشتق در هر نقطه یک تابعک خطی است.) لذا $\widetilde{A}_i$ پیوسته است.

چون $F_i'(x^*)$ در هر نقطه خطی است پس نگاشت $x \mapsto F_i(x^*)+F_i'(x^*)(x-x^*)$ یک نگاشت آفینی است و چون H_i محدب است لذا $\widetilde{A}_i$ محدب می باشد.

نکته۱۰۵: $\widetilde{A}_i(x^*)=A_i(x^*)$ برای هر $i=1,2,...,m$.

تعریف۱،۶:به یک عضو $d \in X$ گفته می شود:

۱۰۶۰۱ : یک امتداد محدب ساز شدنی از دستگاه(NIS) در x^* است، اگر:

$$\widetilde{A}_i(x^*+d)\leq 0 \quad ,i \in I(x^*)$$

۲۰۶۰۱ :یک امتداد دنباله ای شدنی از K در x^*است، اگر دنباله $\{d_k\}$ در X وجود داشته باشد که به سمت d میل کند و یک دنباله $\{\delta_k\}$ از اعداد حقیقی مثبت که به سمت صفر میل کنند موجود باشد، به طوریکه:

$$\{x^*+\delta_k d_k\}\subseteq K \ .$$

فرض کنید$CFD(x^*)$ (به طور مشابه $SFD(x^*)$) مجموعه همه d هایی باشد، که در تعریف۱۰۶۰۱ (به طور مشابه در تعریف ۲۰۶۰۱) صدق می کنند، نمایش دهد. توجه کنید $CFD(x^*)=(\bigcap_{i\in I(x^*)}\widetilde{A}_i^{-1}(\mathbb{R}_-))-x^*$ که یک مجموعه محدب و بسته شامل مبدا است. زیرا $\widetilde{A}_i$ پیوسته و محدب و$\mathbb{R}_-$ یک مجموعه بسته است و $\widetilde{A}_i(x^*)=A_i(x^*)=0$ برای هر $i \in I(x^*)$ (اما الزاماً مخروط نیست.) در حالیکه $SFD(x^*)$ یک مخروط بسته است.(اما الزاما محدب نیست.)

تعریف۱۰۷: $K_L(x^*), K_C(x^*), K_S(x^*)$را به صورت زیر تعریف می کنیم:

۱۰۷۰۱ $$K_S(x^*)=(x^*+\overline{conv}(SFD(x^*)))\cap C$$

۲۰۷۰۱ $$K_C(x^*)=(x^*+CFD(x^*))\cap C$$

$$K_L(x^*)=\left(x^*+\overline{cone}(CFD(x^*))\right)\cap C \qquad ۳۰۷۰۱$$

دقت کنید هر سه مجموعه تعریف فوق محدب و بسته هستند و $K_C(x^*)=\bigcap_{i\in I(x^*)}\tilde{A}_i^{-1}(\mathbb{R}\_)\cap C$ و همچنین $K_C(x^*)\subseteq K_L(x^*)$, $K_C(x^*)=K_L(x^*)$ هنگامیکه مجموعه $H_i^{-1}(\mathbb{R}\_)$ یک مخروط با راس $F_i(x^*)$ برای هر $i\in I(x^*)$ باشد. بعبارت دیگر می توانیم گزاره زیر را داشته باشیم:

گزاره۸۰۱: فرض کنید مجموعه $H_i^{-1}(\mathbb{R}\_)$ یک مخروط با راس $F_i(x^*)$ برای هر $i\in I(x^*)$ باشد، آنگاه $SFD(x^*)\subseteq CFD(x^*)$ و بنابراین داریم $K_S(x^*)\subseteq K_C(x^*)=K_L(x^*)$.

اثبات : قسمت دوم با استفاده از قسمت اول و اینکه $CFD(x^*)$ یک مجموعه محدب وبسته است، بدست می آید. برای اثبات قسمت اول فرض کنید $d\in SFD(x^*)$, $\{\delta_k\}, \{d_k\}$ دو دنباله تعریف ۲۰۶۰۱ باشند، لذا $\{x^*+\delta_k d_k\}\subseteq K$. پس داریم $H_i(F_i(x^*+\delta_k d_k))\leq 0$ برای هر $i\in I(x^*)$ و بنابراین $F_i(x^*+\delta_k d_k)\in V_i$ هنگامیکه $V_i=H_i^{-1}(\mathbb{R}\_)$, $V_i-F_i(x^*)$ یک مخروط است و آنگاه:

$$\delta_k F_i'(x^*)d_k+o(\|\delta_k d_k\|)\in V_i-F_i(x^*)\Rightarrow F_i'(x^*)d_k+o(\|d_k\|)\in V_i-F_i(x^*)\Rightarrow$$
$$F_i'(x^*)d\in V_i-F_i(x^*)\Rightarrow d\in CFD(x^*)\Rightarrow SFD(x^*)\subseteq CFD(x^*).$$

گزاره۹۰۱: فرض کنید که $\operatorname{int}\left(\overline{cone}(CFD(x^*))\right)\neq\phi$ و برای هر $F_i'(x^*), i\in I(x^*)$ پوشا باشد، آنگاه $SFD(x^*)\subseteq\overline{cone}(CFD(x^*))$ و بنابراین $K_S(x^*)\subseteq K_L(x^*)$.

اثبات : کافی است مثل گزاره۸۰۱ فقط قسمت اول را ثابت کنیم. فرض کنیم $d\in SFD(x^*)$ و $\{\delta_k\},\{d_k\}$ مثل تعریف ۲۰۶۰۱ باشند آنگاه داریم:

$$SFD(x^*)\subseteq F_i'(x^*)^{-1}\,\overline{cone}\,(V_i-F_i(x^*)) \qquad ۱۰۹۰۱$$

حال ادعا می کنیم:

$$cone(CFD(x^*))=\bigcap_{i\in I(x^*)}F_i'(x^*)^{-1}\left(\overline{cone}(V_i-F_i(x^*))\right) \qquad ۲۰۹۰۱$$

طرف رفت رابطه فوق واضح است . حال برای اثبات قسمت برگشت ،اگر:

$$d \in \bigcap_{i\in I(x^*)} F_i'(x^*)^{-1}\left(cone\left(V_i - F_i(x^*)\right)\right)$$

آنگاه به ازای هر $i \in I(x^*)$ وجود دارد $t_i > ۰$ به طوریکه:

$$\frac{d}{t_i} \in F_i'(x^*)^{-1}\left(V_i - F_i(x^*)\right) \Rightarrow F_i'(x^*)\frac{d}{t_i} \in V_i - F_i(x^*), \forall i \in I(x^*)$$

فرض کنید $t = \max_{i\in I(x^*)} t_i$ چون $V_i - F_i(x^*)$ یک مخروط است، پس:

$$F_i'(x^*)\frac{d}{t} \in V_i - F_i(x^*) \Rightarrow \frac{d}{t} \in CFD(x^*) \Rightarrow d \in cone\left(CFD(x^*)\right)$$

در نتیجه رابطه ۲۰۹۰۱ برقرار است. حال با رابطه۲۰۹۰۱ و فرض $\operatorname{int}(cone(CFD(x^*)) \neq \phi$ داریم:

$$\operatorname{int}\left(\overline{\bigcap F_i'(x^*)^{-1}\ cone\left(V_i - F_i'(x^*)\right)}\right) \neq \phi \Rightarrow$$

$$\overline{cone}\ \left(CFD(x^*)\right) = \overline{\bigcap_{i\in I(x^*)} F_i'(x^*)^{-1}\ \left(cone\left(V_i - F_i(x^*)\right)\right)} =$$

$$\bigcap_{i\in I(x^*)} \overline{F_i'(x^*)^{-1}\ \left(cone\ \left(V_i - F_i(x^*)\right)\right)} = \bigcap_{i\in I(x^*)} F_i'(x^*)^{-1}\left(\overline{cone}\left(V_i - F_i(x^*)\right)\right)$$

تساوی آخر با فرض اینکه $F_i'(x^*)$ پوشاست و استفاده از قضیه نگاشت باز بدست می آید. پس با رابطه۱۰۹۰۱ نتیجه را بدست می آوریم.

گزاره۱۰۰۱: فرض کنید $\widetilde{A}_i$ تعریف شده مثل رابطه ۱۰۳۰۱ باشد،آنگاه داریم:

$$\partial A_i(x^*) = \partial\ \widetilde{A}_i(x^*) = \partial H_i\left(F_i(x^*)\right) o F_i'(x^*)$$

و با تعریف داریم $z \in \partial H_i\left(F_i(x^*)\right) o F_i'(x^*)$ اگر و تنها اگر وجود داشته باشد $\xi \in \partial H_i\left(F_i(x^*)\right)$ به طوریکه $< z, v >=< \xi, F_i'(x^*)v >$ به ازای هر $v \in X$.

اثبات: فرض کنید که H_i در $F_i(x^*)$ منظم و F_i اکیداً مشتق پذیر باشد، آنگاه با استفاده از قاعده زنجیره ای داریم:

$$\partial A_i(x^*) = \partial H_i(F_i(x^*)) o F_i'(x^*)$$

$$\partial \widetilde{A}_i(x^*) = \partial H_i(F_i(x^*)) o F_i'(x^*).$$

نیاز داریم برای بهترین تقریب یک مجموعه محدب وبسته G در X از قضیه مشهور شاخص استفاده کنیم.

گزاره۱۱۰۱ (قضیه شاخص یامشخصه(characterization)) : فرض کنید G یک مجموعه بسته ومحدب در X باشد آنگاه برای هر $x \in X$، $P_G(x) = g_0$ اگر و تنها اگر $g_0 \in G$ وبرای هر $g \in G$، $< x - g_0, g - g_0 > \leq 0$ یعنی اینکه $x - g_0 \in N_G(g_0)$.

اثبات: اگر $< x - g_0, g - g_0 > \leq 0$ به ازای هر $g \in G$، آنگاه داریم:

$$\begin{aligned}\|x - g_0\|^2 &= < x - g_0, x - g_0 > = < x - g_0, x - g > + < x - g_0, g - g_0 > \\ &\leq < x - g_0, x - g > \leq \|x - g_0\| \ \|x - g\| \Rightarrow \|x - g_0\| \leq \|x - g\| \\ &\Rightarrow P_G(x) = g_0\end{aligned}$$

حال برای اثبات عکس: اگر $P_G(x) = g_0$ با استفاده از برهان خلف فرض کنید وجود داشته باشد $g \in G$ به طوریکه $< x - g_0, g - g_0 > > 0$.

حال به ازای هر $0 < \lambda < 1$ قرار دهید $g_\lambda := \lambda g + (1 - \lambda) g_0$ و چون G محدب است لذا $g_\lambda \in G$ وداریم:

$$\begin{aligned}\|x - g_\lambda\|^2 &= < x - g_\lambda, x - g_\lambda > = < x - g_0 - \lambda(g - g_0), x - g_0 - \lambda(g - g_0) > \\ &= \|x - g_0\|^2 - 2\lambda < x - g_0, g - g_0 > + \lambda^2 \|g - g_0\|^2 \\ &= \|x - g_0\|^2 - \lambda\left(2 < x - g_0, g - g_0 > - \lambda \|g - g_0\|^2\right) \qquad \forall \lambda > 0\end{aligned}$$

برای $\lambda > 0$ بقدر کافی کوچک جمله داخلی پرانتز مثبت می شود و بنابراین داریم:

$$\|x - g_\lambda\|^2 < \|x - g_0\|^2 \Rightarrow \|x - g_\lambda\| < \|x - g_0\|$$

واین با اینکه $P_G(x) = g_0$ متناقض است.لذا قضیه اثبات میشود.

تعریف۱۰۱۲۰۱: فرض کنید $\{C_0, C_1, ..., C_m\}$ یک خانواده از مجموعه های بسته و محدب باشد و $x \in \bigcap_{j=1}^{m} C_j$. می گوئیم این مجموعه دارای خاصیت اشتراک غلاف مرکزی قوی در x است،اگر

$$.N_{\bigcap_{j=1}^{m} C_j}(x)=\sum_{j=1}^{m} N_{C_j}(x)$$

۲۰۱۲۰۱: فرض کنید $\{\phi_i : i=1,...,m\}$ یک خانواده از تابعهای محدب و پیوسته بر X و C یک مجموعه بسته و محدب در X باشد. می گوئیم دستگاه نامساویهای محدب

$$\phi_i(z)\leq 0 \quad , \; i=1,2,...m \qquad\qquad ۳۰۱۲۰۱$$

در رابطه BCQ با C در x است،اگر نامساویهای رابطه۳۰۱۲۰۱ برای $z=x$ برقرار باشد و

$$N_{C\cap(\bigcap_{i\in I(x)} C_i)}(x)=N_C(x)+cone\left(\bigcup_{i\in I(x)}\{\partial\phi_i(x)\}\right)$$

که $I(x)=\{i:\phi_i(x)=0\}$.

نکته:۱۰۱۳۰۱: اگر دستگاه ۳۰۱۲۰۱ در رابطه BCQ با C در x صدق کند، آنگاه $\{C,\phi_1^{-1}(\mathbb{R}\_),...,\phi_m^{-1}(\mathbb{R}\_)\}$ دارای خاصیت اشتراک غلاف مرکزی قوی در x است.

۲۰۱۳۰۱: اگر ϕ_i آفینی باشد، آنگاه داریم:

$$cone(\partial\phi_i(x))=N_{\phi_i^{-1}(R_-)}(x) \qquad , \; i\in I(x)$$

ولذا:

$$cone\left(\bigcup_{i\in I(x)}\phi_i(x)\right)=\sum_{i\in I(x)} cone(\partial\phi_i(x))=\sum_{i\in I(x)} N_{\phi_i^{-1}(R_-)}(x)=\sum_{i=1}^{m} N_{\phi_i^{-1}(R_-)}(x)$$

بنابراین دستگاه ۲۰۱۲۰۱ در رابطه BCQ با C در x صدق می کند اگر و تنها اگر $\{C,\phi_1^{-1}(\mathbb{R}\_),...,\phi_m^{-1}(\mathbb{R}\_)\}$ دارای خاصیت اشتراک غلاف مرکزی قوی در x باشد.

بخش سوم:پیش نیازهای دستگاههای نامتناهی

دستگاه نامساوی محدبی که ما در این بخش به آن می پردازیم عبارتست از :

$$g_i(x) \leq \cdot, \quad i \in I \qquad\qquad (CIS)$$

که I یک دستگاه اندیس دلخواه (متناهی یا غیره) و $x \in X$ وهر g_i یک تابع محدب پیوسته و حقیقی بر X و X یک فضای باناخ است. (X را ابتدا روی میدان حقیقی $\mathbb{R}$و سپس روی میدان مختلط $\mathbb{C}$ در نظر می گیریم.)

و فرض کنید S مجموعه جواب دستگاه (CIS) و ناتهی باشد.

$$(SCIS) \qquad S := \{x \in X : g_i(x) \leq \cdot \ \ , \forall\ i \in I\ \} \neq \phi \qquad ۱۴۰۱$$

فرض کنید $G(.)$تابع سوپریمم (sup) از خانواده $\{g_i\}$ را نمایش دهد:

$$G(x) = \sup_{i \in I} g_i(x)$$

آنگاه S مجموعه جواب نامساوی محدب

$$G(x) \leq \cdot$$

$(SCIS)$ نیز هست و در نظر می گیریم:

$$G(x) < \infty \ \ , \forall\ \ x \in X \qquad ۱۵۰۱$$

آنگاه Gبر X پیوسته است.این فرضیات به طور بدیهی ایجاب می کند که $\{g_i : i \in I\}$ موضعا کراندار یکنواخت است و اگر X از مرتبه متناهی باشد پیوستگی G به وضوح از رابطه ۱۵۰۱ بدست می آید.

فرض کنید C یک زیر مجموعه محدب و بسته از X و Kمجموعه تمام $x \in C$ هایی باشد که در دستگاه (CIS) صدق می کنند.

فرض کنید f یک تابع پیوسته بر Xو $x \in X$ باشد به طوریکه $f(x) = \cdot$. آنگاه:

لم۱۶۰۱: $cone(\partial f(x)) \subseteq N_{f^{-1}(R_-)}(x)$ و اگر f یک تابع آفینی یا x یک مینیمم کننده از f نباشد، آنگاه تساوی برقرار است.

تعریف۱۷۰۱: مشتق جهتی ازتابع f در xدر جهت d با $f'(x,d)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

۱۰۱۷۰۱ $$f'(x,d) := \underset{t\to 0^+}{Lim}\frac{f(x+td)-f(x)}{t}$$

با توجه به تعریف فوق داریم:

۲۰۱۷۰۱ $$\partial f(x) = \{z^* \in X^* :< z^*, d > \le f'(x,d),\ \forall d \in X\}$$

۳۰۱۷۰۱ $$f'(x,d) = \max\{< z^*, d >: z^* \in \partial f(x)\}$$

تعریف ۱۸۰۱:فرض کنید $\{A_i : i \in J\}$ یک خانواده از زیر مجموعه های X باشد مجموعه $\sum A_i$ را بـه صورت زیر تعریف می کنیم:

۱۰۱۸۰۱ $$\sum_{i\in J} A_i = \begin{cases} \{\sum_{i\in J_\circ} a_i : a_i \in A_i, J_\circ \subseteq J, |J_\circ| < \infty\} , & J \neq \phi \text{ اگر} \\ \{0\} & , J = \phi \text{ اگر} \end{cases}$$

و فرض کنید $I(x)$ مجموعه همه اندیسهای فعال i را نمایش دهد:

$$I(x) = \{i \in I : \quad g_i(x) = G(x) = 0\}$$

حال تعریف زیر را داریم:

$$N'(x) := \sum_{i\in I(x^*)} cone(\partial g_i(x)), \forall\ x \in X$$

که با رابطه ۱۰۱۸۰۱ داریم $N'(x) = cone\ (\bigcup_{i\in I(x^*)} \partial g_i(x))$ اگر $I(x) \neq \phi$، $N'(x) = \{0\}$ اگر $I(x) = \phi$.

از این به بعد در مباحث مربوط به دستگاههای با اندیس دلخواه قرار میدهیم $K := C \bigcap S$ و نتایج زیر را در حالتیکه I متناهی یا X از بعد متناهی است داریم:

تعریف۱۹۰۱: فرض کنید $x \in X$. مشابه تعریف ۲۰۱۲۰۱ می گوئیم دستگاه(CIS) در رابطه BCQ با C در x صدق می کند، اگر:

۱۰۱۹۰۱ $$N_K(x) = N_C(x) + N'(x)$$

نکته۱۰۰۲: دستگاه (CIS) در رابطه BCQ در هر $x \in C \bigcap \operatorname{int} S$ صدق می کند، زیرا رابطه۱۰۱۹۰۱ برقرار است.

تعریف ۲۱۰۱: مشابه تعریف ۱۰۱۲۰۱ فرض کنید $\{C_i : i \in I\}$ یک خانواده از زیر مجموع ه های محدب و بسته در X باشد و $x \in \bigcap_{i \in I} C_i$. می گوئیم این خانواده دارای خاصیت اشتراک غلاف مرکزی قوی در xاست، اگر:

$$N_{\bigcap_{i \in I} C_i}(x) = \sum_{i \in I} N_{C_i}(x) \qquad ۱۰۲۱۰۱$$

نکته۱۰۲۲۰۱: اگر $g_i(x) < ۰$ آنگاه $x \in \operatorname{int}(g_i^{-۱}(\mathbb{R}\_))$ و $N_{g_i^{-۱}(R\_)}(x) = ۰$ پس داریم $\sum_{i \in I(x)} N_{g_i^{-۱}(R\_)}(x) = \sum_{i \in I} N_{g_i^{-۱}(R\_)}(x)$.

۲۰۲۲۰۱: فرض کنید $x \in C \bigcap bdS$.آنگاه:

اگر دستگاه (CIS) در رابطه BCQ با Cدر x صدق کند.آنگاه $\{C, g_i^{-۱}(\mathbb{R}_) : i \in I\}$دارای خاصیت اشتراک غلاف مرکزی قوی در xاست.

۳۰۲۲۰۱: فرض کنید $x \in C \bigcap bdS$ و برای هر $i \in I(x)$ ، g_i آفینی باشد یا وجود داشته باشد $x_i \in C$ به طوریکه $g_i(x_i) < ۰$. لذا با نکته۱۶۰۱ داریم $cone\ (\partial g_i(x)) = N_{g_i^{-۱}(R\_)}(x)$.

آنگاه:

دستگاه (CIS) در رابطه BCQ با C در x صدق می کند اگر و تنها اگر $\{C, g_i^{-۱}(\mathbb{R}\_) : i \in I\}$ دارای خاصیت اشتراک غلاف مرکزی قوی در x باشد.

۴۰۲۲۰۱: هنگامیکه هر g_i آفینی است،اگر I متناهی باشد، مجموعه $\{g_i^{-۱}(\mathbb{R}\_) : i \in I\}$ دارای خاصیت اشتراک غلاف مرکزی قوی در xاست. و اگر I نامتناهی باشد، الزاما درست نمی باشد. به مثال زیر توجه کنید:

مثال۲۳۰۱: فرض کنید $X = \mathbb{R}^۲$, $I = \{۰,۱,۲,...\}$ و هر تابع آفینی g_i به صورت زیر تعریف شده باشد: