دانشگاه مازندران
دانشکده علوم ریاضی

رساله دکترای

ریاضی محض (گرایش آنالیز مجانبی)

عنوان:

مساله استورم- لیوویل کسری با نقطه برگردان

استاد راهنما:

دکتر عبدالعلی نعمتی حسین آبادی

اساتید مشاور:

دکتر عزیز الله باباخانی
دکتر کاظم قنبری

نگارش:

رحمت درزی

بهمن ۱۳۹۰

تقدیم به

روان پاک پدرم و دل مهربان مادرم

همسر عزیزم

و پسر دلبندم

تقدیر و سپاسگزاری:

الهی هر که تو را شناسد کار اوباریک و هر که تو را نشناسد راه او تاریک، تو را شناختن از تو رستن و به تو پیوستن از خود گذشتن است.

اکنون که با لطف حق تعالی نگارش این پایان نامه به اتمام رسیده بر خود لازم می دانم از زحمات استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر عبدالعلی نعمتی که در طول دوران تحصیلم با راهنمایی ها و کمک های علمی خود اینجانب را بهره مند نمودند صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم. ایشان در تمام این مدت همواره با روی باز اینجانب را پذیرفتند و با دلسوزی، مسیر موفقیت در پژوهش ها را به بنده نشان دادند. همچنین از زحمات اساتید مشاور جناب آقای دکتر عزیزاله باباخانی و جناب آقای دکتر کاظم قنبری و تمامی عزیزان و دوستانی که در مراحل علمی بنده را مورد راهنمایی و لطف قرار دادند کمال قدردانی و تشکر را دارم.

چکیده:

در این رساله معادله استورم-لیوویل از مرتبه کسری مورد مطالعه قرار می گیرد. معادله ای که با جایگزینی مشتق کسری از مرتبه عددی بین یک و دو به جای مشتق مرتبه دوم در معادله استورم-لیوویل معمولی به دست می آید. شکل کلی این معادله در این رساله به یکی از دو صورت زیر است:

$$D^{\alpha}[p(x)y'(x)] = \lambda r(x)y(x) + f(x), \qquad 0 < \alpha \leq 1$$

یا

$$D^{\alpha}y(x) + q(x)y(x) = \lambda r(x)y(x) + f(x), \qquad 1 < \alpha \leq 2$$

که در آن D^{α} مشتق کسری از مرتبه α و از نوع کاپوتو یا ریمان-لیوویل است. λ یک پارامتر حقیقی، $q(x)$ تابع پتانسیل و $r(x)$ تابع وزن نامیده می شود. ریشه های تابع وزن را نقاط برگردان گوییم. در این رساله در ابتدا و در حالت کلاسیک با روش های عددی و تحلیلی-عددی همچون روش تکرار با هسته جدایی پذیر، آنالیز هموتوپی، اختلال هموتوپی، تکرار تغییرات، موجک هار و روش ترکیبی کالوکیشن-شوتینگ به حل معادله دیفرانسیل استورم-لیوویل از مرتبه کسری می پردازیم. سپس با روش جداسازی متغیرها، معادلات لاپلاس، موج و موج-انتشار از مرتبه کسری را حل می کنیم. به کار گیری روش جداسازی متغیرها منجر به ظاهر شدن معادله استورم-لیوویل مرتبه کسری می گردد. در نهایت معادله را با نقاط α-معمولی و α-منفرد با مشتق مرتبه کسری مکرر و همچنین با نقطه برگردان با مشتق کسری از نوع کاپوتو و ریمان-لیوویل مورد مطالعه قرار می دهیم.

کلمات کلیدی: معادله دیفرانسیل، مرتبه کسری، عملگر انتگرال، مشتق کاپوتو، مشتق ریمان-لیوویل، روشهای عددی، معادله لاپلاس، معادله موج-انتشار، نقاط برگردان.

فهرست مطالب

لیست جداول

پیش گفتار:

معادلات دیفرانسیل از مرتبه کسری نیز برای اولین بار در سال ۱۶۹۵ با مفاهیم کسرها توسط لایب نیتز[۱] و هوپیتال[۲] مطرح گردید [۳۵،۵۹]. سپس با تلاش دانشمندانی همچون هووساید[۳] (۱۸۹۲) و ژمانت[۴] (۱۹۳۶) ادامه یافت و به دلیل کاربرد این موضوع در زمینه هایی همچون الکترو مغناطیس، الکترو شیمی، فیزیک، مسائل حمل ونقل عمومی و... مورد توجه قرار گرفت [۳۵،۵۹]. یکی از این معادلات، معادله دیفرانسیل استورم-لیوویل از مرتبه کسری است، معادله ای که با جایگزینی مشتق مرتبه کسری از مرتبه عددی بین یک و دو به جای مشتق مرتبه دوم در معادله استورم-لیوویل به دست می آید. در خصوص این معادلات تحقیقات وسیعی انجام نشده است. در این رساله سعی گردیده که خواننده با برخی روشهای عددی و تحلیلی-عددی برای حل معادلات مرتبه کسری آشنا شود و روش هایی که هنوز قابل توسعه و گسترش می باشند، در این جا تشریح می شوند. یکی از اهدافی که در این رساله به آن پرداخته ایم، ارائه جواب های دو طرف نقطه برگردان در معادله استورم-لیوویل از مرتبه کسری است.

این رساله شامل پنج فصل است. با توجه به اهدافی که به موازات حالت معمولی مد نظر داریم، در فصل اول به مرور نتایج حاصل از تحقیقاتی که در خصوص معادله استورم-لیوویل انجام داده ایم، می پردازیم. سپس برخی تعاریف و مقدمات از جمله معرفی چند تابع پایه ای، تعریف انتگرال و مشتق کسری و روابطی در این خصوص که نقش مهمی در بیان دیدگاه حساب کسری دارند را می آوریم. در فصل دوم چند روش عددی از جمله روش تکرار با هسته های جدایی پذیر، روش تجزیه آدومیان (ADM)، روش آنالیز هموتوپی (HAM)، روش تکرار تغییرات (VIM)، روش اختلال هموتوپی (HPM)، روش موجک هار و روش ترکیبی کالوکیشن-شوتینگ برای حل معادله مورد نظر ارائه می شود. در فصل سوم معادلات لاپلاس، موج و موج-انتشار کسری به روش جداسازی متغیرها را حل می کنیم. در فصل چهارم معادلات استورم-لیوویل با مشتق کسری مکرر با نقاط α-معمولی و α-منفرد و معادلات استورم-لیوویل با مشتق کسری از نوع کاپوتو و ریمان-لیوویل و با نقطه برگردان را مورد مطالعه قرار می دهیم. سرانجام، در فصل پنجم ضمن اشاره مختصر به نتایج حاصل، کارهای در دست اقدام در خصوص معادله با نقطه برگردان و برخی پیشنهادها درباره ادامه کار ارائه می گردد.

---
[۱] Leibniz
[۲] Hopital
[۳] Heaviside
[۴] Gemant

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱.۱ مقدمه

پدیده های طبیعی زیادی به صورت یک معادله دیفرانسیل خطی و با شرایط مرزی قابل بیان می باشند. بسیاری از این معادلات با تغییراتی قابل تبدیل به معادله استورم-لیوویل معمولی اند.در سالهای اخیر مقالات و کتب زیادی در خصوص معرفی روشهای حل و کاربرد معادلات استورم-لیوویل معمولی با شرایط متفاوت منتشر شده است. به عنوان مثال می توان به کارهایی از فریلینگ و یورکو [۱۸-۱۵]، مینگرالی و جدیری [۲۷،۲۸] و نعمتی [۳۹،۴۰،۴۲،۴۳،۵۶،۵۷] اشاره نمود. در این بخش مروری کوتاه بر نتایج حاصل از تحقیقات روی معادله استورم-لیوویل داریم.

۱.۱.۱ مروری بر معادله استورم-لیوویل

شکل کلی این معادله چنین است:

$$Ly(x) = \lambda r(x)y(x) \tag{۱.۱.۱}$$

که در آن $L = -\frac{d}{dx}[p(x)\frac{d}{dx}] + q(x)$. یا به فرم ساده تر زیر می باشد:

$$y''(x) + (\lambda r(x) - q(x))y(x) = 0. \tag{۲.۱.۱}$$

در تعریف فوق $q(x)$ تابع پتانسیل و $r(x)$ تابع وزن نامیده می شوند و λ پارامتر حقیقی است. ابتدا در [۴۰] به ارائه صورت مجانبی جواب مساله (۲.۱.۱) به همراه شرایط اولیه:

$$y(0, \lambda) = 0, \qquad y'(0, \lambda) = 0, \tag{۳.۱.۱}$$

در سرتاسر بازه $[0,1]$ پرداختیم. در این کار فرض کردیم که مساله دارای سه نقطه برگردان x_1, x_2 و x_3 به ترتیب از نوع چهارم، سوم و اول باشد. با استفاده از جواب های اساسی قبل و بعد از نقطه برگردان، به طور متوالی و با استفاده از قاعده کرامر، شکل مجانبی جواب سراسری را به دست آوردیم. سپس در [۵۶،۵۷] مساله (۲.۱.۱) را به همراه شرایط اولیه:

$$y(0,\lambda)=0, \qquad y'(0,\lambda)=0, \tag{4.1.1}$$

را در نظر گرفتیم، که در آن تابع وزن یعنی $r(x)$ حقیقی و دارای سه ریشه است. همچنین فرض کردیم یکی از نقاط برگردان از مرتبه فرد و از نوع چهارم و دو نقطه دیگر از مرتبه زوج و نوع دوم هستند. به علاوه این نقاط برگردان قطب از مرتبه اول یا دوم تابع $q(x)$ می باشند. با این مفروضات قضیه زیر نتیجه می شود:

قضیه ۱.۱.۱. *فرض کنید $C(x,\rho)$ جواب معادله (۲.۱.۱) باشد. در این صورت تحت شرایط اولیه (۴.۱.۱) داریم:*

$$C(x,\rho)=\frac{1}{2}|\phi(x)|^{-\frac{1}{2}}|\phi(0)|^{\frac{1}{2}}e^{\rho\int_0^x|\phi(t)|dt}[[1]], \qquad 0\le x<x_1,$$

و برای $x_\nu \le x < x_{\nu+1}$

$$C(x,\rho)=\frac{1}{2}|\phi(x)|^{-\frac{1}{2}}|\phi(0)|^{\frac{1}{2}}\frac{\sin\frac{1}{2}(l_1+\mu)\eta_1\pi}{\sin\eta_1\pi}...\frac{\sin\frac{1}{2}(l_\nu+\mu)\eta_\nu\pi}{\sin\eta_\nu\pi}e^{\rho\int_0^{x_1}|\phi(t)|dt+i\rho\int_{x_1}^{x}|\phi(t)|dt-i\frac{\pi}{4}}.$$

در ادامه و این بار در [۱۱] برای مساله (۲.۱.۱)-(۴.۱.۱) با سه نقطه برگردان x_1, x_2 و x_3 به ترتیب از نوع اول، چهارم و دوم معادله دوآل را به دست آوردیم. ابتدا با استفاده از جواب های اساسی هر بازه، شکل مجانبی جواب را در سرتاسر بازه ها را یافته ایم. سپس از فرم مجانبی جواب و شرایط مرزی، مقادیر ویژه منفی و مثبت حاصل گردید:

$$\sqrt{\lambda_n^-(b)}=i\frac{n\pi}{\int_0^b|\phi(t)|dt}+O(\frac{1}{n}).$$

همچنین برای $b\in(x_1,x_2)$ نیز یک مجموعه شمارا از مقادیر ویژه منفی $\{\lambda_n^-(b)\}_{n\ge 0}$:

$$\sqrt{\lambda_n^-(b)}=i\frac{n\pi}{\int_0^b|\phi(t)|dt}+O(\frac{1}{n}).$$

به دست آوردیم. و برای $b\in(x_\nu,x_{\nu+1})$ که $\nu>1$ نشان دادیم که مساله دارای تعداد نامتناهی مقادیر ویژه مثبت و منفی

$$\sqrt{\lambda_n^-(b)}=i\frac{n\pi-\frac{\pi}{4}}{\int_0^{x_2}|\phi(t)|dt}+O(\frac{1}{n}),$$

$$\sqrt{\lambda_n^+(b)} = \frac{n\pi - \frac{\pi}{4}}{\int_{x_2}^{b} |\phi(t)|dt} + O(\frac{1}{n}),$$

است. سپس از قضیه آدامارد استفاده کرده و جواب $C(x,\rho)$ را به صورت حاصلضربی نوشتیم، یعنی:

$$C(x,\lambda) = c(x)\prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n(x)}),$$

که در آن $c(x)$ مستقل از λ است. که این معادله را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$C(x,\lambda) = c_1(x)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda - \lambda_n(x)}{z_n^2},$$

که در آن $c_1(x) = c(x)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{-z_n^2}{\lambda_n(x)}$، $z_n = \frac{n\pi}{R_-(x)}$ و $R_-(x) = \int_0^x \sqrt{\max\{0, -\phi^2(t)\}dt}$ با توجه به مطالب فوق، به طور کلی قضایای زیر را روی فاصله $[0, 1]$ داریم. اثبات این قضایا در [۱۲] آمده است.

قضیه ۲.۱.۱. *اگر $C(x,\lambda)$ جواب مساله باشد آنگاه:*

- وقتی $0 < x < x_1$

$$C(x,\lambda) = |\phi(x)|^{-\frac{1}{2}}|\phi(0)|^{\frac{1}{2}}R_-(x)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda - \lambda_n(x)}{z_n^2},$$

- اگر $x_1 < x < x_2$ آنگاه

$$C(x,\lambda) = |\phi(x)|^{-\frac{1}{2}}|\phi(0)|^{\frac{1}{2}}R_-(x)\csc\pi\mu_1\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda - \lambda_n(x)}{z_n^2},$$

- اگر $x_2 < x < x_3$ آنگاه

$$C(x,\lambda) = |\phi(x)|^{-\frac{1}{2}}|\phi(0)|^{\frac{1}{2}}R_-(x)\csc\pi\mu_1\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda - \lambda_n(x)}{z_n^2},$$

- اگر $x_3 < x < 1$ آنگاه

$$C(x,\lambda) = |\phi(x)|^{-\frac{1}{2}}|\phi(0)|^{\frac{1}{2}}(R_-(x)R_+(x))^{\frac{1}{2}}\csc\pi\mu_1\csc\frac{\pi\mu_2}{2}\csc\pi\mu_3$$
$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda - \lambda_n^-(x)}{\tilde{j}_n}R_-^2(x)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n^+(x) - \lambda}{\tilde{j}_n}R_+^2(x).$$

قضیه ۳.۱.۱. *وقتی $x \in (0, x_1)$، دنباله توابع $\{\lambda_n(x)\}$ در معادله زیر تحت عنوان معادله دوآل صدق می کند:*

$$\lambda'' + \frac{2c'(x)\lambda_n'(x)}{c(x)} + 2\lambda_n(x)\lambda_n'(x)\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda'}{\lambda_i^2(x)}(1 - \frac{\lambda_n(x)}{\lambda_i(x)})^{-1} - 2\frac{(\lambda_n'(x))^2}{\lambda_n(x)} = 0$$

قضیه ۴.۱.۱. *وقتی* $x \in (x_1, x_2)$*، دنباله توابع* $\{\lambda_n(x)\}$ *در معادله زیر تحت عنوان معادله دوآل صدق می کند:*

$$\lambda'' + \frac{2c'(x)\lambda_n'(x)}{c(x)} + 2\lambda_n(x)\lambda_n'(x)\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda'}{\lambda_i^2(x)}(1-\frac{\lambda_n(x)}{\lambda_i(x)})^{-1} - 2\frac{(\lambda^{+\prime}_n(x))^2}{\lambda_n^+(x)} = 0.$$

قضیه ۵.۱.۱. *وقتی* $x \in (x_2, x_3)$*، دنباله توابع* $\{\lambda_n(x)\}$ *در معادله زیر تحت عنوان معادله دوآل صدق می کند:*

$$\lambda'' + \frac{2d'(x)(\lambda_n^+)'}{d(x)} + 2\lambda_n^+(x)\lambda_n^-(x)\sum_{i\geq 1, i\neq n}^{\infty}\frac{(\lambda_i^+(x))'}{\lambda_i(x)}(\lambda_i^+(x)-\lambda_n^+(x))^{-1}$$
$$+\sum_{i\neq n}^{\infty}\frac{(\lambda_i^-(x))'}{\lambda_i^-(x)}(\lambda_i^+(x)-\lambda_n^+(x))^{-1}) - 2\frac{[(\lambda_n^+(x))']^2}{\lambda_n^+(x)} = 0.$$

قضیه ۶.۱.۱. *وقتی* $x \in (x_2, x_3)$*، دنباله توابع* $\{\lambda_n(x)\}$ *در معادله زیر تحت عنوان معادله دوآل صدق می کند:*

$$\lambda'' + \frac{2d'(x)(\lambda_n^-(x))'}{d(x)} + 2\lambda_n^+(x)\lambda_n^-(x)\sum_{i\geq 1, i\neq n}^{\infty}\frac{(\lambda_i^+(x))'}{\lambda_i(x)}(\lambda_i^-(x)-\lambda_n^-(x))^{-1}$$
$$+\sum_{i\neq n}^{\infty}\frac{(\lambda_i^+(x))'}{\lambda_i^+(x)}(\lambda_i^-(x)-\lambda_n^-(x))^{-1}) - 2\frac{[(\lambda_n^-(x))']^2}{\lambda_n^-(x)} = 0.$$

۲.۱ توابع پایه ای در حساب کسری

آبل[۱] دانشمند نروژی اولین کسی بود که از حساب کسری برای حل یک مساله استفاده کرد. بسیاری از پدیده ها در مسائل فیزیک، شیمی و دیگر علوم را می توان با استفاده از مدل سازی ریاضی، در حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری به صورت معادلات دیفرانسیل بیان کرد. در سالهای اخیر کتب و مقالاتی در خصوص حساب کسری توسط دانشمندان علوم مختلف منتشر شده است [۳، ۲۹، ۳۵، ۵۹، ۶۲]. در این جا به معرفی توابع گاما[۲]، بتا[۳] و میتاگ-لفلر[۴] می پردازیم. این توابع نقش مهمی در حساب کسری ایفا می کنند.

[۱] Abel
[۲] Gamma
[۳] Beta
[۴] Mittag-leffler

۱.۲.۱ تابع گامای اویلر

اولین تعریفی که در اینجا ارائه می گردد، تعریف تابع گامای اویلر است. راه های زیادی برای تعریف تابع گامای اویلر وجود دارد. در اینجا تعریفی را که در حساب کسری مفید است، ارائه می نمائیم.

تعریف ۱.۲.۱. *برای $z \in \mathbb{C}$ ، تابع گامای اویلر $\Gamma(z)$ به صورت زیر تعریف می شود:*

$$\Gamma(z) = \int_{0}^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \qquad Re(z) > 0$$

قضیه ۲.۲.۱. *تابع گاما دارای خواص زیر است* [۲۹]

- *وقتی $Re(z) > 0$، تعریف فوق معادل است با:*

$$\Gamma(z) = \int_{0}^{\infty} (\ln \frac{1}{t})^{z-1} dt$$

- *وقتی $Re(z) \leq 0$ با $z \neq 0, -1, -2, \ldots$ آنگاه:*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

- *برای $n \in \mathbf{N}$:*

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

- *برای $z \in \mathbb{C} - \{0, -1, -2, \ldots\}$ داریم:*

$$\Gamma(1-z) = -z\Gamma(-z)$$

- *وقتی $Re(z) > 0$، $\Gamma(z)$ دارای نمایش حدی زیر است:*

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^{z}}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}$$

نمایش حدی فوق با حاصلضرب نامتناهی اویلر یعنی:

$$\frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^{z}}{1+\frac{z}{n}}$$

معادل است.

از قضیه فوق نتایج زیر به دست می آیند: [۲۹]

۱. تابع گاما تعمیمی از تابع فاکتوریل است.

۲. به استقراء، خاصیت چهارم قضیه (۲.۲.۲) می تواند به رابطه زیر تعمیم داده شود:

$$\Gamma(n-z) = (-۱)^n \Gamma(-z)(z-n)$$

که درآن $\{...,۲-,۱-,۰\} - z \in \mathbb{C}$ و $n \in \mathbb{N}$.

۳. ازترکیب خواص قضیه فوق داریم:

$$\Gamma(-z)\Gamma(۱-z) = \frac{\Gamma(۱-z)}{-z}\Gamma(z)z = -\Gamma(۱-z)\Gamma(z) = -\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

و به طور کلی تر، برای $k \in \mathbb{N}$:

$$(-۱)^{k+۱}\Gamma(z-k)\Gamma(k+۱-z) = \Gamma(-z)\Gamma(z+۱).$$

تعریف ۳.۲.۱. *برای عدد صحیح n نماد $(z)_n$ چنین تعریف می شود:*

$$(z)_n = z(z+۱)...(z+n-۱), \quad n = ۱, ۲, ..., \quad (z)_۰ = ۱$$

بدیهی است که:

$$(z)_n = (-۱)^n(۱-n-z), \quad (۱)_n = n!,$$

همچنین داریم:

$$(z)_n = \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)}$$

تعریف ۴.۲.۱. *ضرائب دوجمله ای تعمیم یافته $\binom{\alpha}{k}$ برای $\alpha \in \mathbb{R}$ و $k \in \mathbb{N}_۰$ چنین تعریف می شود:*

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{(-۱)^{n-۱}\alpha\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(۱-\alpha)\Gamma(n+۱)} = \frac{\alpha(\alpha-۱)(\alpha-۱)...(\alpha-n+۱)}{k!} = \frac{(-۱)^n(-\alpha)_n}{n!}.$$

به ویژه وقتی $\alpha = m \; (m = ۱, ۲, ...)$ داریم:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}, \qquad m \geq n, \qquad \binom{m}{n} = ۰, \qquad ۰ \leq m < n.$$

تعریف ۵.۲.۱. *برای β دلخواه و $\alpha \neq -۱, -۲, ...$*

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+۱)}{\Gamma(\beta+۱)\Gamma(\alpha-\beta+۱)} = \frac{\sin(\beta-\alpha)\pi}{\pi}\frac{\Gamma(\alpha+۱)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta+۱)}.$$

به کمک تابع گاما تعدادی توابع خاص می توانند تعریف شوند که برخی از این توابع در تعمیم حساب کلاسیک به حساب کسری مفیدند. یکی از مهم ترین این توابع، تابع بتا است.

۲.۲.۱ تابع بتا

تابع بتا ارتباط نزدیکی با تابع گاما دارد:

تعریف ۶.۲.۱. *تابع بتای $B(z,w)$ از دو متغیر $z,w \in \mathbb{C}$ در انتگرال زیر تعریف می شود:*

$$B(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt$$

قضیه ۷.۲.۱. *تابع بتا دارای خواص زیر است [۲۹]*

الف) برای $Re(z) > 0$ و $Re(w) > 0$ تعریف فوق معادل است با:

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} = \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{(1+t)^{z+w}}dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2z-1}(\cos t)^{2w-1}dt$$

ب) $B(z,w) = B(w,z)$

ج) $B(z,w) = B(z+1,w) + B(z,w+1)$

د) $B(z,w+1) = \frac{w}{z}B(z+1,w) + \frac{w}{z+w}B(z,w+1)$

برهان. الف) با جایگذاری $t = \frac{x}{x+1}$ و $t = \sin^2\phi$ در تعریف ۶.۲.۱ به ترتیب جملات سوم و چهارم قسمت الف به دست می آید. از طرفی داریم:

$$\Gamma(z)\Gamma(w) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt \int_0^\infty e^{-s}s^{w-1}dt$$

با فرض $t = x^2$ و $s = y^2$ نتیجه می شود:

$$\Gamma(z)\Gamma(w) = 4\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2z-1}dx \int_0^\infty e^{-y^2}y^{2w-1}dy = 4\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2}x^{2z-1}y^{2w-1}dxdy.$$

بااستفاده از مختصات قطبی $x = r\cos\theta$ ،$y = r\sin\theta$ داریم:

$$\Gamma(z)\Gamma(w) = 4\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2z+2w-2}(\cos\theta)^{2z-1}(\sin\theta)^{2w-1}rdrd\theta$$
$$= 2\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2z+2w-1}dr \times 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2z-1}(\sin\theta)^{2w-1}d\theta.$$

اکنون با قرار دادن $\theta = \frac{\pi}{2} - \phi$ ، $r = \sqrt{t}$نتیجه می گیریم:

$$\Gamma(z)\Gamma(w) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z+w-1}dt \times 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\phi)^{2z-1}(\cos\phi)^{2w-1}d\phi$$

که جمله آخر نتیجه می دهد:

$$\Gamma(z)\Gamma(w) = \Gamma(z+w)B(z,w).$$

خواص دیگر با استفاده از خاصیت الف، به آسانی قابل اثبات می باشند.

۳.۲.۱ تابع میتاگ-لفلر

یکی دیگر از توابعی که در مطالعه حساب کسری نقش مهمی را ایفا می کند، تابع میتاگ-لفلر است. این تابع به نام ریاضیدان سوئدی می باشد. تابع مهمی که در زمینه حساب کسری مورد استفاده فراوانی قرار می گیرد. این تابع تعمیم یافته تابع نمایی است.

تعریف ۸.۲.۱. *برای $z \in \mathbb{C}$ تابع میتاگ-لفلر چنین تعریف می شود:*

$$E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n\alpha + 1)} \qquad \alpha > 0, \tag{1.2.1}$$

و تابع میتاگ-لفلر تعمیم یافته $E_{\alpha,\beta}(z)$ به صورت زیر است:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n\alpha + \beta)} \qquad \alpha, \beta > 0. \tag{2.2.1}$$

همچنین تابع میتاگ-لفلر تعمیم یافته $E_{\alpha,\beta,\gamma}(z)$ به صورت زیر تعریف می شود [۲۸]*:*

$$E_{\alpha,\beta,\gamma}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{3.2.1}$$

$$c_n = \prod_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma[\alpha(j\beta + \gamma) + 1]}{\Gamma[\alpha(j\beta + \gamma + 1) + 1]}. \tag{4.2.1}$$

قضیه ۹.۲.۱. *تابع میتاگ-لفلر دارای خواص زیر است* [۲۹،۳۵]

۱. *تابع میتاگ-لفلر برای هر $z \in C$ همگراست.*

۲. *برای مقادیر خاص تابع میتاگ-لفلر به صورت زیر است:*

$i)\ E_0(z) = \frac{1}{1-z},$ $\qquad ii)\ E_1(z) = e^z$

$iii)\ E_2(z^2) = \cosh z$ $\qquad iv)\ E_2(-z^2) = \cos z$

۳. *وقتی $|z| < 1$ تبدیل لاپلاس تابع میتاگ-لفلر $E_\alpha(z^\alpha)$ عبارت است از:*

$$\int_0^\infty e^{-zt} E_\alpha(z^\alpha) dt = \frac{1}{z - z^{1-\alpha}}$$

۴. *وقتی $|z| < 1$ تبدیل لاپلاس تابع میتاگ-لفلر تعمیم یافته در رابطه زیر صدق می کند:*

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(t^\alpha z) dt = \frac{1}{z-1}$$

۳.۱ حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری

در این بخش خلاصه ای از حساب کسری و ار تباط قوی آن با توسعه حساب دیفرانسیل و انتگرال معمولی ارائه می گردد [۳۱،۵۵]. انتگرال از مرتبه کسری ریمان-لیوویل[5] ، مشتق از مرتبه کسری و از نوع کاپوتو[6] و ریمان-لیوویل و... روی بازه های متناهی و نیم بازه را ارائه می کنیم. علاوه بر این برخی نتایج تحلیلی و کاربردهای حساب کسری ارائه می شود.

۱.۳.۱ انتگرال کسری ریمان- لیوویل

یکی از مهمترین عملگرها در حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری، عملگر انتگرال ریمان-لیوویل است. لذا این بخش را با تعریف این عملگر آغاز می کنیم.

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید $\alpha \in R^+$ عملگر $I_{a^+}^{\alpha}$ روی $L_1[a,b]$ در تساوی زیر تعریف می شود:

$$(I_a^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt$$

عملگر انتگرال کسری ریمان-لیوویل از مرتبه α نامیده می شود. برای $\alpha = 0$، $I_{a^+}^{\alpha} = I$ عملگرهمانی است. در تعریف فوق، وجود انتگرال برای حالت $\alpha \geq 0$ براساس این واقعیت است که تابع زیر انتگرال حاصلضربی از یک تابع انتگرال پذیر f و تابع پیوسته $(x-.)^{\alpha-1}$ می باشد. برای اثبات وجود جواب، قضیه زیر را داریم:

قضیه ۲.۳.۱. فرض کنید $f \in L_1[a,b]$ و $\alpha \geq 0$ در این صورت عملگر انتگرال $I_{a^+}^{\alpha}$تقریبا برای هر $x \in [a,b]$ وجود دارد و تابع $I_a^{\alpha} f$ نیز متعلق به فضای $L_1[a,b]$ است.

برهان. داریم:

$$\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt = \int_0^{\infty} \phi_1(x-t)\phi_2(t)dt$$

که در آن:

$$\phi_1(u) = \begin{cases} u^{\alpha-1}, & 0 < u \leq b-a \\ 0, & o.w \end{cases} , \qquad \phi_2(u) = \begin{cases} f(u), & 0 < u \leq b \\ 0, & o.w \end{cases}$$

[5] Riemann-Liouville
[6] Caputo

داریم $\phi_i \in L_1(R)$. لذا از نتایج کلاسیک روی انتگرال لبگ نتیجه دلخواه حاصل می گردد. اکنون تعریفی دیگر ازعملگر انتگرال کسری ریمان-لیوویل ارائه می کنیم به طوری که نشان می دهد این تعریف، تعمیمی از انتگرال کوشی است.

تعریف ۳.۳.۱. *دستور کوشی برای انتگرال $n-$ گانه $n \in N$ چنین تعریف می شود:*

$$I_{a^+}^n f(x) = \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 ... \int_a^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt$$

و

$$I_{b^-}^n f(x) = \int_x^b dt_1 \int_{t_1}^b dt_2 ... \int_{t_{n-1}}^b f(t_n)dt_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_x^b (x-t)^{n-1} f(t)dt.$$

تعریف ۴.۳.۱. *فرض کنید $f \in C[a,b]$ و $\alpha > 0$. انتگرال کسری چپ ریمان-لیوویل تابع f از مرتبه α که با $I_{a^+}^\alpha f$ نشان می دهیم، چنین تعریف می شود:*

$$(I_{a^+}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \qquad x > a. \tag{۱.۳.۱}$$

تعریف ۵.۳.۱. *فرض کنید $f \in C[a,b]$ و $\alpha > 0$. انتگرال کسری راست ریمان-لیوویل تابع f از مرتبه α که با $I_{b^-}^\alpha f$ نشان می دهیم، چنین تعریف می شود:*

$$(I_{b^-}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt, \qquad x < b. \tag{۲.۳.۱}$$

در لم زیر بعضی خواص انتگرال کسری ریمان لیوویل ارائه می گردد.

لم ۶.۳.۱. *اگر $f \in C[a,b]$ و $\alpha, \beta > 0$ آنگاه روابط زیر برقرارند:*

$$i.\ (I_{a^+}^\alpha I_{a^+}^\beta f)(x) = (I_{a^+}^{\alpha+\beta} f)(x), \qquad ii.\ (I_{b^-}^\alpha I_{b^-}^\beta f)(x) = (I_{b^-}^{\alpha+\beta} f)(x)$$

$$iii.\ (I_{a^+}^\alpha I_{a^+}^\beta f)(x) = (I_{a^+}^\beta I_{a^+}^\alpha f)(x), \qquad iv. I_{b^-}^\alpha I_{b^-}^\beta f)(x) = (I_{b^-}^\beta I_{b^-}^\alpha f)(x)$$

برهان. اثبات مستقیما انجام می گیرد:

$$I_{a^+}^\alpha I_{a^+}^\beta f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\int_a^t (t-r)^{\alpha-1} f(r)drdt$$

اکنون از قضیه فوبینی و استفاده از تغییر متغیر $t = r + s(x-r)$ نتیجه می گیریم:

$$I_{a^+}^{\alpha+\beta} f = \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x (x-r)^{\alpha-\beta-1}dr$$

که این i را نتیجه می دهد. اثبات ii به طور مشابه است.

برای اثبات iii کافی است جای α و β را در اثبات قسمت i عوض کنیم. اثبات iv به طور مشابه است.

لم ۷.۳.۱. *اگر $f \in C[a,b]$ و $\alpha > ۰$ و $\beta > -۱$ آنگاه روابط زیر برقرارند:*

$$i.\ (I^{\alpha}_{a^+}(t-a)^{\beta})(x) = \frac{\Gamma(\beta+۱)}{\Gamma(\alpha+\beta+۱)}(x-a)^{\alpha+\beta},$$

$$ii.\ \ (I^{\alpha}_{b^-}(b-t)^{\beta})(x) = \frac{\Gamma(\beta+۱)}{\Gamma(\alpha+\beta+۱)}(b-x)^{\alpha+\beta}$$

برهان. با قرار دادن $f(t) = (t-a)^{\beta}$ و $f(t) = (b-t)^{\beta}$ به ترتیب در (۱.۳.۲) و (۲.۳.۲) به راحتی روابط فوق اثبات می گردند.

۲.۳.۱ مشتق کسری ریمان- لیوویل

تعریف ۸.۳.۱. *فرض کنید $\alpha \in \mathbb{R}^+$، $n = [\alpha]+۱$ و $f \in C[a,b]$. مشتق کسری چپ ریمان-لیوویل تابع f از مرتبه α که با $D^{\alpha}_{a^+}f$ نشان می دهیم، عبارت است از:*

$$(D^{\alpha}_{a^+}f)(x) = (D^n I^{n-\alpha}_{a^+}f)(x) = \frac{۱}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-۱}f(t)dt, \qquad x > a \quad (۳.۳.۱)$$

تعریف ۹.۳.۱. *فرض کنید $\alpha \in \mathbb{R}^+$، $n = [\alpha]+۱$ و $f \in C[a,b]$. مشتق کسری راست ریمان-لیوویل تابع f از مرتبه α که با $D^{\alpha}_{b^-}f$ نشان می دهیم، عبارت است از:*

$$(D^{\alpha}_{b^-}f)(x) = (-۱)^n(D^n I^{n-\alpha}_{b^-}f)(x) = \frac{(-۱)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_x^b (t-x)^{n-\alpha-۱}f(t)dt,\ x < b \quad (۴.۳.۱)$$

لم ۱۰.۳.۱. *اگر $f \in C[a,b]$ و $\alpha > ۰$ و $\beta > -۱$ آنگاه روابط زیر برقرارند:* **[۲۹]**

$$i.\ (D^{\alpha}_{a^+}(t-a)^{\beta})(x) = \frac{\Gamma(\beta+۱)}{\Gamma(\beta-\alpha+۱)}(x-a)^{\beta-\alpha}, \quad (۵.۳.۱)$$

$$ii.\ \ (D^{\alpha}_{b^-}(b-t)^{\beta})(x) = \frac{\Gamma(\beta+۱)}{\Gamma(\beta-\alpha+۱)}(b-x)^{\beta-\alpha}. \quad (۶.۳.۱)$$

همچنین برای $j = ۱, ..., [\alpha]+۱$:

$$i.\ (D^{\alpha}_{a^+}(t-a)^{\alpha-j})(x) = ۰, \qquad ii.\ \ (D^{\alpha}_{b^-}(b-t)^{\alpha-j})(x) = ۰. \quad (۷.۳.۱)$$

به ویژه برای مقدار ثابت C داریم:

$$i.\ D^{\alpha}_{a^+}C = \frac{C(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(۱-\alpha)}, \qquad ii.\ \ D^{\alpha}_{b^-}C = \frac{C(b-x)^{-\alpha}}{\Gamma(۱-\alpha)}.$$