بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به مادر مظلوم و عمه ای ستمدیده

دانشکده علوم ریاضی

رساله دکتری ریاضی کاربردی

# حل عددی مسائل مقدار مرزی خطی-بیضوی نوع سوّم با استفاده از روش موجک-گالرکین

استاد راهنما

**دکتر اصغر کرایه چیان**

استاد مشاور

**دکتر رجبعلی کامیابی گل**

نگارش

**هانی اکبری**

اردیبهشت ۱۳۹۱

**** من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق ****

با تقدیر از

دکتر اصغر کرایه چیان

و

دکتر رجبعلی کامیابی گل،

که راهنمایی، مشاوره و دقت نظر ایشان همواره راهگشا بود.

با تقدیر از داوران محترم

دکتر مهدی دهقان،

دکتر فائزه توتونیان،

دکتر علی اکبر عارفی جمال،

و دکتر ریحانه رئیسی طوسی،

که از همکاری آنان صمیمانه سپاسگزارم.

# قدردانی


با قدردانی از

دکتر ابوالقاسم راعی، استاد دانشکده برق دانشگاه امیرکبیر

و

دکتر فائزه توتونیان، استاد دانشکده ریاضی دانشگاه فردوسی

که مصادیق بارز وجدان کاری هستند.

با دست بوسی و تشکر فراوان از والدین مهربان، گرامی و بزرگوارم که آسایش خود را فدای آسایش من کردند.

با سپاس از همسر عزیزم که این رساله، نتیجه صبر و تحمل و دلگرمی های اوست.

# چکیده


مسائل مقدار مرزی بیضوی خطی، در بسیاری از مسائل علوم و مهندسی ظاهر می شوند. در این رساله حل عددی این مسائل با شرایط مرزی نوع سوم و با استفاده از روش کویفلت- گالرکین بررسی می شود. در واقع مسأله ای که در نظر خواهیم گرفت یافتن تابع $u : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ است که در مسأله مقدار مرزی زیر صدق می کند:

$$\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ij}(X)\frac{\partial u}{\partial x_i}) + \sum_{i=1}^{d} \beta_i(X)\frac{\partial u}{\partial x_i} + \mu(X)u = f(X) \quad in\, \Omega,$$
$$\sum_{i,j=1}^{d} \mathbf{n}_j(\sigma_{ij}(X)\frac{\partial u}{\partial x_i}) + \gamma(X)u = g(X) \quad on\, \partial\Omega.$$

در روابط فوق داریم $X = (x_1, \cdots, x_d) \in \bar{\Omega}$. شرط مرزی معادلات بالا، شرط مرزی نوع سوم یا شرط مرزی رابین نامیده می شود. شرح کامل معادلات فوق در فصل ۴ ارائه خواهد شد.

کویفلت ها، دسته ای از موجک ها هستند که تقریب توابع با کمک آن ها، به سادگی و با دقت بالا انجام می شود. از این توابع به عنوان توابع پایه ای روش گالرکین استفاده خواهیم کرد. سرعت بالای همگرایی از نقاط قوت این روش است. ثابت خواهیم کرد که حل **عددی** مسأله مقدار مرزی، با سرعتی از مرتبه $O(2^{-nN})$ به جواب دقیق مسأله فوق همگرا است. $N$ مرتبه کویفلت و $n$ سطح تقریب مسأله است. مزیت دیگر این روش، دستیابی به جواب هایی مطلوب توسط کویفلت های مرتبه پایین $N = 2, 3$ و در سطوح تقریب پایین $n = 3, \cdots, 6$ است که به حل دستگاه های خطی با ابعاد (حداکثر) متوسط نیازمند است؛ این موضوع نشان دهنده حجم (به نسبت) پایین محاسبات است که یک امتیاز خوب در روش های عددی محسوب می شود. با اینکه اثبات قضایا را بر روی دامنه دلخواه $\Omega$ (البته با مرز لیپشیتزی) ارائه می دهیم، ولی پیاده سازی این روش را بر روی دامنه $\Omega = (0,1)^d \subset \mathbb{R}^d,\ d = 1, 2, 3,$ انجام خواهیم داد. چند مثال عددی نیز برای تأیید نتایج تئوری، ارائه می شود.

# پیش‌گفتار

همان طور که در چکیده رساله بیان شد، مسأله ای که در نظر خواهیم گرفت یافتن تابع $u : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ است که در مسأله مقدار مرزی زیر صدق می کند:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u &= -\nabla \cdot (\sigma \cdot \nabla u) + \beta \cdot \nabla u + \mu u = f, \quad in \quad \Omega, \\ \mathcal{B}u &= \mathbf{n} \cdot \sigma \cdot \nabla u + \gamma u = g, \quad on \;\; \partial\Omega, \end{aligned} \qquad (۱)$$

که در آن ماتریس توابع $\sigma$، بردار توابع $\beta$ و تابع $\mu$ بر روی $\Omega$ تعریف شده اند. توابع مسأله (۱) در مسائل مختلف علوم و مهندسی تعبیرهای فیزیکی متفاوتی دارند. به عنوان مثال، مسأله انتقال حرارت[۱] و جذب و پخش شاره ها در حالت پایدار[۲] حالت های خاصی از این مسأله هستند که در فصل ۴ به آن اشاره شده است.

در مسائل انتقال حرارت ماتریس $\sigma$ یک ماتریس قطری ثابت در نظر گرفته می شود. در مسائل جذب و پخش (وابسته به زمان) در شاره ها نیز یا مسائل یک بعدی در نظر گرفته می شود [۲۳، ۲۵، ۳۴]، یا مسائل دو بعدی با ماتریس قطری ثابت بررسی می شوند [۴۲، ۴۴، ۴۸]. خاطر نشان می کنیم که روش حل مسائل وابسته به زمان، گسسته سازی متغیر زمان و به دست آوردن جواب در زمان مشخص شده $t_{n+1}$، بر حسب جواب در لحظه $t_n$ است. در لحظه $t_0$ جواب مسأله به عنوان شرط اولیه[۳] داده شده است[۴]. بنابراین یکی از ویژگی های اصلی این رساله در نظر گرفتن مسأله ای کلی است که کمتر به آن پرداخته شده و حالت های خاصی از آن بسیار مورد توجه است.

انتخاب توابع پایه ای در روش گالرکین، تأثیر مهمی در سرعت و دقت محاسبه جواب تقریبی مسأله (۱) دارد. همان طور که گفتیم از موجک های متعامد کویفمن به عنوان توابع پایه ای استفاده کرده ایم. هر چند که استفاده از موجک های هار، دوبشی و اسپلاین های دومتعامد، در حل مسائل مقدار مرزی بسیار متداول است [۱، ۲۰، ۴۶]، اما استفاده از موجک های کویفمن بسیار محدود است. با استفاده از قضیه تقریب نمونه ای (که ویژگی منحصر به فرد این خانواده از موجک ها را بیان می کند)، تقریب مناسبی برای مسأله تغییراتی ارائه می دهیم و با کمک آن همگرایی سریع روش پیشنهادی را در فصل آخر اثبات می کنیم.

سومین ویژگی این رساله محاسبه کارا و سریع ضرایب ارتباط است. ضرایب ارتباط، انتگرال های معینی

---

[۱] Heat transfer

[۲] Steady state advection-diffusion equation

[۳] Initial condition

[۴] چاپ مقاله ای در فضای یک بعدی و مستقل از زمان در سال ۲۰۱۲ جالب توجه است[۲۲].

هستند که در تبدیل مسأله تغییراتی به یک دستگاه خطی نقشی کلیدی دارند. به جای استفاده از روش های متداول انتگرال گیری عددی که هزینه محاسبات را افزایش می دهند، ضرایب ارتباط را از حل دستگاه های خطی کوچک محاسبه می کنیم. هر چند که محاسبه ضرایب ارتباط با کمک دستگاه خطی امری متداول است [۲۹، ۴۱]، اما نحوه تعریف این مقادیر، کاهش تعداد مجهولات دستگاه خطی و الگوریتم محاسبه آن ها منحصر به فرد است که در فصل ۳ توضیحات لازم بیان شده است. در ادامه خلاصه ای از رساله را به تفکیک فصل ها ارائه می دهیم.

**فصل ۱.** در این فصل نمادگذاری، اصطلاحات و تعاریفی ارائه می شود که در سرتاسر فصل های بعد از آن استفاده می شود. پس از معرفی فضای ضرب داخلی، قضایای گرین و واگرایی را شرح می دهیم که در به دست آوردن فرم تغییراتی مسأله مقدار مرزی بسیار مؤثر هستند. در انتهای فصل توابع با محمل فشرده و خواص آنها به خصوص مفاهیم انتقال و اتساع، همراه با چند مثال ارائه خواهد شد.

**فصل ۲.** موجک ها، توابع پایه ای مورد نظر ما برای استفاده در روش گالرکین هستند. روش گالرکین یکی از روش های متداول حل مسایل مقدار مرزی است. رده ای خاص از موجک ها به نام موجک های متعامد کویفمن که محمل فشرده دارند، برای این منظور انتخاب شده اند. قضیه تقریب نمونه ای مهمترین ویژگی این دسته از موجک ها را بیان می کند که آن ها را برای استفاده در روش گالرکین مناسب ساخته است. در این فصل پس از بیان تاریخچه مختصری از موجک ها، خواص آن ها را بررسی می کنیم و بخشی را به نحوه رسم موجک ها و مشتق آن ها اختصاص خواهیم داد. در بخش آخر قضیه تقریب نمونه ای را همراه با چند مثال شرح خواهیم داد.

**فصل ۳.** در روش گالرکین، یک دستگاه خطی با استفاده از یک فرمول تغییراتی به دست می آید که شامل محاسبه تعداد بسیار زیادی انتگرال معین است. این مقادیر ضرایب ارتباط نام دارند. استفاده از روش های متداول انتگرال گیری عددی علاوه بر افزایش چشمگیر هزینه محاسبات، انباشتگی خطاهای عددی را به دنبال دارد که حل دستگاه خطی را (که اغلب بد حالت نیز هست) با دشواری های زیادی روبرو می کند. در این فصل نشان می دهیم که چگونه می توان ضرایب ارتباط را به صورت مجهولات یک دستگاه خطی در نظر گرفت و نیازی به انتگرال گیری عددی نداشت.

**فصل ۴.** دو بخش اول این فصل بیشتر به مسأله انتقال حرارت می پردازد که با در نظر گرفتن جریان های همرفتی، در دسته خاصی از شرایط مقدار مرزی ( شرایط مقدار مرزی رابین ) قرار می گیرند. در بخش آخر مسأله مقدار مرزی (۱ ) بررسی می شود که با محاسبه فرم تغییراتی آن و با مرور چند قضیه مهم در مورد وجود و یکتایی جواب مسأله تغییراتی، پیش نیاز های لازم برای شرح حل عددی مسائل مقدار مرزی با روش گالرکین و با استفاده از موجک های کویفمن فراهم می شود.

**فصل ۵.** در این بخش روش گالرکین را توضیح خواهیم داد و نشان می دهیم که چگونه می توان از موجک های کویفمن به عنوان توابع پایه ای این روش استفاده کرد. بخش اصلی این رساله اثبات همگرایی سریع روش پیشنهادی است که در بخش تقریب کویفلت-گالرکین و تحلیل خطای آن ارائه خواهد شد. با حل و بررسی چند مثال مختلف، کیفیت و کارایی روش پیشنهادی را نشان خواهیم داد.

# فهرست مطالب

# لیست تصاویر

# لیست جداول

# فصل ۱

# مروری بر پیش نیازها

در این فصل نمادگذاری، اصطلاحات و تعاریفی ارائه می گردند که در سرتاسر فصل های بعد از آن استفاده می شود و صرفاً جهت کامل بودن مطالب نوشته شده اند. اغلب مطالب این فصل را در مراجع مربوط به آنالیز می توان یافت [۳۷، ۱۵].

**تذکر.** نماد $\int$ به معنی انتگرال گیری روی $\mathbb{R}^d$ است که $d$ از روی انتگرالده معلوم می شود.

## ۱.۱ فضای ضرب داخلی

فرض کنیم فضای برداری $V$ بر روی میدان حقیقی تعریف شده و $c$ عضو دلخواهی از $\mathbb{R}$ باشد. ضرب داخلی، تابعی است از

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_V : V \times V \to \mathbb{R}$$

که ۳ شرط زیر را دارد:

۱. مثبت بودن: برای هر $v \in V$ و مخالف صفر، $\langle v, v \rangle_V > 0$.

۲. تقارن: برای هر $v, w \in V$، $\langle v, w \rangle_V = \langle w, v \rangle_V$.

۳. خطی بودن:برای هر $u, v, w \in V$، $\langle cu + v, w \rangle_V = c\langle u, w \rangle_V + \langle v, w \rangle_V$.

فضای برداری که بر روی آن ضرب داخلی تعریف شده باشد، فضای ضرب داخلی می نامند و در آن اندازه یا نرم بردار $v$ به صورت

$$\|v\|_V = \sqrt{\langle v, v \rangle_V}$$

تعریف می شود. اگر فضای $V$ مشخص باشد اندیس $V$ را از ضرب داخلی و نرم حذف می کنیم.

در فضای ضرب داخلی دو نامساوی بسیار مهم وجود دارند. نامساوی های معروف مثلثی و شوارتز به ترتیب بیان می کنند که

$$\|u+v\| \leq \|v\| + \|v\|,$$
$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|.$$

**تعریف ۱.۱.** تابع دلتای کرونکر به شکل زیر تعریف می شود،

$$\delta_x := \delta(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$$

**تعریف ۲.۱.** فرض کنید $V$ یک فضای ضرب داخلی بوده و $V_1$ و $V_2$ زیر فضاهای آن باشند.

۱. بردار $u$ بر بردار $v$ عمود است هرگاه، $\langle u, v\rangle = 0$.

۲. مجموعه بردارهای $\{u_i\}_{i=1}^N$ مجموعه ای یکا متعامد تشکیل می دهند هرگاه:

$$\langle u_i, u_j\rangle = \delta_{j-i}, \quad i, j = 1, \cdots, N.$$

۳. $V_1$ بر $V_2$ عمود است هرگاه هر بردار $V_1$ بر هر بردار $V_2$ عمود باشد و می نویسیم: $V_1 \perp V_2$.

فضای توابع مربعی انتگرال پذیر $L^2(\Omega)$ و فضای توابع سوبولف[۱] مرتبه اول $H^1(\Omega)$، دو مثال مهم از فضاهای ضرب داخلی هستند که در آنها $\Omega$ ناحیه ای در $\mathbb{R}^d$ است. فضای $L^2(\Omega)$ مجموعه تمام توابع حقیقی مقدار و مربعی انتگرال پذیر است:

$$L^2(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \mid \int_\Omega f^2(x)dx < \infty\}.$$

بر روی این فضا ضرب داخلی به صورت

$$\langle f, g\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)g(x)dx,$$

تعریف می شود.

برای تعریف دقیق فضای $H^1(\Omega)$ لازم است که در مورد توزیع ها[۲] که حالت کلی تر توابع هستند و مشتق ضعیف[۳] که جامع تر از مشتق معمولی است، توضیحاتی ارائه شود. اما از آنجا که با *توابعی* در $C^\alpha(\bar{\Omega})$ با $\alpha \geq 1$ مواجه خواهیم بود، مشتق ضعیف و مشتق معمولی یا کلاسیک بر هم منطبق بوده و نیازی به توضیح مباحث ذکر شده نخواهد بود. مطالب دقیق تر و جامع تر را در [۳۷] فصل ۷ می توان یافت. فضای $H^1(\Omega)$ مجموعه تمام توابع مربعی انتگرال پذیری است که مشتقات جزئی مرتبه اول آنها نیز مربعی انتگرال پذیرند:

---

[۱] Sobolev space

[۲] Distributions

[۳] Weak derivative

$$H^1(\Omega) = \{f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid \int_\Omega f^2(x)dx,\ \int_\Omega (\frac{\partial f}{\partial x_i}(x))^2 dx < \infty,\ i = 1, \ldots, d\}.$$

بر روی این فضا ضرب داخلی به صورت

$$\langle f, g\rangle_{H^1(\Omega)} = \langle f, g\rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{d} \langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial g}{\partial x_i}\rangle_{L^2(\Omega)},$$

تعریف می شود. بنابراین اگر $\Omega$ زیر مجموعه $\mathbb{R}$ باشد، آنگاه نرم تابع $f(x)$ به صورت

$$\|f\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f'\|^2_{L^2(\Omega)}}$$

و اگر $\Omega$ زیر مجموعه ای از $\mathbb{R}^2$ باشد، آنگاه نرم تابع $f(x, y)$ به صورت

$$\|f\|^2_{H^1(\Omega)} = \|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\frac{\partial f}{\partial x}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\frac{\partial f}{\partial y}\|^2_{L^2(\Omega)}$$

خواهد بود.

## ۲.۱ فرمول گرین و قضیه واگرایی

با آنکه توابع فضای $H^1(\Omega)$ لزوماً پیوسته نیستند و مشتق گیری معمولی در مورد آنها معنی ندارد، اما می توان رابطه ای شبیه به انتگرال گیری جزء به جزء را در مورد آنها به دست آورد که به فرمول گرین[۴] معروف است. این رابطه بیان می کند که اگر $\Omega$ ناحیه ای با مرز $\partial\Omega$ در $\mathbb{R}^d$ بوده و $u$ و $v$ دو تابع در $H^1(\Omega)$ باشند، آنگاه رابطه زیر برقرار است.

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v(x)dx = \oint_{\partial\Omega} u(x)v(x)n_i\, ds - \int_\Omega u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}dx, \quad i = 1, \cdots, d. \quad (۱.۱)$$

اگر بردار رو به بیرون و عمود بر $\partial\Omega$ را با $\mathbf{n}$ نشان دهیم، آنگاه $n_i$ در رابطه (۱.۱)، مؤلفه $i$ام $\mathbf{n}$ است:

$$\mathbf{n} = (n_1, \cdots, n_d).$$

خاطر نشان می کنیم که در انتگرال مرزی رابطه (۱.۱)، منظور از مقادیر $u$ بر روی مرز $\partial\Omega$ همان $\gamma(u)$ است که $\gamma$ معرف تابع اثر[۵] می باشد. رابطه (۷.۲۶) در [۳۷] بیان می کند که یک ثابت $\bar{c}$ وجود دارد که:

$$\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} := \|\gamma(u)\|_{L^2(\partial\Omega)} \le \bar{c}\|u\|_{H^1(\Omega)}. \quad (۲.۱)$$

با در نظر گرفتن فضای $L^2(\partial\Omega)$ و رابطه (۲.۱)، رابطه مهم زیر را به دست می آوریم که در تحلیل خطای روش گالرکین بسیار مفید است:

$$\langle u, v\rangle_{L^2(\partial\Omega)} \le \|u\|_{L^2(\partial\Omega)}\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \le c\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}. \quad (۳.۱)$$

[۴] Green's formula

[۵] Trace function

رابطه (۱.۱) نتایج سودمندی دارد. در این رابطه با قرار دادن $w_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}$ به جای $u$ و با فرض این که تمام انتگرال های حاصل تعریف شده باشند، به دست می آوریم:

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}(w_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j})v(x)dx = \oint_{\partial\Omega} w_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}v(x)n_i\, ds - \int_\Omega w_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx, \quad i,j = 1,\cdots,d. \qquad (۴.۱)$$

اگر ماتریس $\sigma$ را به صورت

$$\sigma(x) := \begin{bmatrix} w_{11}(x) & \cdots & w_{1d}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{d1}(x) & \cdots & w_{dd}(x) \end{bmatrix}_{d\times d}$$

تعریف کنیم، آنگاه با جمع بستن بر روی $i, j$ در معادله (۴.۱) داریم:

$$\int_\Omega \nabla\cdot(\sigma\cdot\nabla u)v = \oint_{\partial\Omega}(\mathbf{n}\cdot\sigma\cdot\nabla u)v - \int_\Omega \nabla v\cdot\sigma\cdot\nabla u \qquad (۵.۱)$$

در فصل ۴ خواهیم دید که چگونه از رابطه (۵.۱) برای به دست آوردن فرم تغییراتی مسأله معادلات با مشتقات جزئی استفاده خواهد شد.

رابطه مهم دیگری که در تحلیل خطای گالرکین استفاده می شود، قضیه واگرایی است. فرض کنید $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ و $\beta$ بردار $d$ بعدی از توابع هموار تعریف شده بر $\Omega$ باشد، آنگاه

$$\int_\Omega \nabla\cdot\beta = \oint_{\partial\Omega}\beta\cdot\mathbf{n}. \qquad (۶.۱)$$

رابطه فوق در اثبات قضیه زیر استفاده می شود [۱۳].

**قضیه ۳.۱.** اگر $\beta \in [L^2(\Omega)]^d$ و $\nabla\cdot\beta \in L^2(\Omega)$ آنگاه $\beta\cdot\mathbf{n} \in L^2(\partial\Omega)$ و

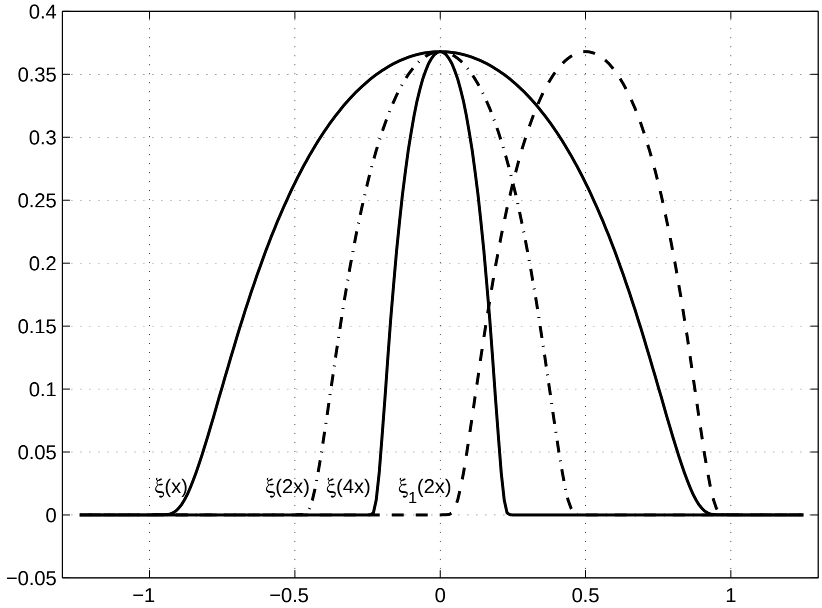
$$\forall u \in L^2(\Omega), \qquad \int_\Omega u\,\nabla\cdot\beta = -\int_\Omega \beta\cdot\nabla u + \oint_{\partial\Omega} u\,\beta\cdot\mathbf{n}. \qquad (۷.۱)$$

## ۳.۱ توابع با محمل فشرده

محمل یا تکیه گاه [۶] تابع $f : \Omega \to \mathbb{R}$، بستار مجموعه تمام نقاطی مانند $x \in \Omega$ است که $f(x)$ مخالف صفر باشد:

$$supp(f) = \overline{\{x \in \Omega\,|f(x) \neq 0\}}.$$

[۶] Support




شکل ۱.۱: *نمودار توابع* $\xi(x)$، $\xi(2x)$، $\xi(4x)$ *و* $\xi_1(2x)$. *روابط* (۸.۱)، (۹.۱) *و* (۱۰.۱) *را ببینید.*

اگر محمل تابع $f$، زیر مجموعه ای فشرده از $\mathbb{R}^n$ باشد می گوییم تابع $f$ محمل فشرده دارد. یک مثال معروف از توابع با محمل فشرده، تابع بی نهایت بار مشتق پذیر

$$\xi(x) = \begin{cases} \exp(\frac{1}{x^2-1}), & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases} \tag{۸.۱}$$

است که محمل آن بازه $[-1, 1]$ است.

$\xi(2x)$ تابعی است که از فشردن تابع $\xi$ به دست می آید و اتساعی[۷] با مقیاس[۸] ۲ خوانده می شود:

$$\xi(2x) = \begin{cases} \exp(\frac{1}{(2x)^2-1}), & |2x| < 1, \\ 0, & |2x| \geq 1, \end{cases} = \begin{cases} \exp(\frac{1}{4x^2-1}), & |x| < \frac{1}{2}, \\ 0, & |x| \geq \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{۹.۱}$$

بدیهی است که تابع $\xi(4x)$ از فشردن بیشتر تابع $\xi$ حاصل شده و اتساعی با مقیاس ۴ نامیده می شود. تابع $\xi(2x-1) = \xi(2(x-\frac{1}{2}))$ همان تابع $\xi(2x)$ است که نیم واحد به سمت راست انتقال یافته است و ترجیح می دهیم آن را به صورت $\xi_1(2x)$ بنویسیم. به طور کلی، برای سهولت در فرمول نویسی، نمادگذاری زیر را برای تابع دلخواه $\phi$ انجام می دهیم:

$$\phi_k := \phi(\cdot - k) \tag{۱۰.۱}$$

برای درک بهتر، نمودار توابع $\xi$، $\xi(2x)$، $\xi(4x)$ و $\xi_1(2x)$ در شکل ۱.۱ رسم شده است.

---

[۷] Dilation

[۸] Scale

مثال معروف دیگر تابع

$$h(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & o.w. \end{cases} \quad (۱۱.۱)$$

است که به تابع مقیاس هار[۹] معروف است. محمل آن بازه $[0,1]$ بوده و در معادله

$$h(x) = h(2x) + h(2x-1) = h(2x) + h_1(2x), \quad (۱۲.۱)$$

صدق می کند. همچنین این تابع بر انتقال های صحیح خود عمود است:

$$\langle h, h_k \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \int h(x)h(x-k)dx = \delta_k. \quad (۱۳.۱)$$

در فصل موجک ها با این تابع و خواص آن بیشتر آشنا می شویم.

وقتی یک تابع با محمل فشرده به عنوان انتگرالده ظاهر می شود، گاهی می توان کران های انتگرال را تغییر داد. فرض کنید محمل $f$ بازه $[a,b]$ بوده و $g$ تابعی دلخواه باشد. اگر $a \leq t \leq b$ آنگاه

$$\int_a^t f(x)g(x)dx = \int_{-\infty}^t f(x)g(x)dx, \quad (۱۴.۱)$$

$$\int_t^b f(x)g(x)dx = \int_t^{\infty} f(x)g(x)dx, \quad (۱۵.۱)$$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int f(x)g(x)dx. \quad (۱۶.۱)$$

به علاوه انتگرال گیری جزء به جزء شکل ساده تری به خود می گیرد. با فرض مشتق پذیری داریم:

$$\int_{-\infty}^t f'(x)g(x)dx = f(t)g(t) - \int f(x)g'(x)dx,$$

$$\int f'(x)g(x)dx = -\int f(x)g'(x)dx. \quad (۱۷.۱)$$

[۹] Haar scaling function

# فصل ۲

# موجک

## ۱.۲ مقدمه

این فصل به معرفی دسته ای از توابع اختصاص دارد که به موجک مشهورند. هر جا که بحث موجک پیش می آید بلافاصله به تبدیل فوریه و موجک هار اشاره می شود. در ادامه موضوعاتی نظیر تابع مقیاس[۱]، آنالیز چند ریزگی[۲] و تجزیه و بازسازی سیگنال[۳] بررسی شده و اگر بحث کمی تخصصی تر باشد، درباره قابها[۴] و تبدیل موجک[۵] نیز صحبت خواهد شد. اما نگاه ما به موجک ها به عنوان توابع پایه ای روش گالرکین است و فقط خواص موجک هاست که برای ما اهمیت پیدا می کند. بنابراین حداکثر اشاره ای به موضوعات مطرح شده خواهد شد و آن ها را به منابع تخصصی ارجاع خواهیم داد که در بخش تاریخچه معرفی شده اند.

آنچه از بین انواع مختلف موجک ها مورد نظر ماست، خانواده موجک های متعامد کویفمن[۶] است که به کویفلت[۷] مشهورند. وجود تابع مقیاس، تعامد، محمل فشرده و قضیه تقریب نمونه ای مهمترین ویژگی های این خانواده است که آن ها را برای نقش توابع پایه ای روش گالرکین مناسب ساخته است. موضوعی که در قضیه ۷.۵ مشخص خواهد شد.

این بخش را با تاریخچه مختصری از تکامل موجک آغاز کرده و در بخش سوم خواص کلی موجک های متعامد با محمل فشرده را بررسی خواهیم کرد. بنا به دلایلی که ذکر خواهد شد بخشی را به نحوه رسم موجک ها و مشتق آن ها اختصاص می دهیم. در بخش ۵ به کویفلت ها و خواص آن ها می پردازیم و در بخش پایانی به قضیه تقریب نمونه ای برای کویفلت ها و محاسبه عددی خطای تقریب خواهیم پرداخت.

---

[۱] Scaling or refinable function

[۲] MultiResolution Analysis (MRA)

[۳] Signal Decomposition and Reconstruction

[۴] Frames

[۵] Wavelet transform

[۶] Orthogonal Coifman wavelets

[۷] Coiflet

## ۲.۲ تاریخچه

واژه موجک اولین بار در ۱۹۸۴ توسط Grossman و Morlet معرفی شد و به عنوان یک تبدیل ریاضی، نظیر تبدیل فوریه و تبدیل Z[۸] مورد استفاده قرار گرفت [۱۸]. در ۱۹۸۸ نخستین دسته از موجک های متعامد با محمل فشرده توسط Daubechies ساخته شد که به موجک های دوبشی شهرت یافت [۱۲]. سال بعد Mallat و Meyer با معرفی آنالیز چند ریزگی تحول عظیمی در آنالیز موجک ایجاد کردند [۳۰، ۳۲]. در ۱۹۹۰ شرایط لازم و کافی برای تعامد موجک ها توسط Lawton ارائه شد [۲۷]. در ۱۹۹۲ مشکل اساسی نامتقارن بودن موجک ها با معرفی نظریه موجک های دو متعامد توسط Cohen و همکارانش برطرف شد [۷]. تاریخچه جامعی از تکامل موجک در کتاب معروف Meyer گنجانده شده است [۳۲].

کاربرد موجک در زمینه های مختلف علوم و مهندسی بسیاری از محققین را به خود جذب کرده است. پردازش تصاویر و آنالیز عددی از مهمترین این زمینه ها می باشد که می توان به مراجع معتبری از جمله [۳۲] در زمینه پردازش سیگنال و [۸] در زمینه آنالیز عددی اشاره کرد.

## ۳.۲ خواص موجک ها

تقریب یک تابع بر حسب خانواده ای از توابع از مهمترین مسائل علوم کاربردی به خصوص آنالیز عددی است. سری تیلور و سری فوریه از متداول ترین روش های تقریب هستند که به ترتیب از خانواده چند جمله ای ها و توابع همساز $(\sin, \cos)$ برای تقریب توابع استفاده می کنند. موجک ها جایگزینهای مناسبی برای چند جمله ای ها و توابع همسازند، بنابراین به عنوان خانواده ای برای تقریب توابع معرفی می شوند؛ اما چون توسط متخصصین پردازش سیگنال ساخته شده و تکامل یافته اند، معمول است که موجک ها را خانواده ای برای تجزیه و بازسازی سیگنال معرفی کنند.

خانواده موجک ها توسط دو تابع کلیدی ساخته می شود: تابع مقیاس $\varphi$ و موجک $\psi$. گاهی برای تاکید بر همکاری آنها در ایجاد خانواده ای از توابع، $\varphi$ را موجک پدر و $\psi$ را موجک مادر می نامند. با ذکر خواص این دو تابع و آشنایی با فضاهای تولید شده توسط آنها، خانواده موجک ها را (به قدر کافی) خواهیم شناخت. با تابع مقیاس شروع می کنیم که یک مثال آشنا برای آن، تابع مقیاس هار است که در رابطه (۱۱.۱) معرفی شد. مهم ترین خواص توابع مقیاسی که با آنها مواجه خواهیم بود به شرح زیرند:

۱. اعداد حقیقی $\{a_k\}_{k=N_0}^{N_1}$ وجود دارند که $\varphi$ در معادله

$$\varphi(x) = \sum_{k=N_0}^{N_1} a_k \, \varphi(2x-k), \qquad (۱.۲)$$

موسوم به معادله مقیاس [۹] صدق می کند. اعداد $\{a_k\}$ را ضرائب مقیاس یا بازگشتی [۱۰] می نامند.

[۸] Z transform

[۹] Scaling equation

[۱۰] Scaling or Recursion coefficients

جدول ۱.۲: *ضرائب مقیاس مربوط به موجک کویفمن مرتبه اول*

| | | |
|---|---|---|
| $a_{-2} = \frac{1-\sqrt{7}}{16}$ | $a_0 = \frac{7+\sqrt{7}}{8}$ | $a_2 = \frac{1-\sqrt{7}}{16}$ |
| $a_{-1} = \frac{5+\sqrt{7}}{16}$ | $a_1 = \frac{7-\sqrt{7}}{8}$ | $a_3 = \frac{-3+\sqrt{7}}{16}$ |

۲. محمل تابعی که در معادله مقیاس صدق کند، بازه $[N_0, N_1]$ است [۱۲، ص۱۲۳]. بنابراین تابعی با محمل فشرده است.

۳. تابع $\varphi$ بر انتقال های صحیح خود عمود است، یعنی

$$\langle \varphi, \varphi_k \rangle = \int \varphi(x)\varphi(x-k)dx = \delta_k, \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{۲.۲}$$

چنین تابع مقیاسی را **متعامد** می نامند.

۴. برای هر عدد حقیقی $x$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(x-k) = 1. \tag{۳.۲}$$

فشردگی محمل $\varphi$ ایجاب می کند که وقتی $x$ در یک بازه کراندار تغییر کند این سری متناهی باشد. برای اثبات، قضیه ۵.۹ را در [۴۰] ببینید.

برای تابع مقیاس هار، به سادگی می توان چهار ویژگی ذکر شده را بررسی کرد. البته نباید برای هر تابع مقیاسی چنین انتظاری داشت. به عنوان مثال در جدول ۱.۲ ضرائب مقیاس مربوط به موجک کویفمن مرتبه اول آورده شده است که بدون توسل به قضایای مرتبط نمی توان خواص فوق را بررسی کرد. فقط جهت کامل بودن مطالب، قضیه ای را بیان می کنیم که بررسی خواص فوق را ساده تر می کند.

**قضیه ۱.۲.** اگر اعداد حقیقی $\{a_k\}_{k=N_0}^{N_1}$ (بافرض $a_k = 0$ برای $k < N_0$ یا $k > N_1$ )، در دو شرط

$$\sum_k a_k = 2, \qquad \sum_k a_k a_{k+2m} = 2\delta_m, \quad m \in \mathbb{Z},$$

صدق کنند آنگاه تابع با محمل فشرده $\varphi$ وجود دارد که در معادله (۱.۲) صدق کند و همانطور که در ویژگی دوم ذکر شد محمل $\varphi$ بازه $[N_0, N_1]$ خواهد بود. برای آنکه $\varphi$ متعامد باشد لازم و کافی است که عدد ۱، مقدار ویژه ناتباهیده ماتریس $A$ باشد:

$$A_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{k=N_0}^{N_1} a_k a_{j-2i+k}, \qquad N_0 - N_1 + 1 \le i, j \le N_1 - N_0 - 1.$$

برای شرح کامل، قضیه ۶.۳.۶ و رابطه (۵.۱.۳۹) را در [۱۲] و رابطه (۹.۲۹) را در [۴۰] ببینید.