دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

« گروه ریاضی »

پایان نامه کارشناسی‌ارشد ریاضی

عنوان

تجزیه و تحلیل مدل های جمعیتی فصلی

نگارش

رضا کولیوند سالوکی

استاد راهنما

دکتر رضا معمارباشی

استاد مشاور

دکتر علی غفاری

دی ۱۳۸۹

بسم الله الرحمن الرحیم

سپاس بی‌حد خدای را که هر چه دارم از رحمت بی انتهای اوست و زبان قاصر از شکرگزاریش می‌باشد. بی‌شک این پروژه بدون یاریش به اتمام نمی‌رسید. خدارا شاکر و از او می خواهم، همواره مرا از دریای بیکران علم و معرفتش سیراب نماید.

قدردانی و تشکر

در ابتدا لازم می‌دانم از زحمات پدر و مادر گرامی‌ام و کلیه کسانی که در دوران تحصیل مشوق و پشتیبان اینجانب بودند کمال تشکر را بنمایم. همچنین از زحمات اساتید محترم دانشگاه سمنان و به خصوص استاد ارجمند جناب آقای دکتر رضا معمارباشی که با راهنمایی‌های خود راهگشای اینجانب بودند کمال تشکر و سپاسگزاری را دارم.

تقدیم به :

پدر مهربان و مادر صبورم

چکیده

در این پایان نامه، چند مدل جمعیتی گسسته را مورد مطالعه و بررسی قرار می‌دهیم. ابتدا هر مدل را بصورت یک دستگاه معادلات تفاضلی بیان می‌کنیم. سپس مدل‌ها را با زاد و ولد سالانه و فصلی تجزیه و تحلیل می‌کنیم. نقاط تعادل را برای هر مدل بدست آورده و در مورد پایداری مجانبی موضعی و فراگیر بودن این نقاط بحث می‌کنیم. در پایان به مقایسه میان مدل با زاد و ولد پیوسته و فصلی می‌پردازیم، و در مورد سودمندی یا مضر بودن آنها اظهار نظر می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: معادله تفاضلی — دستگاه معادلات تفاضلی — مدل جمعیتی گسسته — جاذب فراگیر — پایدار فراگیر — ماندگاری — متناوب — نوسان

مقدمه

این پایان نامه شامل چهار فصل است:

در فصل اول، به معرفی مفاهیم و قضایای مورد نیاز که در فصول بعدی نقش بسزایی دارند، پرداخته شده‌است.

در فصل دوم، چرخه‌ی زندگی کنه‌های گوزنی را در دوره‌های سه مرحله‌ای، توسعه یافته مورد مطالعه و بررسی قرار می‌دهیم. دو مدل فصلی و سالانه (غیر فصلی) را در نظر گرفته و به تجزیه و تحلیل این دو مدل می‌پردازیم. در مورد کرانداری و ماندگاری جواب ها بحث می‌کنیم و در نهایت، به بررسی رفتار نوسانی مدل فصلی و سالانه می‌پردازیم.

در فصل سوم، یک مدل جمعیتی دو مرحله‌ای گسسته را مورد مطالعه و بررسی قرار می‌دهیم. این مدل را با زاد و ولد پیوسته و فصلی بطور کامل تجزیه و تحلیل می‌کنیم. و در پایان، به مقایسه میان مدل با زاد و ولد پیوسته و فصلی‌می پردازیم و در مورد سودمندی یا مضر بودن آنها صحبت می‌کنیم.

در فصل چهارم، یک مدل جمعیتی گسسته سه مرحله‌ای را مورد مطالعه و بررسی قرار می‌دهیم. این فصل شامل چهار بخش می‌باشد:

در بخش اول، یک دستگاه معادلات تفاضلی برای مدلمان بیان می‌کنیم.

در بخش دوم، مدل با زاد و ولد پیوسته را مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌دهیم.

در بخش سوم، مدل با زاد و ولد فصلی را مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌دهیم.

و در بخش چهارم، به مقایسه میان مدل با زاد و ولد پیوسته و فصلی می‌پردازیم.

فهرست مندرجات

فصل ۱

مفاهیم اولیه

در این فصل با تعاریف و قضایای مورد نیاز آشنا خواهیم شد.

۱.۱ تعاریف اولیه

تعریف ۱.۱.۱ معادله‌ای به شکل

$$x_{n+1} = f(x_n) \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{1.1}$$

که در آن $f : I \longrightarrow I$ تابعی پیوسته و $I \subseteq \mathbb{R}$ است، را معادله تفاضلی مرتبه‌ی یک روی I گوییم و x_0 را یک مقدار اولیه می‌نامیم.

تعریف ۲.۱.۱ اگر $x_0 \in \mathbb{R}$ یک مقدار اولیه معادله بالا باشد در اینصورت برای هر n، $\{f^n(x_0)\}$ نیز جواب معادله فوق است.

تعریف ۳.۱.۱ معادله‌ای به شکل

$$x_{n+1} = f(x_n, \ldots, x_{n-k}) \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{2.1}$$

که در آن $f: I^{k+1} \longrightarrow I$ تابعی پیوسته، k عددی صحیح و نامنفی و $I \subseteq \mathbb{R}$ است را، معادله تفاضلی مرتبه $k+1$ می‌نامیم و $x_{-k}, \ldots, x_{-1}, x_0$ مقادیر اولیه هستند.

تعریف ۴.۱.۱ در تعریف ۱.۱.۱، اگر f خطی باشد معادله‌ی (۱.۱) را معادله تفاضلی خطی مرتبه‌ی یک می‌نامیم که به شکل زیر تبدیل می‌شود.

$$x(n+1) + p_0 x(n) + p_1 = 0$$

p_0 و p_1 اعدادی ثابت هستند.

تعریف ۵.۱.۱ در تعریف ۳.۱.۱، اگر f خطی باشد معادله (۲.۱) را معادله تفاضلی خطی مرتبه‌ی $k+1$ می‌نامیم که به شکل زیر تغییر می‌یابد.

$$\sum_{i=0}^{k} p_i x(n-i) = 0$$

توجه کنید که $x(n) = x_n$ است.

تعریف ۶.۱.۱ نقطه‌ی $\bar{x}$، نقطه ثابت نگاشت f، یا نقطه تعادلی معادله (۱.۱) نامیده می‌شود اگر $f(\bar{x}) = \bar{x}$ باشد.

تعریف ۷.۱.۱ نقطه $\overline{X} = (\overline{x}, \overline{x}, \ldots, \overline{x})$، نقطه ثابت نگاشت $f: I^{k+1} \to I$ ، یا نقطه تعادلی معادله تفاضلی مرتبه $k+1$ است اگر $f(\overline{x}, \overline{x}, \ldots, \overline{x}) = \overline{x}$ باشد.

تعریف ۸.۱.۱ نگاشت $f: I \to I$ را در نظر بگیرید. اگر $x_0 \in I$ باشد مدار نقطه x_0 را با $O(x_0)$ نمایش می‌دهیم که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$O(x_0) = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \ldots\}$$

توجه کنید که اگر $\bar{x}$ نقطه ثابت نگاشت f باشد $O(\bar{x}) = \{\bar{x}\}$ می‌شود.

تعریف ۹.۱.۱ معادله (۱.۱) را در نظر بگیرید. نقطه‌ی $\bar{x}$ را نقطه تناوبی f می‌نامیم اگر عدد طبیعی k موجود باشد بطوریکه $f^k(\bar{x}) = \bar{x}$. ($\bar{x}$ نقطه ثابت f^k می‌باشد.)

اگر k کوچکترین عدد طبیعی با خاصیت $f^k(\bar{x}) = \bar{x}$ باشد، $\bar{x}$ را با دوره تناوب k می‌نامیم.

تعریف ۱۰.۱.۱ اگر $\bar{x}$ یک نقطه متناوب مرتبه‌ی k باشد در اینصورت $O(\bar{x})$ را یک $k-$ دور یا $k-$ سیکل می‌نامند.

$$O(\bar{x}) = \{\bar{x}, f(\bar{x}), f^{۲}(\bar{x}), \dots, f^{k-۱}(\bar{x})\}$$

۲.۱ نظریه پایداری

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنید $f : I \to I$ یک نگاشت پیوسته، $I \subseteq \mathbb{R}$ و $\bar{x}$ یک نقطه ثابت f باشد. دراینصورت،

۱) . $\bar{x}$ پایدار نامیده می‌شود اگر

$$\forall\, \epsilon > ۰ \quad \exists \delta > ۰ \; ; \; |x_{۰} - \bar{x}| < \delta \Rightarrow |f^n(x_{۰}) - \bar{x}| < \epsilon$$

برای هر $n \in \mathbb{Z}^+$.

و اگر $\bar{x}$ پایدار نباشد، ناپایدار نامیده می‌شود.

۲) . $\bar{x}$ جاذب نامیده می‌شود اگر

$$\exists\, \eta > ۰ \quad ; \quad |x_{۰} - \bar{x}| < \eta \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f^n(x_{۰}) = \bar{x}$$

۳) . $\bar{x}$ پایدار مجانبی نامیده می‌شود اگر هم پایدار و هم جاذب باشد.

اگر در (۲) $\eta = \infty$ باشد، در اینصورت $\bar{x}$، پایدار مجانبی فراگیر نامیده می‌شود.

حال پایداری، پایدار مجانبی و نقطه جاذب را برای معادلات با مراتب بالاتر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲.۲.۱ فرض کنید $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ یک نگاشت پیوسته و $\bar{X}$ یک نقطه ثابت f باشد. آنگاه،

۱) . $\bar{X}$ پایدار نامیده می‌شود اگر

$$\forall\ \epsilon > \circ \quad \exists \delta > \circ\ ;\ \|X - \bar{X}\| < \delta \Rightarrow \|f^n(X) - \bar{X}\| < \epsilon$$

برای هر $n \in \mathbb{Z}^+$.

که $X = (x_n, \ldots, x_{n-k})$. اگر $\bar{X}$ پایدار نباشد، ناپایدار نامیده می‌شود.

۲) . $\bar{X}$ جاذب نامیده می‌شود اگر

$$\exists\ \eta > \circ \quad ; \quad \|X - \bar{X}\| < \eta \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f^n(X) = \bar{X}$$

اگر $\eta = \infty$ باشد، جاذب فراگیر نامیده می‌شود.

۳) . $\bar{X}$ پایدار مجانبی نامیده می‌شود اگر هم پایدار و هم جاذب باشد.

۴) . $\bar{X}$ پایدار مجانبی فراگیر نامیده می‌شود، اگر هم پایدار و هم جاذب فراگیر باشد.

در بعضی مراجع پایدار مجانبی فراگیر، پایدار فراگیر نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۲.۱ جواب $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ از معادله‌ی (۲.۱)، غیرنوسانی در اطراف نقطه‌ی تعادل $\bar{x}$ نامیده می‌شود، اگر وجود داشته باشد $N \geq -k$ بطوریکه

$$\forall\ \ n \geq N \quad ; \quad x_n > \bar{x}$$

یا

$$\forall\ \ n \geq N \quad ; \quad x_n < \bar{x}$$

در غیر اینصورت، $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ نوسانی در اطراف نقطه تعادل $\bar{x}$ نامیده می‌شود.

در ادامه محکهای تشخیص نقاط تعادلی پایدار را معرفی می‌کنیم. ابتدا به معادله مرتبه یک می‌پردازیم:

تعریف ۴.۲.۱ یک نقطه ثابت $\bar{x}$ از نگاشت f هذلولوی نامیده می‌شود اگر $|f'(\bar{x})| \neq ۱$. در غیر اینصورت ناهذلولوی نامیده می‌شود.

قضیه ۵.۲.۱ اگر $\bar{x}$ نقطه ثابت هذلولوی نگاشت f باشد و f در $\bar{x}$ بطور پیوسته مشتق پذیر باشد، آنگاه گزاره‌های زیر برقرارند:

۱) . اگر $|f'(\bar{x})| < ۱$، آنگاه $\bar{x}$ پایدار مجانبی است.

۲) . اگر $|f'(\bar{x})| > ۱$، آنگاه $\bar{x}$ ناپایدار است.

برهان: به قضیه ۳.۱، از مرجع [۱۱] رجوع شود. □

قضیه ۶.۲.۱ فرض کنید $\bar{x}$ یک نقطه ثابت از نگاشت f باشد بطوریکه $f'(\bar{x}) = ۱$. اگر $f'''(\bar{x}) \neq ۰$ و پیوسته باشد، آنگاه گزاره های زیر برقرارند:

۱) . اگر $f''(\bar{x}) \neq ۰$، آنگاه $\bar{x}$ ناپایدار است.

۲) . اگر $f''(\bar{x}) = ۰$ و $f'''(\bar{x}) > ۰$، آنگاه $\bar{x}$ ناپایدار است.

۳) . اگر $f''(\bar{x}) = ۰$ و $f'''(\bar{x}) < ۰$، آنگاه $\bar{x}$ پایدار مجانبی است.

برهان: به قضیه ۴.۱، از مرجع [۱۱] رجوع شود. □

تعریف ۷.۲.۱ مشتق شوارتزی [۱] یک تابع را با Sf نمایش می‌دهند و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(Sf)(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{۳}{۲}\left[\frac{f''(x)}{f'(x)}\right]^{۲}$$

[۱] Schwarzian derivative

قضیه ۸.۲.۱ فرض کنید $\bar{x}$ یک نقطه ثابت نگاشت f باشد بطوریکه $f'(\bar{x}) = -۱$. اگر $f'''(\bar{x})$ پیوسته باشد، آنگاه گزاره‌های زیر برقرارند:

۱) . اگر $(Sf)(\bar{x}) < ۰$، آنگاه $\bar{x}$ پایدار مجانبی است.

۲) . اگر $(Sf)(\bar{x}) > ۰$، آنگاه $\bar{x}$ ناپایدار است.

برهان: به قضیه ۵.۱، از مرجع [۱۱] رجوع شود. □

توجه کنید که اگر $f'(\bar{x}) = -۱$، مشتق شوارتزی $(Sf)(\bar{x})$ به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$(Sf)(\bar{x}) = -f'''(\bar{x}) - \frac{۳}{۲}[f''(\bar{x})]^{۲}$$

تعریف ۹.۲.۱ فرض کنید $\bar{x}$ یک نقطه تناوبی، با دوره تناوب k باشد. در اینصورت

۱) . $\bar{x}$ پایدار است اگر نقطه ثابت پایدار f^k باشد.

۲) . $\bar{x}$ پایدار مجانبی است اگر نقطه ثابت پایدار مجانبی f^k باشد.

۳) . $\bar{x}$ ناپایدار است اگر نقطه ثابت ناپایدار f^k باشد.

قضیه ۱۰.۲.۱ فرض کنید $o(\bar{x}) = \{\bar{x}, f(\bar{x}), \ldots, f^{k-۱}(\bar{x})\}$ مدار نقطه تناوبی مرتبه k، $\bar{x}$ باشد. که f در $\bar{x}$ بطور پیوسته مشتق پذیر است، در اینصورت:

۱) . $\bar{x}$ پایدار پایدار مجانبی است اگر

$$|f'(\bar{x})f'(f(\bar{x}))\cdots f'(f^{k-۱}(\bar{x}))| < ۱$$

۲) . $\bar{x}$ ناپایدار است اگر

$$|f'(\bar{x})f'(f(\bar{x}))\cdots f'(f^{k-۱}(\bar{x}))| > ۱$$

برهان: به قضیه ٦.١، ازمرجع [۱۱] رجوع شود. □

حال محکهای پایداری نقاط تعادل در معادلات مرتبه بالا را معرفی می‌کنیم. یکی از این روش ها توابع لیاپانوف[۱] می‌باشند که به بررسی آن می‌پردازیم:

معادله تفاضلی $X(n+1) = f(X)$ را در نظر می گیریم که در آن $f : G \longrightarrow \mathbb{R}^k$ نگاشتی پیوسته است و $G \subset \mathbb{R}^k$.

تعریف ۱۱.۲.۱ تابع $V : G \to \mathbb{R}$، $G \subseteq \mathbb{R}^k$ را یک تابع لیاپانوف می‌نامند اگر

۱) . V پیوسته باشد.

۲) . $\Delta V(X) = V(f(X)) - V(X) \leq 0$، به شرط اینکه X و $f(X)$ متعلق به G باشند.

تعریف ۱۲.۲.۱ تابع V در یک همسایگی $\bar{X}$ مثبت معین گفته می‌شود اگر

$$\forall\ X \neq \bar{X} \quad V(X) > 0 \quad , V(\bar{X}) = 0$$

قضیه ۱۳.۲.۱ فرض کنیم تابع لیاپانوف مثبت معین V بر یک گوی باز $G = B(\bar{X}, \lambda)$ حول نقطه تعادلی $\bar{X}$ برای $X(n+1) = f(X(n))$ موجود باشد، در اینصورت $\bar{X}$ پایدار است. بعلاوه اگر برای هر $X \in G$ که $X \neq \bar{X}$، داشته باشیم $\Delta V(X) < 0$، آنگاه $\bar{X}$ پایدار مجانبی است. و اگر $G = \mathbb{R}^k$ و $\lim_{\|X\| \to \infty} \quad V(X) = \infty$ در اینصورت $\bar{X}$ پایدار مجانبی فراگیر است.

برهان: به قضیه ۵.۴، از مرجع [۱۱] رجوع شود. □

---

[۱] liapunov function

حال محک پایداری با خطی سازی را بیان می‌کنیم:

معادله‌ی خطی شده‌ی، معادله‌ی (۲.۱) نسبت به $\bar{y}$ برابر است با:

$$r_{n+1} - a_0 r_n - a_1 r_{n-1} - \ldots - a_k r_{n-k} = 0 \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{3.1}$$

که برای هر $i = 0, 1, \ldots, k$

$$a_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}(\bar{x}, \bar{x}, \ldots, \bar{x})$$

و معادله مشخصه‌ی معادله‌ی (۲.۱) نسبت به $\bar{y}$ برابر است با:

$$\lambda^{k+1} - a_0 \lambda^k - a_1 \lambda^{k-1} - \ldots - a_{k-1}\lambda - a_k = 0 \tag{4.1}$$

تعریف ۱۴.۲.۱ دستگاه

$$\begin{cases} x(n+1) = ax(n) + by(n) \\ y(n+1) = cx(n) + dy(n) \end{cases}$$

را دستگاه خطی مرتبه دو می‌نامیم و آن را می‌توان به صورت معادله تفاضلی، $X(n+1) = AX(n)$ نوشت که در آن

$$X(n) = \begin{pmatrix} x(n) \\ y(n) \end{pmatrix} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

تعریف ۱۵.۲.۱ نگاشت $f : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ را در نظر بگیرید که G زیر مجموعه باز از $\mathbb{R}^2$ است. در اینصورت مشتق $Df(Q)$ از f در Q به صورت $Df(Q) = A$ تعریف می‌شود، که

$$Df(Q) = A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

تعریف ۱۶.۲.۱ شعاع طیفی A را با $\rho(A)$ نمایش می‌دهند و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|;\ \text{مقادیر ویژه ماتریس } A \text{ هستند. } \lambda_2 \text{ و } \lambda_1\}$$

قضیه ۱۷.۲.۱ فرض کنید A یک ماتریس 2×2 باشد، آنگاه شرایط زیر برای معادله تفاضلی $X(n+1) = AX(n)$ برقرارند:

۱) . اگر $\rho(A) < 1$، مبدأ پایدار مجانبی است.

۲) . اگر $\rho(A) > 1$، مبدأ ناپایدار است.

۳) . اگر $\rho(A) = 1$، و A با ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

متشابه باشد، مبدأ ناپایدار و در بقیه موارد پایدار است.

برهان: به مرجع [۱۳] رجوع شود. □

قضیه ۱۸.۲.۱ فرض کنید $f : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ یک نگاشت C^1 (بطور پیوسته مشتق پذیر) باشد، که G زیر مجموعه باز از $\mathbb{R}^2$، X^* نقطه ثابت f و $A = Df(X^*)$ است، در اینصورت گزاره های زیر برقرارند:

۱) . اگر $\rho(A) < 1$، X^* پایدار مجانبی است.

۲) . اگر $\rho(A) > 1$، X^* ناپایدار است.

۳) . اگر $\rho(A) = 1$، آزمون نتیجه نمی‌دهد.

برهان: به مرجع [۱۳] رجوع شود. □

نتیجه ۱۹.۲.۱ ماتریس A را در نظر می گیریم، مبدأ در معادله تفاضلی $X(n+۱) = AX(n)$، پایدار مجانبی است اگر و تنها اگر

$$|trA| < ۱ + detA < ۲.$$

برقرار باشد.

برهان: به مرجع [۱۱] رجوع شود. $\square$