دانشگاه فردوسی مشهد
دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
گرایش آنالیز عددی

عنوان

روش‌های تفاضلات متناهی برای حل عددی معادلات دیفرانسیل تاخیری

استاد راهنما:
دکتر مرتضی گچ پزان

استاد مشاور:
دکتر علیرضا سهیلی

نگارش:
حسین حیدری کنگ علیا

شهریور ماه ۱۳۹۱

پیش‌گفتار

اغلب پدیده‌های واقعی می‌توانند توسط معادلات دیفرانسیل معمولی مدل‌بندی شوند. اما به منظور این که مدل حاصل، سازگاری بیشتری با پدیده واقعی داشته باشد، بعضی از مواقع لازم است که تابع سمت راست معادلات دیفرانسیل معمولی را اصلاح کرد، به طوری که y' به y بر روی زمان‌های گذشته وابسته باشد. صورت استاندارد چنین مدلی به شکل زیر است

$$\begin{cases} y'(t) = f\big(t, y(t), y(t-\tau)\big), & t \geq t_\circ, \\ y(t) = \phi(t), & t \leq t_\circ, \end{cases} \tag{۱}$$

که آن را معادلات دیفرانسیل تاخیری می‌نامیم.

این پایان‌نامه به صورت زیر فصل‌بندی شده است:

در فصل ۱ توضیحات و مثال‌هایی برای آشنایی با معادلات دیفرانسیل تاخیری ارائه شده است و در فصل ۲، ویژگی‌های جواب معادلات دیفرانسیل تاخیری و قضیه‌ی وجود و یکتایی را برای آن مطرح می‌کنیم. در فصل ۳ ، مروری بر برخی از روش‌های عددی که برای معادلات دیفرانسیل تاخیری مورد استفاده قرار گرفته‌اند، انجام می‌دهیم و همگرایی روش‌های استاندارد که براساس روش‌های گسسته و پیوسته است را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در فصل ۴ ، بوسیله فنون توسعه یافته برای معادلات دیفرانسیل معمولی روشی را برای حل معادلات دیفرانسیل تاخیری براساس یک روند تکراری ارائه می‌دهیم.

فهرست مطالب

فصل ۱

آشنایی با معادلات دیفرانسیل تاخیری

۱.۱ مقدمه

بسیاری از پدیده‌های واقعی زندگی می‌توانند توسط مسائل مقدار اولیه مدل بندی شوند. در معادله دیفرانسیل معمولی[۱]

(ODE)

$$\begin{cases} y'(t) = f\big(t, y(t)\big), \quad t \geq t_\circ, \\ y(t_\circ) = y_\circ, \end{cases} \tag{۱.۱}$$

تابع $y(t)$ متغیر حالت نامیده می‌شود، که اغلب نشان‌دهنده کمیت فیزیکی وابسته به زمان است.

اما به منظور ساختن مدلی که سازگاری بیشتری با یک پدیده واقعی داشته باشد، بعضی از مواقع لازم است تابع سمت راست رابطه (۱.۱) را اصلاح کنیم، به طوری که تابع f به y روی زمان‌های گذشته وابسته باشد. صورت اصلی چنین مدلی توسط معادله دیفرانسیل تاخیری[۲] (DDE) زیر نمایش داده می‌شود

[۱] Ordinary Differential Equation

[۲] Delay Differential Equation

$$\begin{cases} y'(t) = f\big(t, y(t), y(t-\tau)\big), & t \geq t_\circ, \\ y(t) = \phi(t), & t \leq t_\circ, \end{cases} \qquad (۲.۱)$$

که $f : [t_\circ, t_f] \times R^d \times R^d \longrightarrow R^d$ و تاخیر τ همیشه نامنفی است و $\phi(t) \in C^\circ[t_\circ - \tau, t_\circ]$ اطلاعات اولیه متغیر y را نشان می‌دهد.

حتی امکان دارد تابع f علاوه بر این که به y در زمان‌های وابسته است به y' نیز در زمان‌های گذشته وابسته باشد که صورت اصلی چنین مدلی به صورت زیر نمایش داده می‌شود

$$\begin{cases} y'(t) = f\big(t, y(t), y(t-\tau), y'(t-\sigma)\big), & t \geq t_\circ, \\ y(t) = \phi(t), & t \leq t_\circ, \end{cases} \qquad (۳.۱)$$

در این پایان نامه تنها مساله (۲.۱) را مورد برسی قرار می‌دهیم .

۲.۱ مدل‌بندی با استفاده از معادلات دیفرانسیل تاخیری

در بسیاری از مدل‌های ریاضی، معادلات دیفرانسیل تاخیری ظاهر می‌شوند. برای مثال دینامیک‌های جمعیتی، بیماری‌های واگیر (بررسی دوره نهفتگی) ، فیزیولوژی، داروسازی (از جمله، مدل‌کردن واکنش بدن نسبت به $Co_۲$ در گردش خون) ، شیمی، کنترل هدایت کشتی و زیردریایی و بسیاری از مسایل کنترلی دیگر با معادلات دیفرانسیل تاخیری مدل‌بندی می‌شوند. هم اکنون کتاب‌های زیادی در مورد کاربردهای معادلات دیفرانسل تاخیری وجود دارد که برای آشنایی بیشتر می‌توانید به [۹] ، [۱۸] ، [۱۹] ، [۲۱] ، [۲۲] و [۲۳] مراجعه کنید.

معادلات دیفرانسیل معمولی مسائلی را مدل‌بندی می کنند که متغیرهایش تحت تاثیر شرایط جاری هستند، اما معادلات دیفرانسیل تاخیری مسائلی را مدل‌بندی می کنند که اثرات یا نتایج قبلی حداقل بر روی یکی از

متغیرها تاثیرگذار بوده است. گاهی اوقات از این تاخیرها چشم پوشی می شود و از یک معادله دیفرانسیل معمولی به جای یک معادله دیفرانسیل تاخیری استفاده می‌کنند. کوانگ[۳] در کتاب خود به این نکته اشاره می‌کند که اگر محققان به خاطر کوچک بودن تاخیرها از آن‌ها چشم‌پوشی کنند، دچار چه خطرات و اشتباهاتی می‌شوند [۲۳].

برخی دیگر از محققان به جای معادله دیفرانسیل تاخیری، دستگاهی از معادلات دیفرانسیل معمولی را جایگزین می‌کنند به طوری که جواب دستگاه بسیار نزدیک به جواب معادلات دیفرانسیل تاخیری باشد. اما تفاوت‌هایی کیفی بین معادلات دیفرانسیل تاخیری و دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی وجود دارد. در حقیقت پدیده‌های خیلی زیادی که اغلب توسط معادلات دیفرانسیل معمولی مدل‌بندی می‌شوند، توسط معادلات دیفرانسیل تاخیری مدل بهتری دارند.

مثال ۱.۲.۱ معادله زیر که رشد جمعیت را مدل‌بندی می‌کند در نظر بگیرید [۲۳]

$$y'(t) = ay(t)\big(۱ - y(t - ۱)\big), \tag{۴.۱}$$

این معادله، مدل ورهولت - پیرل[۴] که به صورت $y'(t) = ay(t)(۱ - y(t))$ است را در عامل $۱ - y(t)$ بهبود می‌بخشد. در حالی که جواب‌های معادله ورهولت - پیرل یکنوا هستند، جواب‌های مثبت (۴.۱) برای $a \in (۰\,,\,\frac{۱}{e})$ یکنوا و برای $a \in [\,\frac{۱}{e}\,,\,\frac{\pi}{۲}\,)$ نوسانی هستند (شکل ۱.۱ را ببینید) و برای $a \geq \frac{\pi}{۲}$ جواب متناوب است (شکل ۱.۲ را ببینید).

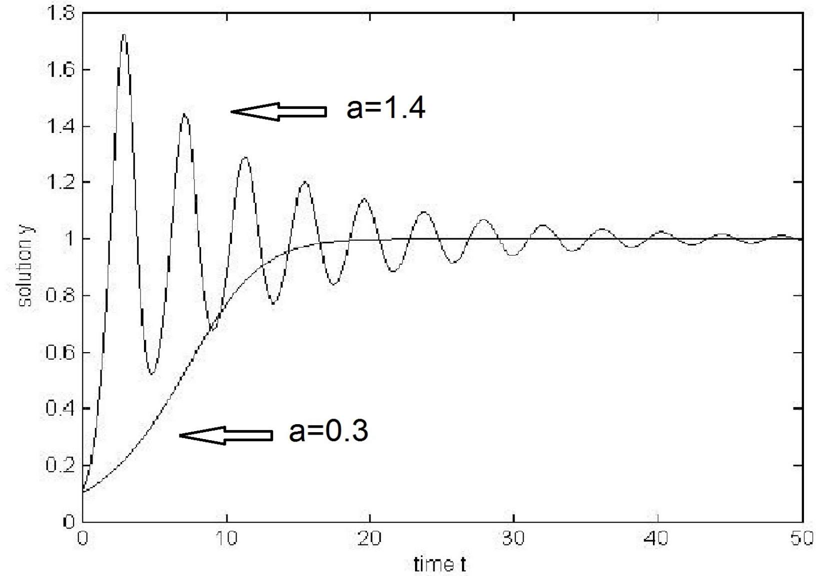
مثال ۲.۲.۱ معادله زیر که توسط مکی[۵] و گلاس[۶] در رابطه با آزاد شدن سلول‌های سرطان در جریان خون

[۳] kuang

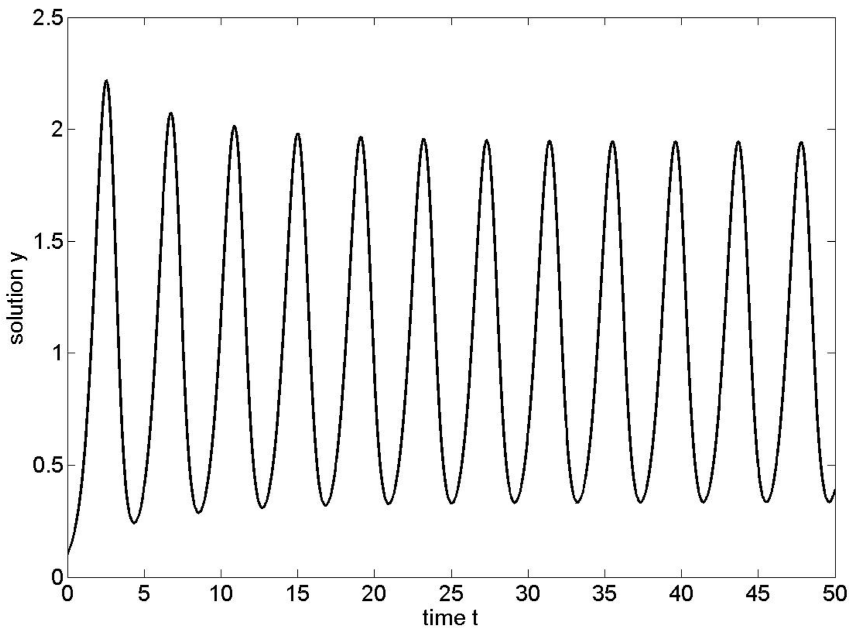
[۴] Verhult-Pearl

[۵] Mackey

[۶] Glass



شکل ۱.۱: جواب معادله (۴.۱) برای ۰٫۳ و $a = ۱٫۴$ به طوری که $y(t) = \phi(t) = ۰٫۱, t \leq ۰$.



شکل ۲.۱: جواب معادله (۴.۱) برای $a = ۱٫۷$.

ارائه شده است را در نظر بگیرید [۲۴]

$$y'(t) = \frac{b\,y(t-\tau)}{1 + [y(t-\tau)]^n} - a\,y(t), \qquad t \geq 0 \tag{۵.۱}$$

برای مقادیر مشخصی از پارامترها و تاخیر τ جواب نوسانی است و بعضی مواقع نوسانات جواب همراه با بی‌نظمی است، که در این حالت بیمار سرطانی می‌باشد. برای مقادیر $a = 0/1, b = 0/2, n = 10, \tau = 20$ مدل دارای رفتاری بی‌نظم است که در شکل ۳.۱ نمایش داده شده است.

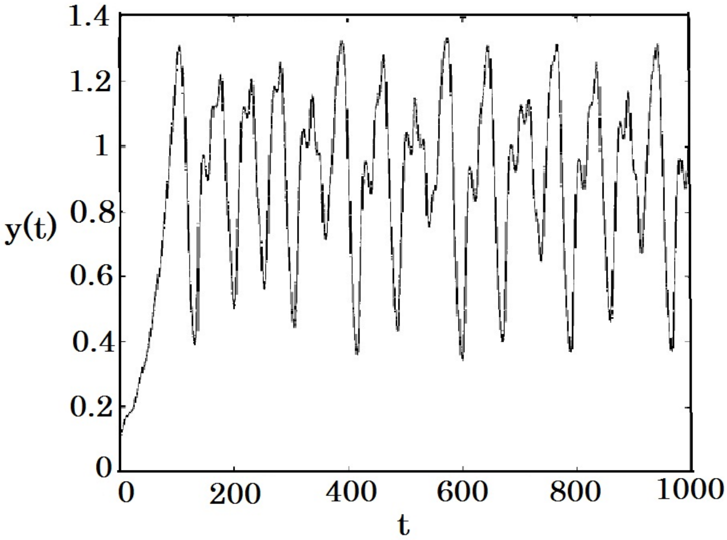
مثال ۳.۲.۱ (مدل بیماری واگیر مالاریا) [۲۷]

لوتکا[۷] مدل معادله دیفرانسیل مربوط به بیماری واگیر مالاریا را بررسی کرده است. بویژه او تاثیر تاخیرهای دوره نهفتگی را مورد بررسی قرار داده است. مدل مربوط به جمعیت انسان و پشه به صورت زیر است

$$\begin{cases} \dfrac{dh}{dt} = b\,g_m(t-u)\big[p - h(t-u)\big]/p - (M+r)h(t) \\ \dfrac{dm}{dt} = a\,f_h(t-v)\big[q - m(t-u)\big]/p - (N+s)m(t) \end{cases}$$

که $u = 0/5$ و $v = 0/6$ (بر حسب ماه) بترتیب دوره نهفتگی در انسان و پشه است. p و q بترتیب مجموع جمعیت انسان‌ها و پشه‌ها است که ثابت فرض شده است. تابع $h(t)$ و $m(t)$ بترتیب جمعیت انسان‌ها و پشه‌های ناقل بیماری هستند (بیمار شده یا مبتلا شده). f_h و g_m بترتیب جمعیت انسان‌ها و پشه‌های عفونت‌زا هستند که برای هر جمعیت یک نسبت ثابت فرض شده است. مقادیر M و N سرعت مرگ و مقادیر r و s سرعت بهبودی برای انسان و پشه است. فرض شده است که هر پشه در واحد زمان b فرد را نیش می‌زند و هر شخص در واحد زمان a نیش را دریافت می‌کند.

[۷] A. J. Lotka



شکل ۳.۱: جواب معادله (۵.۱) برای $t \le 100$.

۳.۱ معادلات دیفرانسیل تاخیری با n جمله تاخیر

مساله مقدار اولیه (۲.۱) به صورت زیر تعمیم داده می‌شود

$$\begin{cases} y'(t) = f\big(t, y(t-\tau_1), y(t-\tau_2), \cdots, y(t-\tau_n)\big), & t_0 \le t \le t_f, \\ y(t) = \phi(t), & \rho \le t \le t_0, \end{cases} \qquad (۶.۱)$$

که $\rho = \min_{1 \le i \le n} \{ \min_{t \ge t_0} (t - \tau_i) \}$.

در این جا مطابق با پیچیدگی مورد نظر برای هر تاخیر τ_i ، $i = 1, \cdots, n$ ، که همیشه نامنفی هستند، سه حالت وجود دارد

۱) $\tau_i = const$ ،[۸]

[۸] The constant delay case

۲) $\tau_i = \tau_i(t)$ [۹]،

۳) $\tau_i = \tau_i(t, y(t))$ [۱۰].

برای حالتی که تاخیرها به تابع $y(t)$ وابسته هستند، کران ρ را نمی توان از پیش تعیین کرد. یک مثال کاملا معمولی برای $n = ۲$ و $\tau_۱ = ۰$ که از صورت (۶.۱) نتیجه می‌شود، همان صورت استاندارد (۲.۱) است.

چون $t \geq t_۰$ وجود دارد که شناسه $t - \tau$ می‌تواند کمتر از $t_۰$ شود، بنابراین اولین اختلافی که بین معادلات (۱.۱) و (۲.۱) وجود دارد این است که جواب معادله (۲.۱) معمولا توسط تابع اولیه $\phi(t)$ تعیین می‌شود، اما جواب معادله (۱.۱) توسط یک مقدار اولیه ساده $y_۰$ بدست می‌آید. بطورکلی مشتق راست $y'(t_۰)^+$ برابر است با $f\big(t_۰, \phi(t_۰), \phi(t_۰ - \tau)\big)$ که با مشتق چپ $y'(t_۰)^-$ برابر نیست و بنابراین، جواب y وابسته به تابع اولیه $\phi(t)$ در نقطه $t_۰$ هموار نیست. بنابراین تنها پیوستگی $C^۰$ برای $y(t)$ تضمین می‌شود. علاوه بر این، چنین ناپیوستگی در مشتقات مراتب بالاتر تابع $y(t)$ از نقطه $t_۰$ در امتداد بازه گسترش می‌یابد و دنباله‌ای از نقاط ناپیوسته را می‌دهد که جواب در بیرون آن‌ها هموار است.

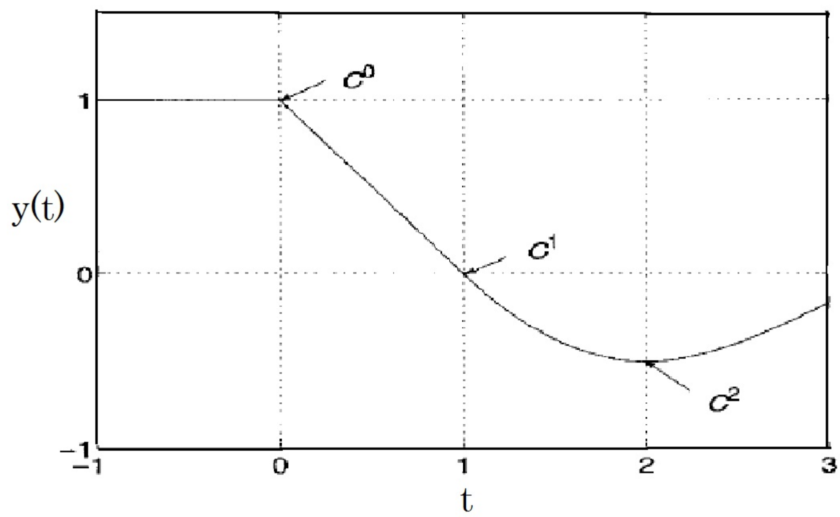
مثال ۱.۳.۱ معادله زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t-۱), & t \geq ۰, \\ y(t) = ۱, & t \leq ۰, \end{cases} \tag{۷.۱}$$

که منحنی جواب آن در شکل ۴.۱ نمایش داده شده است. چون $y'(۰)^- = ۰$ و $y'(۰)^+ = -y(-۱) = -۱$ ، بنابراین تابع $y'(t)$ در نقطه $t = ۰$ دارای جهش است. مشتق دوم $y''(t)$ برابر است با $y''(t) = -y'(t-۱)$ که در نقطه $t = ۱$ دارای جهش است زیرا $y''(۱)^+ = -y'(۰)^+ = ۱$ و $y''(۱)^- = -y'(۰)^- = ۰$ ، پس تابع $y'(t)$ در نقطه $t = ۱$ هموار نیست. مشتق سوم برابر است با $y'''(t) = -y''(t-۱) = y'(t-۲)$ که

[۹] The variable or time depended delay case

[۱۰] The state depended delay case



شکل ۴.۱: جواب معادله (۷.۱).

در نقطه $t = ۲$ دارای جهش است زیرا $y'''(۲)^+ = y'(\circ)^+ = -۱$ و $y'''(۲)^- = y'(\circ)^- = \circ$ ، پس تابع $y''(t)$ در نقطه $t = ۲$ هموار نیست و این روند ناپیوستگی‌ها بهمین صورت گسترش می‌یابد.

شرط اولیه به صورت یک تابع در مساله (۲.۱) اثرات غیر منتظره گوناگون دیگری نیز روی جواب دارد که بعضی از آن‌ها توسط مثال‌های زیر روشن می‌شوند.

مثال ۲.۳.۱ بر خلاف معادلات معمولی، بعضی مواقع رابطه‌ای بین مجموعه اطلاعات اولیه و مجموعه جواب $y(t)$ برای $t \geq t_\circ$ وجود ندارد. معادله $y'(t) = y(t-۱)(y(t)-۱), \quad t \geq \circ$ را روی بازه $[\circ, +\infty]$ در نظر بگیرید. این معادله برای هر تابع اولیه $\phi(t)$ که بر روی $[-۱, \circ]$ تعریف شود، دارای جواب ثابت $y(t) = ۱$ است. زیرا تابع $y(t) - ۱$ که در سمت راست معادله ظاهر شده، همیشه صفر است.

دو مثال بعدی نشان می‌دهند در صورتی که تابع اولیه $\phi(t)$ ، پیوسته نباشد، آن‌گاه ممکن است یکتایی جواب از بین رود و یا جواب در بازه‌ای کراندار تعریف شود.

مثال ۳.۳.۱ معادله زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} y'(t) = y(t - |y(t)| - ۱) + \frac{۱}{۲}, & ۰ \le t \le ۲, \\ y(t) = \phi(t), & t \le ۰, \end{cases}$$

و

$$\phi(t) = \begin{cases} ۱ & t < -۱ \\ ۰ & -۱ \le t \le ۰, \end{cases}$$

به سادگی دیده می‌شود که در بازه $[۰, ۲]$، هر دو تابع $y(t) = \frac{۳}{۲}t$ و $y(t) = \frac{۱}{۲}t$ جواب معادله بالا هستند.

لذا یکتایی جواب در این مثال وجود ندارد.

مثال ۴.۳.۱ معادله زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} y'(t) = -y\big(t - ۲ - y(t)^۲\big) + ۵, & t \ge ۰, \\ y(t) = \phi(t), & t \le ۰, \end{cases}$$

و

$$\phi(t) = \begin{cases} \frac{۹}{۲} & t < -۱ \\ -\frac{۱}{۲} & -۱ \le t \le ۰, \end{cases}$$

که جواب در بازه $[۰, \frac{۱۲۵}{۱۲۱}]$ بصورت زیر است

$$y(t) = \begin{cases} \frac{۱}{۲}(t - ۱), & ۰ \le t \le ۱, \\ \frac{۱۱}{۲}(t - ۱), & ۱ \le t \le \frac{۱۲۵}{۱۲۱}. \end{cases}$$

واضح است که جواب برای $t > \frac{۱۲۵}{۱۲۱}$ وجود ندارد، زیرا در حقیقت شناسه $t - ۲ - y(t)^۲$ در نقطه $t = \frac{۱۲۵}{۱۲۱}$ برابر است با ۱− و در همسایگی‌های راست و چپ چنین نقطه‌ای، شناسه $y(t - ۲ - y(t)^۲)$ بترتیب برابر با

$\frac{۹}{۲}$ و $-\frac{۱}{۲}$ است و بنابراین جواب معادله بایستی به صورت زیر باشد

$$y(t) = c(t - \frac{۱۲۵}{۱۲۱}) + \frac{۲}{۱۱}$$

و برای این که عدد c را بدست آوریم به صورت زیر عمل می‌کنیم

$$y'(\frac{۱۲۵}{۱۲۱}) = c,$$
$$y'(\frac{۱۲۵}{۱۲۱}) = -y(\frac{۱۲۵}{۱۲۱} - ۲ - y(\frac{۱۲۵}{۱۲۱})^۲ + ۵ = \begin{cases} -(-\frac{۱}{۲}) + ۵ = \frac{۱۱}{۲}, & t \leq \frac{۱۲۵}{۱۲۱}, \\ -\frac{۹}{۲} + ۵ = \frac{۱}{۲}, & t > \frac{۱۲۵}{۱۲۱}, \end{cases}$$

بنابراین

اگر $-۱ > t - ۲ - y(t)^۲$، آنگاه $c = \frac{۱}{۲}$،

اگر $-۱ \leq t - ۲ - y(t)^۲$، آنگاه $c = \frac{۱۱}{۲}$.

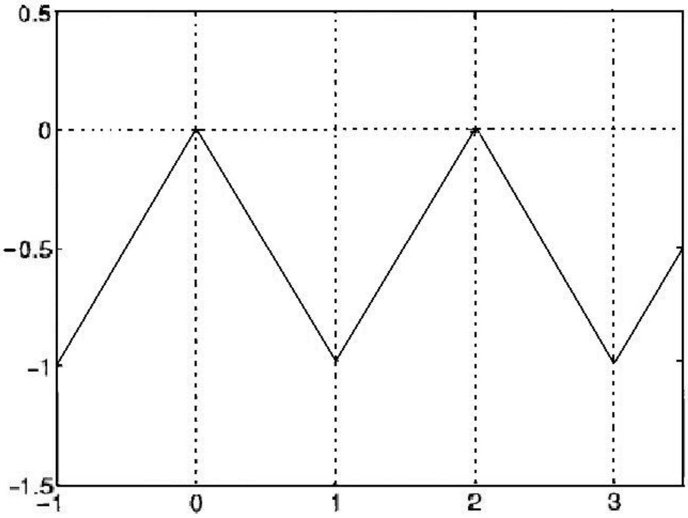
بنابراین برای $t > \frac{۱۲۵}{۱۲۱}$ بایستی جواب به صورت $y(t) = \frac{۱}{۲}(t - \frac{۱۲۵}{۱۲۱}) + \frac{۲}{۱۱}$ باشد، ولی این با مفروضاتی که برای شناسه $t - ۲ - y(t)^۲$ در نظر گرفته‌ایم در تناقض است زیرا، فرض کنید که $\alpha(t) = t - ۲ - y(t)^۲$ باشد، داریم

$$\alpha(۲) = ۲ - ۲ - y(۲)^۲ = -y(۲)^۲ = -\left[\frac{۱}{۲}(۲ - \frac{۱۲۵}{۱۲۱}) + \frac{۲}{۱۱}\right]^۲ = -(\frac{۱۶۱}{۲۴۲})^۲ > -۱$$

و این با فرض $\alpha(t) < -۱$ برای $t > \frac{۱۲۵}{۱۲۱}$ در تناقض است، بنابراین جوابی برای $t > \frac{۱۲۵}{۱۲۱}$ وجود ندارد. این مثال نشان می‌دهد که ممکن است جواب روی یک بازه‌ی متناهی تعریف شود.

مثال ۵.۳.۱ معادله زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} y'(t) = -y'(t - ۱), & t \geq ۰, \\ y(t) = t, & t \leq ۰, \end{cases} \qquad (۸.۱)$$



شکل ۵.۱: جواب معادله (۸.۱)

که منحنی جواب در شکل ۵.۱ نمایش داده شده است. چون $y'(۰)^- = ۱$ و $y'(۰)^+ = -y'(-۱) = -۱$ ، بنابراین تابع $y'(t)$ در نقطه $t = ۰$ ناپیوسته است و چون برای $t \geq ۰$ داریم $y'(t) = -y'(t-۱)$ ، بنابراین تابع $y'(t)$ در نقطه $t = ۱$ ناپیوسته است و این روند برای $y'(t)$ در نقاط $t = ۲, ۳, \ldots$ نیز اتفاق می‌افتد.

اکنون بوسیله دو مثال زیر، روشی مقدماتی را برای حل معادلات دیفرانسیل تاخیری ارائه می‌دهیم، که این روش به روش گام‌ها[۱۱] موسوم است.

مثال ۶.۳.۱ معادله دیفرانسیل تاخیری زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} y'(t) = -cy(t-۱)\Big(۱ + y(t)\Big), & t \geq ۰, \\ y(t) = \phi(t), & t \leq ۰, \end{cases}$$

می‌خواهیم این معادله را به روش گام‌ها حل کنیم (در این مثال، در هر گام جواب تحلیلی را بدست

[۱۱] Method of steps

می‌آوریم). این معادله روی بازه $[\circ, ۱]$ به مساله مقدار اولیه زیر تبدیل می‌شود

$$\begin{cases} y'(t) + c\,\phi(t-۱)y(t) = -c\,\phi(t-۱), & \circ \leq t \leq ۱, \\ y(\circ) = \phi(\circ), \end{cases}$$

پس داریم (معادله خطی مرتبه اول)

$$y'(t)\, e^{\int_\circ^t c\,\phi(s-۱)\,\mathrm{d}s} + c\,\phi(t-۱)\, y(t)\, e^{\int_\circ^t c\,\phi(s-۱)\,\mathrm{d}s} = -c\,\phi(t-۱)\, e^{\int_\circ^t c\,\phi(s-۱)\,\mathrm{d}s}$$

بنابراین

$$\frac{d}{dt}\left[y(t)e^{\int_\circ^t c\phi(s-۱)\mathrm{d}s}\right] = -c\phi(t-۱)e^{\int_\circ^t c\phi(s-۱)\mathrm{d}s}$$

پس از انتگرال‌گیری روی بازه $[\circ, r]$ از رابطه‌ی اخیر داریم

$$y(r)\, e^{\int_\circ^r c\,\phi(s-۱)\mathrm{d}s} - \phi(\circ) = -e^{\int_\circ^t c\,\phi(s-۱)\mathrm{d}s}\,|_\circ^r = -e^{\int_\circ^r c\,\phi(s-۱)\,\mathrm{d}s} + ۱$$

در نتیجه داریم

$$y(t) = (۱ + \phi(\circ))\; e^{-\int_\circ^t c\,\phi(s-۱)\,\mathrm{d}s} - ۱ \qquad \circ \leq t \leq ۱$$

اکنون که y روی بازه $[\circ, ۱]$ معلوم شد، بازه $[۱, ۲]$ را در نظر می‌گیریم و روند را تا هر جا که لازم باشد تکرار می‌کنیم. البته در این مثال فرض بر این است که تابع ϕ روی بازه ی $[-۱, \circ]$ پیوسته است.

مثال ۷.۳.۱ معادله دیفرانسیل تاخیری زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} y'(t) = y(t-۱), & t \geq \circ, \\ y(t) = t^۲, & -۱ \leq t \leq \circ, \end{cases}$$

این معادله را به روش گام‌ها حل می‌کنیم. فرض کنید t متعلق به بازه $[\circ, ۱]$ باشد در این صورت $t - ۱ \in$

$[-۱,۰]$ ، بنابراین نتیجه می‌شود

$$\begin{cases} y'(t) = y(t-۱) = (t-۱)^۲, & ۰ \leq t \leq ۱, \\ y(۰) = ۰, \end{cases}$$

که یک مساله با مقدار اولیه می‌باشد و جواب آن به صورت زیر است

$$y(t) = \frac{۱}{۳}(t-۱)^۳ + \frac{۱}{۳}, \qquad t \in [۰,۱],$$

دوباره فرض کنید که t متعلق به بازه $[۱,۲]$ باشد، بنابراین $t-۱ \in [۰,۱]$ لذا

$$\begin{cases} y'(t) = y(t-۱) = \frac{۱}{۳}(t-۲)^۳ + \frac{۱}{۳}, & ۱ \leq t \leq ۲, \\ y(۱) = \frac{۱}{۳}, \end{cases}$$

جواب این مساله نیز به صورت زیر است

$$y(t) = \frac{۱}{۱۲}(t-۲)^۴ + \frac{۱}{۳}t - \frac{۱}{۱۲}$$

این فرآیند را می‌توانیم تا هر جا که بخواهیم ادامه دهیم و جواب را در بازه‌های دیگر بدست آورد. اما ملاحظه می‌کنیم که اگر طول بازه کوچک باشد، میزان محاسبه به سرعت بالا می‌رود و روش کندی را خواهیم داشت.

برای آشنایی در مورد بعضی از خواص اساسی روش‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل تاخیری ، معادلات دیفرانسیل تاخیری زیر را که دارای تاخیر ثابت است در نظر بگیرید

$$\begin{cases} y'(t) = f\big(t, y(t), y(t-۱)\big), & t \geq ۰, \\ y(t) = \phi(t), & t \leq ۰. \end{cases} \tag{۹.۱}$$

معمولا راه حل عددی برای (۹.۱) به این صورت است که گام‌هایی را تعیین می‌کنیم که اندازه‌ی آن‌ها کمتر و یا مساوی تاخیر $\tau = ۱$ باشد و سپس گام به گام معادلات دیفرانسیل معمولی بدست آمده را با توجه

به روش‌های عددی حل می‌کنیم، به طوری که جمله تاخیری $y(t-۱)$ توسط $\eta(t-۱)$ جایگزین می‌شود و $\eta(t-۱)$ نیز با توجه به مقدار t برابر با $\phi(t-۱)$ و یا یک تقریب پیوسته‌ای از جواب تقریبی که قبلا توسط خود روش محاسبه شده است. بنابراین در مرحله $(n+۱)$ ام، معادله زیر بایستی حل شود

$$\begin{cases} w'_{n+۱}(t) = f\big(t, w_{n+۱}(t), x(t-۱)\big), & t_n \leq t \leq t_{n+۱}, \\ w_{n+۱}(t_n) = y_n. \end{cases} \tag{۱۰.۱}$$

با استفاده از روش‌های عددی گسسته مقدار $y_{n+۱}$ بدست می‌آید و بنابراین η روی بازه $[t_n, t_{n+۱}]$ به گونه‌ای است که $\eta(t_{n+۱}) = y_{n+۱}$ باشد.

چون روش‌های عددی گسسته برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی، مقادیر تقریبی از جواب را تنها در نقاط گره‌ای می‌دهد، بنابراین اگر روش‌های عددی گسسته را برای حل (۹.۱) بکار ببریم، ممکن است نیاز به دانستن جواب تقریبی $\eta(t)$ در بعضی از نقاط $t-۱$ باشیم که این نقاط با نقاط گره‌ای متفاوت هستند و برای رفع این مشکل می‌توان از تعمیم‌های پیوسته استفاده نمود. این امر می‌تواند بوسیله درونیابی روی مقادیر معلوم و یا بوسیله روش‌های پیوسته معادلات دیفرانسیل معمولی، که به صورت گام به گام یک تقریب پیوسته‌ای از جواب را تولید می‌کند، انجام شود. بنابراین روش‌های حل معادلات دیفرانسیل تاخیری براساس تعمیم‌های پیوسته است.

فصل ۲

وجود و ویژگی‌های جواب معادلات دیفرانسیل تاخیری

۱.۲ مقدمه

در این فصل درجه همواری جواب دستگاه معادلات دیفرانسیل تاخیری زیر را

$$\begin{cases} y'(t) = f\Big(t, y(t), y\big(t - \tau(t, y(t))\big)\Big), & a \le t \le b, \\ y(t) = \phi(t), & \overline{a} \le t \le a, \end{cases} \tag{۱.۲}$$

که در آن $f : [a,b] \times R^d \times R^d \longrightarrow R^d$ و $\overline{a} = \min_{t\in[a,b]} \alpha(t)$ و $\alpha(t) = t - \tau\,(t, y(t))$ است را بررسی می‌کنیم. بویژه نوع و نحوه گسترش ناپیوستگی جهشی[۱] مشتق را در صورت وجود بررسی می‌کنیم. پخش و گسترش این ناپیوستگی‌ها در امتداد بازه ی $[a,b]$ تحت مفروضات متفاوتی است که در تاخیر τ وجود دارد. در نهایت، به منظور کامل شدن مبحث، قضیه‌ی وجود و یکتایی جواب را برای (۱.۲) می‌آوریم.

[۱] Jump

۲.۲ مکان ناپیوستگی‌ها و هموارسازی جواب

قبلا اشاره کردیم که حضور شناسه‌های انحراف‌یافته [۲] در y یا y' می‌تواند باعث ایجاد ناپیوستگی‌هایی در y' یا مشتقات بالاتر، بصورت دنباله‌ای از نقاط شود. از طرفی دیگر، واضح است که هر روش عددی گام به گام برای مسائل مقدار اولیه به شرطی به مرتبه دقت مورد نظر می‌رسد که جواب در هر زیر بازه $[t_n, t_{n+۱}]$ به اندازه‌ی کافی هموار باشد. به طور دقیق‌تر، برای روشی که از مرتبه p است، بایستی جواب در زیر بازه $[t_n, t_{n+۱}]$ حداقل تا مرتبه $p+۱$ پیوسته باشد. بنابراین، نقاط شبکه بایستی همه‌ی نقاط ناپیوستگی $y^{(s)}$ حداقل برای $s = ۰, ۱, \dots, p+۱$ را شامل باشد. در این بخش، نحوه گسترش نقاط ناپیوستگی در امتداد بازه $[a, b]$ و همچنین چگونگی افزایش همواری را بررسی می‌کنیم. تعداد و موقعیت نقاط ناپیوستگی به طور اساسی به رفتار شناسه

$$\alpha(t) = t - \tau(t, y(t))$$

بستگی دارد. فرض کنید که $\alpha(t) \leq t$ باشد زیرا، تاخیرها همیشه نامنفی هستند. بویژه اگر برای $t \geq t_۰$ داشته باشیم $\alpha(t) \geq t_۰$، آنگاه به مقادیر $y(t)$ که $t \leq t_۰$ است، نیازی نیست و بنابراین هیچ ناپیوستگی از $t_۰$ گسترش نمی‌یابد. بنابراین، جواب با توجه به نظم موجود در f و α دارای نظم است. به این حالت، معادله پانتوگراف تعمیم‌یافته می‌گوییم. برای مثال، می‌توان به مساله مقدار اولیه زیر اشاره کرد

$$\begin{cases} y'(t) = f\big(t, y(t), y(pt)\big), & t \geq ۰, \\ y(۰) = y_۰, \end{cases}$$

که در آن $۰ < p < ۱$ است.

---

[۲] Deviated Argument