فهرست مندرجات

دانشگاه تربیت معلم سبزوار
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی محض

منظم بودن آرنز جبر عملگرها روی فضای باناخ

استاد راهنما
دکتر محمد جانفدا

استاد مشاور
دکتر علی اکبرعارفی جمال

نسیم رحمانی

مرداد ۱۳۸۸

تقدیم به

پدرم که وجودش در سراسر زندگی روشنایی بخش راهم است.

مادرم که کلامش آرامش می دهد، نگاهش عشق می آموزد، و دعای خیرش امید می بخشد.

همسرم که درس هایی از عشق و گذشت را به من آموخت، او که در کنارش خوشبختی را به کمال احساس می کنم.

خواهر عزیزم که همیشه و در همه حال همراه و یاور من بوده و با آرزوی آینده‌ای درخشان و پربار برای او.

سپاس و قدردانی

با سپاس به درگاه ایزد لایزال و بی همتا که همواره نور امید را در دلم زنده نگه داشت و این قدرت را به من ارزانی داشت تا این مهم به انجام رسد. در اینجا لازم می دانم ازآقای دکتر محمد جانفدا که محبتهای بی دریغشان مشکل راه را بر من آسان نمود تشکر و قدردانی نمایم. همچنین از آقای دکتر علی اکبر عارفی جمال که زحمت مشاوره این پایان نامه را تقبل کردند نهایت سپاسگزاری را دارم و از اساتید ارجمند جناب آقای دکتر محمد صال مصلحیان و آقای دکتر علیرضا جانفدا داوران این پایان نامه تشکر می نمایم. از پدر و مادر عزیزم که همواره مشتاق و مشوق ادامه تحصیلات من بوده‌اند سپاسگزارم. امیدوارم بتوانم از عهده مسئولیت سنگینی که در قبال ایشان بر دوش من است با سرافرازی برایم. از همسر مهربانم که با صبر و گذشت خود مرا در ادامه راه همراهی نمود کمال تشکر را دارم. درنهایت از دوست عزیزم سرکار خانم زهرا زارع دوست که به نحوی در به پایان رساندن پایان نامه مرا یاری نمودند صمیمانه تشکر می نمایم.

پیشگفتار

یکی از مفاهیم مهم در دوگان دوم جبرهای باناخ که سالها مورد علاقه ریاضیدانها بوده مفهوم منظم بودن به معنی آرنز[۱] است. این مفهوم در سال ۱۹۵۱ توسط آرنز تعریف شده است و در سال های اخیر بسیاری از مقالات متاثر از این مفهوم است. این پایان نامه بر گرفته از مقاله

M. Daws, Arens regularity of the algebra of operators on a Banach space, Bull. London Math. Soc. 36, (2004), 493-503,

است که به منظم بودن آرنزی جبر عملگرهای خطی کراندار می پردازد و شامل چهار فصل است.

در ابتدای فصل اول به بیان مفاهیم مورد نیاز در مورد فضاهای نرم دار، فضاهای باناخ و جبرهای باناخ می پردازیم. سپس مباحثی در خصوص ضرب های تانسوری را بیان می کنیم. در فصل دوم به معرفی ضرب های آرنز روی دوگان دوم جبرهای باناخ پرداخته‌ایم و شرط های معادل منظم آرنزی بودن را مورد بررسی قرار می دهیم. در فصل سوم مفاهیم پالایه و فرا پالایه را می آوریم و پس از آن به رابطه بین پالایه و تور، و پالایه و دنباله می پردازیم.

[۱] Arens

سرانجام در فصل چهارم که قسمت اصلی پایان نامه را شامل می شود پس از بیان تعاریف و ملاحظات لازم و نیز بیان مختصری درباره فراتوان و فضاهای سوپرانعکاسی با یک اثبات نسبتا کوتاه نشان می دهیم که اگر E فضای باناخ سوپرانعکاسی باشد آنگاه $B(E)$، جبر باناخ عملگرهای خطی کراندار روی E با ترکیب عملگرها به عنوان عمل ضرب، منظم آرنزی است و برخی از نتایج که شرایط ضروری روی E برای منظم آرنز بودن $B(E)$ می باشند را بیان می کنیم. در خاتمه نشان می دهیم که فضای باناخ انعکاسی مانند E موجود است به طوری که $B(E)$ منظم آرنزی نیست.

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

۱.۱ مفاهیم اولیه

در این فصل تعاریف و قضایای مقدماتی و مفاهیمی را که در این نوشتار ضروری است به اختصار بیان می کنیم. مفاهیمی چون فضاهای نرم دار، جبرهای باناخ، مدول ها روی جبرهای باناخ، ضرب تانسوری فضاهای نرم دار و نرم تصویری از جمله این مفاهیم هستند.

در این بخش به معرفی فضاهای نرم دار، مثال هایی از این فضاها و برخی قضایای مشهور و مورد نیاز در این پایان نامه می پردازیم.

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنید X فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد، یک شبه نرم روی X تابعی است مانند P از X به $\mathbb{R}$، به طوری که برای هر $x,y \in X$ و $\alpha \in \mathbb{F}$،

الف) $P(x) \geq 0$،

ب) $P(\alpha x) = |\alpha| P(x)$،

ج) $P(x+y) \leq P(x)+P(y)$.

به شبه نرم P روی X یک نرم می گوییم هرگاه،

د) $P(x)=0 \Rightarrow x=0$.

اگر فضای X دارای یک نرم باشد آن را فضای نرم دار می‌گوییم و معمولاً نرم را با $\|.\|$ نشان می‌دهیم. این نرم روی X یک متریک به صورت $d(x,y)=\|x-y\|$ القا می کند.

تعریف ۲.۱.۱ فضای نرم دار X را باناخ گوییم، هرگاه فضای متری حاصل شده از نرم فضایی کامل باشد.

مثال ۳.۱.۱ فرض کنید X یک فضای توپولوژیک است اگر $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ تابعی کراندار باشد، آن گاه $\|.\|_\infty$ را این گونه تعریف می کنیم:

$$\| f \|_\infty = sup\{| f(x) |: x \in X\}.$$

می توان نشان داد $\| . \|_\infty$ یک نرم در فضای توابع کراندار روی X یعنی $Bd(X)$ است و $(Bd(X), \| . \|_\infty)$ یک فضای باناخ است.

مثال ۴.۱.۱ فرض کنید X یک فضای اندازه با اندازه مثبت μ روی آن باشد، $1 \leq p < \infty$ و f تابعی اندازه‌پذیر مختلط روی X باشد. $\| f \|_p$ را به صورت $\|f\|_p = (\int_X |f|^p)^{\frac{1}{p}}$ تعریف می کنیم. $L^p(\mu)$ را برای نمایش مجموعه توابع اندازه پذیر مانند f به کار می بریم که

$\parallel f \parallel_p < \infty$ همچنین $L^\infty(\mu)$ را برای توابع اندازه پذیری مانند f به کار می بریم که

$$\parallel f \parallel_\infty = \inf\{\alpha : \alpha > |f| \quad a.e\} = esssup \mid f \mid < \infty.$$

قضیه ۳.۱۱.[?] نشان می دهد که فضای $L^p(\mu)$ها برای $1 \leq p \leq \infty$ فضاهایی باناخ هستند. لازم به ذکر است که اعضای $L^p(\mu)$ در واقع کلاس های هم ارزی هستند که در آن f و g در یک کلاس واقعند اگر و تنها اگر تقریبا برای هر $x \in X$،

$$f = g.$$

مثال ۵.۱.۱ اگر X, Y فضاهایی نرم دار باشند مجموعهٔ تمام توابع خطی و پیوسته مانند T از X به Y را با $B(X,Y)$ نمایش می دهیم. این مجموعه تحت اعمال زیر

$$(T + \alpha S)(x) = T(x) + \alpha S(x),$$

$$(\alpha T)(x) = \alpha T(x) \qquad T, S \in B(X,Y), \alpha \in \mathbb{C}.$$

به یک فضای برداری تبدیل می شود و

$$\parallel T \parallel = sup\{\parallel T(x) \parallel : \parallel x \parallel \leq 1\} \qquad (T \in B(X,Y))$$

آن را به یک فضای نرم دار تبدیل می کند. قضیه ۷.۴.[?] نشان می دهد وقتی Y فضایی باناخ است $B(X,Y)$ به فضایی باناخ تبدیل می شود. در حالتی که $Y = \mathbb{C}$ معمولا به جای $B(X,\mathbb{C})$، X' را به کار می برند. در نتیجه وقتی X فضایی نرم دار است X' همواره باناخ

خواهد بود. X' را معمولا دوگان فضای X می‌نامند. قضیه نمایش ریس [1] برای فضاهای $L^p(\mu)$ نشان می‌دهد که $L^p(\mu)' \cong L^q(\mu)$ که در آن $1/p + 1/q = 1$. لازم به ذکر است که در حالت $p = 1$ وقتی μ، σ—متناهی است، داریم $L^1(\mu)' \cong L^\infty(\mu)$، اما در حالت کلی دوگان فضای $L^\infty(\mu)$ برابر $L^1(\mu)$ نیست. یادآوری می کنیم، هنگامی که μ اندازه شمارنده و $X = \mathbb{N}$ آن گاه $L^p(\mu)$ را با l^p نمایش می دهند.

قضیه ۶.۱.۱ (هان — باناخ [2]) فرض کنید X فضایی نرم دار و M زیر فضایی نه لزوما بسته از X باشد. اگر $f : M \to \mathbb{C}$ یک تابعک خطی کراندار باشد آن گاه تابعک خطی کراندار مانند F در X' موجود است به طوری که تحدید F به M برابر f است. همچنین F را می توان به گونه ای یافت که $\| F \| = \| f \|$.

برهان . ر.ک.به ۱۶.۵.[?].□

F در قضیه فوق را معمولا یک گسترش هان — باناخ f بر روی X می نامیم.

تعریف ۷.۱.۱ (توپولوژی ضعیف). فرض کنید X یک فضای نرم دار و X' دوگان آن باشد. توپولوژی تولید شده توسط X' روی X، یعنی ضعیف ترین توپولوژی τ روی X که هر $f \in X'$ نسبت به τ پیوسته باشد را توپولوژی ضعیف روی X گویند و آن را با $\sigma(X, X')$ نشان می دهند. در واقع تمام مجموعه های به شکل

$$U(f, x_\circ, \epsilon) = \{x \in X : | f(x) - f(x_\circ) | < \epsilon\},\ f \in X', x_\circ, \epsilon > \circ$$

[1] Riesz Representation Theorem
[2] Hahn Banach Theorem

تشکیل یک زیرپایه برای توپولوژی ضعیف روی X می دهند.X به همراه توپولوژی ضعیف را گاهی با (X, wk) نشان می دهیم .

گزاره ۸.۱.۱ دنباله $\{x_n\}$ در فضای نرم دار X همگرای ضعیف به x است اگر و تنها اگر برای هر $f \in X'$ داشته باشیم، $f(x_n) \to f(x)$.

برهان. ر.ک. به [?].$\square$

قضیه ۹.۱.۱ اگر X فضایی نرم دار باشد آن گاه $(X, wk)' = X'$.

برهان. ر.ک. به ۱.۱.۲.V.[?].$\square$

تعریف ۱۰.۱.۱ فرض کنید X فضایی نرم دار و X'' دوگان دوم آن باشد نگاشت $\kappa_X : X \to X''$ را که به صورت $\kappa_X(x)(f) = f(x)$ تعریف می شود جایدهی متعارف نامیم. هرگاه κ_X پوشا باشد X را بازتابی نامیم. در ادامه $\kappa_X(x)$ را با $\hat{x}$ و یا گاهی x نمایش خواهیم داد. لازم به یاد آوری است که اگر X فضایی باناخ باشد می توان نشان داد κ_X یک همریختی طولپا از X به روی یک زیر فضای بسته X'' است. (ر.ک.به [?]).

تعریف ۱۱.۱.۱ (توپولوژی ضعیف ستاره.) فرض کنید X فضایی نرم دار و X' دوگان آن باشد. منظور از توپولوژی ضعیف τ روی X'، ضعیف ترین توپولوژی روی X' است که نسبت به آن توپولوژی برای هر $x \in X$، $\kappa_X(x)$ پیوسته می شود که در آن κ_X جایدهی متعارف X در X'' است. X'' به همراه این توپولوژی را گاهی با (X', wk^*) نشان می دهیم. لازم به ذکر است از آنجا که X' فضایی نرم دار است دارای توپولوژی ضعیف $\sigma(X', X'')$ نیز

می‌باشد. به وضوح توپولوژی ضعیف ستاره روی X' ضعیف تر از توپولوژی ضعیف روی X' است. در واقع برای هر $\epsilon > 0$، $f \in X'$ و $x \in X$، مجموعه های به شکل

$$\begin{aligned} U(f_\circ, x, \epsilon) &= \{f \in X' :\mid \varphi(x)(f) - \varphi(x)(f_\circ) \mid < \epsilon\} \\ &= \{f \in X' :\mid f(x) - f(x_\circ) \mid < \epsilon\}. \end{aligned}$$

تشکیل یک زیر پایه برای توپولوژی ضعیف ستاره روی X' می دهند.

گزاره ۱۲.۱.۱ اگر $\{f_n\}_{n\in N}$ دنباله ای در فضای نرم دار X باشد، آن گاه شرط لازم و کافی برای این که $\{f_n\}_{n\in N}$ همگرای ضعیف ستاره به f در X' باشد آن است که برای هر $x \in X$ داشته باشیم $f_n(x) \to f(x)$.

برهان . ر.ک. به[?].□

قضیه ۱۳.۱.۱ اگر X فضایی نرم دار باشد آن گاه $X = (X', wk^*)'$.

برهان . ر.ک. به ۳.۱.V. [?].□

قضیه ۱۴.۱.۱ (باناخ-آلاغلو[۳]) اگر X فضایی نرم دار باشد آن گاه مجموعه $B' = \{f \in X' :\parallel f \parallel \leq 1\}$ در توپولوژی ضعیف ستاره فشرده است.

برهان . ر.ک به ۱.۳.V. [?].□

گزاره ۱۵.۱.۱ فرض کنید X یک فضای نرم دار باشد و $B_r = \{x \in X :\parallel x \parallel \leq r\}$ ، $B_r{}' = \{y \in X'' :\parallel y \parallel \leq r\}$ آن گاه B_r به عنوان زیر مجموعه ای از X'' در $B_r{}'$ با توپولوژی

[۳] Banach Alaoglu's Theorem

ضعیف ستاره چگال است و یا به‌عبارت معادل $\bar{B}_r^{w^*} = B_r{}'$.

برهان. ر.ک. به ۱.۴.V. [?]. □

قضیه زیر به قضیه گلدشتاین [۴] معروف است و می توان آن را به عنوان نتیجه‌ای از گزاره قبل فرض کرد همچنین اثبات مستقیمی از آن در [?] وجود دارد.

قضیه ۱۶.۱.۱ (گلدشتاین) فرض کنید X فضایی نرم دار باشد آن گاه $\bar{X}^{w^*} = X''$.

قضیه زیر شروط معادل بازتابی بودن یک فضای باناخ را بیان می کند .

قضیه ۱۷.۱.۱ اگر X یک فضای باناخ باشد آن گاه موارد زیر هم ارزند.

الف) X بازتابی است.

ب) X' بازتابی است.

ج) توپولوژی های ضعیف و ضعیف ستاره روی X' بر هم منطبقند.

د) گوی واحد X، فشرده ضعیف است.

برهان. ر.ک. به ۱.۴.V. [?].□

تعریف ۱۸.۱.۱ فرض کنید Y, X فضاهایی باناخ و B گوی واحد X باشد، عملگر خطی پیوسته $T : X \to Y$ را فشرده گویند هرگاه بستار $T(B)$ در Y فشرده باشد.

واضح است که اگر T عملگری فشرده باشد عملگری فشرده ضعیف نیز خواهد بود اما عکس این مطلب در حالت کلی برقرار نیست. لازم به یاد آوری است که اگر $T \in B(X, Y)$

[۴] Goldstien

آن گاه عملگر الحاقی T یعنی T^* به $B(Y',X')$ تعلق دارد و این گونه تعریف می شود $T^*(f)(x)=f(T(x))$. (ر.ک. به $[?].VI.۱.۴$)

یادآوری می کنیم که یک مجموعه جهت دار عبارت است از مجموعه مرتب جزیی $(I,\leq)$ به طوری که برای هر $\alpha_۱,\alpha_۲$ در I، یک α در I موجود است به طوری که $\alpha_۱\leq\alpha,\alpha_۲\leq\alpha$.

یک تور در فضای توپولوژیک X، یک نگاشت از مجموعه جهت دار I به توی X است.

اگر تور $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ به x همگرا باشد می نویسیم $x_\alpha\to x$. منظور از این همگرایی این است که برای هر همسایگی U از x، $\alpha_۰$ ای موجود باشد که برای هر $\alpha>\alpha_۰$، $x_\alpha\in U$.

قضیه ۱۹.۱.۱ اگر Y,X فضاهایی باناخ باشند و $T\in B(X,Y)$ آن گاه گزاره های زیر هم ارزند.

الف) T عملگری فشرده ضعیف است.

ب) T^* عملگری فشرده ضعیف است.

ج) $T^{**}(X'')\subseteq Y$ که در آن T^{**} عملگر الحاقی T^* است.

د) عملگر T^* تحت توپولوژی های ضعیف ستاره، Y' و ضعیف X' پیوسته است.

برهان. الف $\Leftrightarrow$ ب $\Leftrightarrow$ ج ر.ک. به $VI.۵.۵$.[?] و برای الف) $\Leftrightarrow$ د) ر.ک. به $[?].VI.۴.۷$ $\square$

قضیه ۲۰.۱.۱ (شودر [۵]) اگر Y,X فضاهایی باناخ باشند و $T\in B(X,Y)$، آن گاه گزاره های زیر هم ارزند.

الف) T عملگری فشرده است.

[5] Schauder's Theorem

ب) T^* عملگری فشرده است.

ج) اگر $\{f_\alpha\} \in I_\alpha$ یک تور همگرای ضعیف ستاره در Y' باشد، آن گاه $T^*(f_\alpha) \in I_\alpha$ یک تور همگرا با نرم است.

برهان. برای الف) ⇔ ب) ر.ک. به $[?].VI.۳.۴$ و برای الف) ⇔ ج) ر.ک. به $[?].VI.۵.۶$ $\square$

نماد گذاری و تعریف. فرض کنید $\{X_i; i \in I\}$ خانواده ای از فضاهای نرم دار باشد، می‌دانیم فضای حاصلضربی $\prod X_i$ تحت جمع و ضرب اسکالر مولفه ای یک فضای برداری است. برای $۱ \leq p < \infty$ زیر فضاهای $\oplus_\infty X_i$ و $\oplus_p X_i$ از $\prod X_i$ را این گونه تعریف می کنیم.

$$\oplus_p X_i = \{x \in \textstyle\prod_i X_i :\| x \|= (\sum_{i\in I} \| x(i) \|^p)^{۱/p} < \infty\}$$

و

$$\oplus_\infty X_i = \{\| x \|= sup_i \| x(i) \|< \infty\}$$

$\oplus_\infty X_i$ را گاه با $l^\infty(X_i, I)$ نمایش می دهیم. می توان نشان داد که اگر X_i ها فضاهای باناخ باشند آن گاه $\oplus_p X_i$ و $l^\infty(X_i, I)$ فضاهای باناخ هستند.

۲.۱ جبرهای باناخ

در این بخش مفاهیم مورد نیاز از جبرهای باناخ، ایده الها، مدولها و فضای خارج قسمتی را به اختصار تشریح می کنیم.

تعریف ۱.۲.۱ فضای برداری A روی میدان F به همراه تابع ضرب $(x,y) \to xy$ از $A \times A$ به A را یک جبر گوییم هرگاه برای هر $x,y,z \in A$ و $\alpha \in F$ شرایط زیر برقرار باشد

الف) ضرب تعریف شده شرکت پذیر باشد یعنی $(xy)z = x(yz)$،

ب) $x(y+z) = xy + xz$ و $(y+z)x = yx + zx$،

ج) $(\alpha x)y = \alpha(xy) = x(\alpha y)$،

جبر A را جابجایی گوییم هرگاه A نسبت به ضرب جابجایی باشد یعنی برای هر $x,y \in A$ $xy = yx$. و A را یکدار گوییم هرگاه عنصر ناصفری که آن را با ۱ نشان می دهیم موجود باشد به طوری که برای هر $x \in A$ داشته باشیم $1x = x1 = x$.

زیرفضای خطی B از جبر A را یک زیر جبر گوییم هرگاه B نسبت به ضرب بسته باشد.

تعریف ۲.۲.۱ فضای باناخ $(A, \| . \|)$ را یک جبر باناخ گوییم در صورتی که A یک جبر باشد و برای هر $x,y \in A$ داشته باشیم $\| xy \| \leq \| x \| \| y \|$.

تعریف ۳.۲.۱ فرض کنید A و B دو جبر باناخ روی میدان F باشند. $\varphi \in B(A,B)$ را همریختی جبرهای باناخ نامیم هرگاه برای هر $x,y \in A$، $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$. وقتی φ یک به یک است آن را تکریختی و زمانی که پوشا باشد آن را برور‌یختی و هنگامی که یک به یک و پوشا باشد آن را یکریختی گوییم . جبرهای باناخ A و B را یکریخت طولپا نامیم هرگاه یک یکریختی حافظ نرم از A به روی B وجود داشته باشد که در این حالت آن را با $A \cong B$ نشان می دهیم.

تعریف ۴.۲.۱ فرض کنید A یک جبر نرمدار غیر یکدار باشد. تور $\{e_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq A$ را یک همانی تقریبی چپ (به ترتیب، راست) برای A گوییم هرگاه برای هر $a \in A$، $e_\alpha a \to a$ (به ترتیب، $ae_\alpha \to a$). اگر $\{e_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq A$ یک همانی تقریبی چپ و همانی تقریبی راست باشد آن را همانی تقریبی می نامیم. همانی تقریبی $\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ را کراندار گوییم هرگاه $\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ به عنوان زیرمجموعه ای از A کراندار باشد. در این حالت $\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ را یک همانی تقریبی کراندار می گوییم. تور$\{e_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq A$ را یک همانی تقریبی چپ (به ترتیب، راست) ضعیف گوییم، هرگاه برای هر $f \in A'$ و $x \in A$، $f(e_\alpha x) \to f(x)$ (به ترتیب، $f(xe_\alpha) \to f(x)$). واضح است که هر همانی تقریبی چپ (به ترتیب، راست) یک همان تقریبی چپ (به ترتیب، راست) ضعیف است.

تعریف ۵.۲.۱ فرض کنید A یک جبر باشد. زیر جبر I از A را یک ایده‌ال چپ(به ترتیب، راست) A گوییم هرگاه برای هر $a \in A$ و هر $x \in I$، $ax \in I$(به ترتیب، $xa \in I$). I را یک ایده آل دوطرفه A گوییم هرگاه یک ایده آل چپ و راست A باشد.

ایده آل سره چپ (به ترتیب، راست، دوطرفه) I از A را یک ایده آل بیشین چپ (به ترتیب، راست، دوطرفه) گوییم هرگاه برای هر ایده آل چپ (به ترتیب، راست، دوطرفه) دیگر مانند J که $I \subseteq J \subseteq A$ داشته باشیم $I = J$ یا $J = A$.

تعریف ۶.۲.۱ فرض کنید I یک ایده آل سره بسته از جبر باناخ A است. فضای خارج قسمتی A/I عبارت است از تمام کلاس های هم ارزی به شکل $x + I$ که $x \in A$، این فضا

تحت اعمال جمع و ضرب و ضرب اسکالر زیر به یک جبر تبدیل می شود.

$$(x+I)+(y+I)=(x+y)+I \qquad (x,y\in A)$$

$$(x+I)(y+I)=xy+I \qquad (x,y\in A)$$

$$\alpha(x+I)=\alpha x+I \qquad (\alpha\in\mathbb{C}, x\in A)$$

همچنین اگر $x+I\in A/I$، آن گاه $\parallel x+I \parallel := inf\{\parallel x+y \parallel : y\in I\}$ یک نرم روی A/I تعریف می کند. (ر.ک به ۱.۲.V.[?]).

در این حالت همچنین، A/I تبدیل به یک جبر باناخ می شود.

لازم به یادآوری است که برای هر $x,y\in A$ و $x+I=y+I$ اگر و تنها اگر $x-y\in I$.

تعریف ۷.۲.۱ فرض کنید M,A روی میدان F به ترتیب یک جبر و یک فضای برداری باشند. M را یک Aـمدول چپ گوییم هرگاه نگاشت ضرب مدولی $(a,m)\mapsto am$ از $A\times M$ به توی M دارای خواص زیر باشد.

الف) برای هر $a\in A$ نگاشت $m\mapsto am$ روی M خطی باشد.

ب) برای هر $m\in M$ نگاشت $a\mapsto am$ از A به توی M خطی باشد.

ج) برای هر $m\in M$ و $a,b\in A$، $a(bm)=(ab)m$.

در صورتی که ضرب مدولی $(a,m)\mapsto ma$ از $A\times M$ به M خواص مشابهی داشته باشد، M را یک Aـمدول راست گوییم. اگر M یک Aـمدول چپ و Aـمدول راست باشد و به علاوه برای هر $m\in M$ و هر $a,b\in A$، $(am)b=a(mb)$ آن گاه M را یک Aـمدول دوطرفه نامیم.

تعریف ۸.۲.۱ Aـمدول چپ M را یک Aـمدول چپ نرم دار نامیم هرگاه A و M فضاهایی نرم دار باشند و $k > 0$ موجود باشد که برای هر $a \in A$ و $m \in M$ داشته باشیم

$$\| am \| \leq k \| a \| \| m \| .$$

Aـمدول راست نرم دار نیز با استفاده از Aـمدول راست به طور مشابه تعریف می شود. همچنین Aـمدول دوطرفه M را یک A دو مدول نرم دار گوییم، هرگاه یک Aـمدول نرم دار چپ و Aـمدول نرم دار راست باشد. در صورتی که M یک Aـمدول چپ (به ترتیب، راست، دوطرفه) نرم دار و M فضایی باناخ باشد آن را Aـمدول چپ (به ترتیب، راست، دوطرفه) باناخ می نامیم. به عنوان مثال هر جبر باناخ A یک Aـدو مدول باناخ است و در این حالت $k = 1$.

۳.۱ حاصل ضرب تانسوری

در این بخش مفاهیمی از ضرب تانسوری فضاهای نرم دار، نرمهای روی این حاصلضرب به ویژه نرم تصویری و قضایای وابسته مورد نیاز در فصلهای آتی را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۳.۱ فرض کنیم X و Y دو فضای نرم دار روی میدان $\mathbb{F}$ و X' و Y' دوگان این فضاها باشند. فرض کنیم $x \in X$ و $y \in Y$ در این صورت تابعک دو خطی $x \otimes y$ را روی $X' \times Y'$ چنین تعریف می کنیم

$$(x \otimes y)(f,g) = f(x)g(y), \qquad\qquad (f \in X^{'}, g \in Y^{'})$$

که $x \otimes y$ را x تانسور y می خوانیم. در این صورت مجموعه

$$X \otimes Y = \{\sum_{i=۱}^{n} \alpha_i (x_i \otimes y_i) : n \in N, \alpha_i \in \mathbb{F}, x_i \in X, y_i \in Y\}$$

ضرب تانسور جبری X و Y نامیده می‌شود.

فرض کنیم $x_۱, x_۲ \in X$ و $y \in Y$، در این صورت برای هر $f \in X^{'}$ و $g \in Y^{'}$ داریم

$$\begin{aligned} ((x_۱ + x_۲) \otimes y)(f,g) &= f(x_۱ + x_۲)g(y) = f(x_۱)g(y) + f(x_۲)g(y) \\ &= (x_۱ \otimes y)(f,g) + (x_۲ \otimes y)(f,g) \end{aligned}$$

در نتیجه $(x_۱ + x_۲) \otimes y = (x_۱ \otimes y) + (x_۲ \otimes y)$. همچنین برای هر $x \in X$ و $y_۱, y_۲ \in Y$ داریم

$$x \otimes (y_۱ + y_۲) = (x \otimes y_۱) + (x \otimes y_۲).$$

حال فرض کنیم $x \in X$ و $y \in Y$ و $\alpha \in \mathbb{F}$، در این صورت برای هر $f \in X^{'}$ و $g \in Y^{'}$ داریم