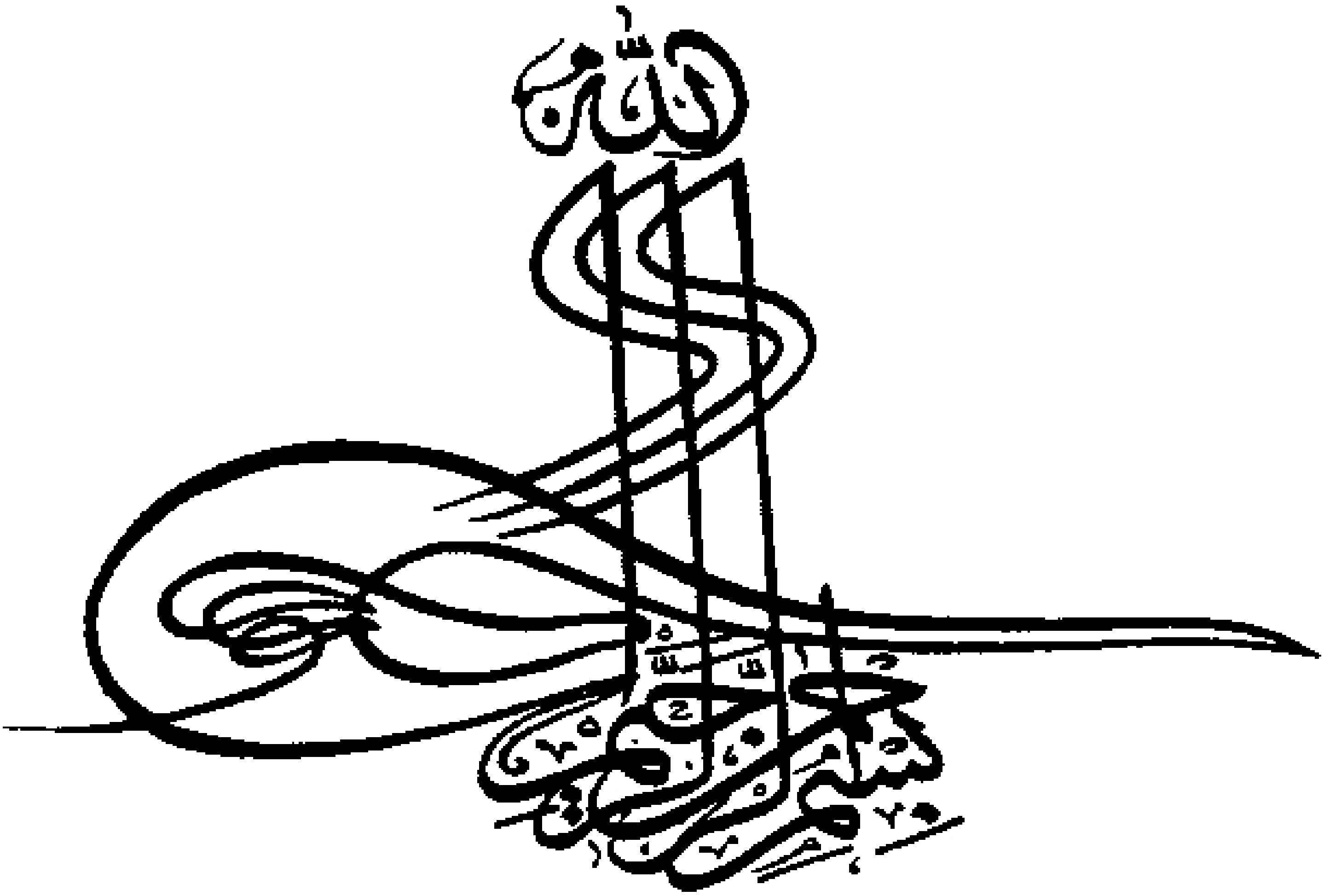
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش جبر

عنوان

گراف جابجایی گروه‌های متناهی

استاد راهنما

سید حیدر جعفری

استاد مشاور

نادر جعفری راد

پژوهشگر

زیبا توشمالانی

۱۳۹۱

نام خانوادگی دانشجو: توشمالانی | نام: زیبا

عنوان: گراف جابجایی گروه‌های متناهی

استاد راهنما: سید حیدر جعفری

استاد مشاور: نادر جعفری راد

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد | رشته: ریاضی محض | گرایش: جبر

دانشگاه: شاهرود | دانشکده علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۱ | تعداد صفحات: ۸۹

واژگان کلیدی: عدد استقلال، عدد خوشه، عدد رنگی، قطر گراف، گراف جابجایی، گراف دو مؤلفه‌ای، گروه دووجهی، گروه کواترنیون تعمیم یافته، گروه متقارن.

چکیده

در این پایان‌نامه، که از مراجع [۶]، [۱۵]، [۱۸] و [۱۹] تهیه شده است، ابتدا مفهوم گراف جابجایی گروه‌های متناهی را بیان می‌کنیم. سپس به بررسی گراف جابجایی گروه‌های D_{2n}، Q_n و S_n می‌پردازیم. با بیان ویژگی‌های معینی از گراف جابجایی گروه‌های دووجهی و کواترنیون تعمیم یافته،عدد خوشه، عدد استقلال و عدد پوششی این گراف‌ها را به دست می‌آوریم.

در پایان هر قسمت با استفاده از قضایا و نتایجی که همبند یا ناهمبند بودن گراف جابجایی گروه‌های D_{2n}، Q_n و S_n را مشخص می‌کنند، قطر (یا کرانی از قطر) گراف جابجایی روی زیر مجموعه‌های معینی از گروه‌های مذکور را به دست می‌آوریم.

جانی که من گرفتم تا درس را بخوانم

از روح پاک مادر رفته در استخوانم

صبر و دعای او تا همراه من روان شد

عقل و خرد بتازد بر ذهن و بر زبانم

روح کلام خود را از مهر تو گرفتم

بی کوه استواری چون تو پدر نمانم

این تکه های کاغذ محصول عمر من شد

ناقابل است تقدیم بر تکه های جانم

گر قطره قطره بوده افکار کوچک من

استاد ره نمایاند دریای بی کرانم

تقدیم می نمایم بر زحمت دو سالی

که علم بی دریغش بخشید رایگانم

خدایا...[1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

اگر تنهاترین تنهاشوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

---

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر جعفری، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر جعفری راد که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

زیبا توشمالانی

۱۳۹۱

فهرست مطالب

فصل ۱

پیشینه پژوهش و تعاریف مقدماتی

۱.۱ مقدمه

گراف جابجایی گروه متناهی G، که آن را با $\mathtt{C}(G, X)$ نشان می‌دهیم، به این صورت تعریف می‌شود که رأس‌های این گراف زیرمجموعه‌ی X از G است و دو رأس متمایز x و y به هم وصل می‌شوند اگر $xy = yx$.

مفهوم گراف جابجایی برای رده‌ی وسیعی از گروه‌ها و زیر مجموعه‌های متنوعی از آن‌ها مورد مطالعه قرار گرفته است. به ویژه بررسی گراف جابجایی گروه متقارن، زمانی که X یک رده‌ی تزویج از G است، توجه بسیاری از محققان را به خود جلب نموده است. براور و همکاران [۱] (۱۹۵۵)، به بررسی گراف جابجایی گروه‌هایی از مرتبه‌ی عددی زوج پرداختند. فیشر [۲] و برند [۳] (۱۹۷۱)، گراف جابجایی گروه‌های متناهی تولید شده به وسیله‌ی حاصل ضرب سه ترانهش را معرفی کردند و به مطالعه آن‌ها پرداختند. سگو و همکاران [۴] (۲۰۰۲)، گراف جابجایی گروه‌های متناهی ساده و گروه‌های نا ایزوتروپ از نوع A_n را بررسی کردند. بیت و همکاران [۵] (۲۰۰۳)، (۲۰۰۴) و (۲۰۰۷)، کار فیشر را ادامه داده و حالت‌های کلی‌تر این گراف‌ها، گراف اینولوشن، را مورد بررسی قرار دادند. اکبری [۶]و عبداللهی[۷] (۲۰۰۶)، گراف جابجایی گروه‌های خطی خاص و عام را مورد مطالعه قرار دادند. باندی[۸] (۲۰۰۶)، همبندی گراف جابجایی گروه متقارن را به طور کامل مورد مطالعه قرار داده و قضایای مربوط به آن را بیان و اثبات نموده است، که در این پایان‌نامه با استفاده از آن قطر گراف‌های همبند از S_n را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

تعاریف و قضایای (مربوط به گراف) به کار رفته در این قسمت از مرجع [۷]، گرفته شده‌اند.

گراف Γ، یک سه‌تایی مرتب $(V(\Gamma), E(\Gamma), \psi(\Gamma))$ است که تشکیل شده از یک مجموعه‌ی ناتهی $V(\Gamma)$ از رأس‌ها، یک مجموعه‌ی $E(\Gamma)$ از یال‌ها و یک تابع وقوع $\psi(\Gamma)$ که به هر یال Γ، یک زوج نامرتب از رأس‌های Γ را نسبت می‌دهد.

---
[۱] Brauer
[۲] Fischer
[۳] Bernd
[۴] Segev
[۵] Bate
[۶] Akbari
[۷] Abdollahi
[۸] Bundy

تعریف ۱.۱.۱. یک گراف، ساده است، اگر هیچ طوقه‌ای نداشته باشد و بین هر دو رأس آن، بیش از یک یال نباشد.

از این به بعد گراف‌ها را ساده و بدون جهت در نظر می‌گیریم.برای هر گراف دلخواه Γ مجموعه‌ی رئوس و یال‌های Γ را به ترتیب با $V(\Gamma)$ و $E(\Gamma)$ نمایش می‌دهیم. درجه رأس v در Γ، $d_\Gamma(v)$، برابر تعداد یال‌های واقع بر v است. کمترین و بیشترین درجه‌ی رأس‌های Γ را به ترتیب با $\delta(\Gamma)$ و $\Delta(\Gamma)$ نشان می‌دهیم. مرتبه Γ تعداد رأس‌های Γ است و با $|V(\Gamma)|$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۱. گراف‌های $\Gamma_۱$ و $\Gamma_۲$، یکریخت نامیده می‌شوند (و نوشته می‌شود $\Gamma_۱ \cong \Gamma_۲$)، اگر نگاشت‌های دوسویی $\theta : V(\Gamma_۱) \longrightarrow V(\Gamma_۲)$ و $\phi : E(\Gamma_۱) \longrightarrow E(\Gamma_۲)$ وجود داشته باشند، به طوری که داشته باشیم: $\psi_{\Gamma_۱}(e) = uv$، اگر و تنها اگر $\psi_{\Gamma_۲}(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$. که یال e رأس‌های u و v را به یکدیگر وصل کرده است.

تعریف ۳.۱.۱. می‌گوئیم گراف Λ، زیرگراف Γ است (نوشته می‌شود $\Lambda \subseteq \Gamma$)، اگر $V(\Lambda) \subseteq V(\Gamma)$، $E(\Lambda) \subseteq E(\Gamma)$ و $\psi(\Lambda)$ از محدود کردن $\psi(\Gamma)$ به $E(\Lambda)$ حاصل شده باشد.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید V'، یک زیر مجموعه‌ی ناتهی از $V(\Gamma)$ باشد. زیرگرافی از Γ که مجموعه‌ی رأس‌های آن V' و مجموعه‌ی یال‌هایش برابر مجموعه‌ی همه‌ی یال‌هایی از Γ باشد که هر دو سر آن‌ها در V' واقع است، زیر گراف القا شده توسط V' نامیده شده و با $\Gamma[V']$ نمایش داده می‌شود. همچنین می‌گوئیم $\Gamma[V']$ یک زیرگراف القایی Γ است.

تعریف ۵.۱.۱. دنباله‌ی ناتهی $W = v_۰e_۱v_۱e_۲v_۲\ldots e_kv_k$ که جمله‌های آن به طور متناوب رأس‌ها و یال‌ها هستند را یک مسیر گوئیم هرگاه یال‌های $e_۱$، …، e_k و رأس‌های $v_۰$، …، v_k متمایز باشند. که برای $۱ \leq i \leq k$، دو انتهای e_i، $v_{i-۱}$ و v_i هستند. رأس‌های $v_۰$ و v_k را به ترتیب مبدأ و انتهای W و $v_۱$، …، $v_{k-۱}$ را رأس‌های داخلی آن می‌نامند. عدد صحیح k طول W است و یک مسیر به طول k را با P_k نمایش می‌دهیم.

تعریف ۶.۱.۱. گراف Γ را همبند گویند هرگاه بین هر دو رأس دلخواه u و v از Γ، مسیری در Γ موجود باشد. درغیراین‌صورت Γ را ناهمبند نامند.

تعریف ۷.۱.۱. اگر u و v در Γ همبند باشند، فاصله‌ی بین u و v در Γ، که با $d_\Gamma(u,v)$ نشان می‌دهیم،طول کوتاه‌ترین مسیر بین u و v در Γ است. بیشترین فاصله‌ی بین دو رأس Γ، را قطر Γ نامیم و با $diam(\Gamma)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۸.۱.۱. برای هر $x \in V(\Gamma)$ و هر $i \in \mathbb{N}$، $\Delta_i(x) = \{y \in V(\Gamma) : d(y,x) = i\}$، را i امین دیسک x می‌نامیم.

تعریف ۹.۱.۱. مسیری که دارای طول مثبت بوده و مبدأ و انتهای آن یکی باشد را یک دور گوئیم و دوری به طول k را با C_k نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۰.۱.۱. گرافی که هر دو رأس متمایز آن مجاور باشد را گراف کامل گوئیم. گراف کامل با n رأس را با K_n نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۱.۱.۱. گراف Γ را n –منتظم می‌نامیم هر گاه درجه تمام رئوس آن برابر n باشد و گراف یک منتظم با n رأس، که به صورت کپی‌هایی از $K_۲$ باشد را با $\frac{n}{۲}K_۲$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۲.۱.۱. فرض کنیم Γ یک گراف باشد زیر مجموعه Λ از رئوس Γ را یک خوشه گوئیم هر گاه زیر گراف القایی از Λ یک گراف کامل باشد و مجموعه‌ی رئوس Λ، $V(\Lambda)$، را یک مجموعه‌ی کامل می‌نامیم. ماکزیمم اندازه یک خوشه در Γ، را عدد خوشه‌ای Γ نامیم و با $\omega(\Gamma)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۳.۱.۱. گراف Γ را $k-$ رنگ پذیر گوئیم، در صورتی که بتوان هر یک از k رنگ را به یکی از رئوس آن تخصیص داد، بطوریکه هیچ دو رأس مجاور همرنگ نباشند. اگر Γ با کمتر از k رنگ قابل رنگ آمیزی نباشد، Γ را $k-$ رنگی می‌گوئیم، یا بطور معادل گوئیم عدد رنگی Γ یعنی $\chi(\Gamma)$ برابر k است.

تعریف ۱۴.۱.۱. زیر مجموعه S از $V(\Gamma)$ را یک مجموعه‌ی مستقل می‌نامیم هر گاه هیچ دو رأسی از S در Γ مجاور نباشند. ماکزیمم اندازه از S را عدد استقلال Γ گوییم و با $\alpha(\Gamma)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۱۵. گراف Γ را دومؤلفه‌ای گوئیم هر گاه افرازی مانند $V = S + K$ از مجموعه‌ی رئوس Γ وجود داشته باشد بطوریکه، S مجموعه‌ای مستقل و K مجموعه‌ای کامل باشد.

تعریف ۱.۱.۱۶. زیر مجموعه‌ی M از $E(\Gamma)$ را یک تطابق می‌نامیم اگر هیچ دو یال پیوندی (یالی که دو رأس متمایز را به هم وصل می‌کند)، در آن رأس مشترک نداشته باشند.تطابق M را کامل گوئیم اگر هر رأس Γ بر یالی از M واقع باشد.

تعریف ۱.۱.۱۷. گراف Γ را دو بخشی گوئیم، هرگاه مجموعه رئوس آن را بتوان به دو قسمت X و Y افراز کرد بطوریکه هر یال یک انتها در X و یک انتها در Y داشته باشد.چنانچه هر رأس از X به هر رأس از Y وصل باشد Γ را گراف کامل دو بخشی نامیم و معمولا با $K_{r,s}$ نشان می‌دهیم، که در آن r و s به ترتیب تعداد رئوس در X و Y است.

تعریف ۱.۱.۱۸. یک پوشش گراف Γ زیر مجموعه‌ی K از $V(\Gamma)$ است، به طوریکه هر یال Γ دارای حداقل یک انتها در K باشد.تعداد رأس‌ها در مینیمم پوشش Γ را عدد پوششی Γ نامیم و با $\beta(\Gamma)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۱۹. ضرب حلقوی گراف‌های Γ_1 و Γ_2 که با $\Gamma_1[\Gamma_2]$ نشان می‌دهیم، دارای مجموعه رأس‌های $\{(x,y)|x \in V(\Gamma_1), y \in V(\Gamma_2)\}$ ومجموعه یال‌های

$$\{\{(x_1,y_1),(x_1,y_2)\} \mid \{y_1,y_2\} \in E(\Gamma_2)\} \cup \{\{(x_1,y_1),(x_2,y_2)\} \mid \{x_1,x_2\} \in E(\Gamma_1)\}$$

است.

تعریف ۱.۱.۲۰. برای هر زیر مجموعه‌ی ناتهی Ω از گروه G، مرکز ساز Ω در G مجموعه‌ای از عناصر G است که با هر عضو Ω جابجا می‌شوند و با $C_G(\Omega)$ نشان می‌دهیم. همچنین مرکز گروه G را با $Z(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۲۱. اگر یک n- ضلعی منتظم را در یک صفحه در نظر بگیریم، آنگاه توسط n دوران حول مرکز n- ضلعی به اندازه $\frac{2k\pi}{n}$ رادیان، برای $k \in \{1,2,\ldots,n\}$، در جهت خلاف عقربه‌های ساعت و n انعکاس نسبت به n محور تقارن n- ضلعی، می‌توان n- ضلعی را بر خودش منطبق نمود. مجموعه‌ی تمام این دوران‌ها و

انعکاس‌ها همراه با عمل ترکیب توابع، تشکیل یک گروه به نام گروه تقارن‌های یک n- ضلعی منتظم می‌دهد که با D_{2n} نمایش می‌دهیم. D_{2n} را n- امین گروه دووجهی نیز می‌نامیم.

تعریف ۲۲.۱.۱. فرض کنید H یک زیرگروه G باشد. زیر مجموعه‌ی T از G را یک تراگرد راست H در G می‌نامیم در صورتی که T فقط یک عضو از هر همدسته راست H را شامل باشد.

تعریف ۲۳.۱.۱. فرض کنید $G = Sym(\Omega)$ که $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$، در این صورت G را گروه متقارن روی n حرف می‌نامیم و برای هر $g \in G$، ساپورت (محمل) g، مجموعه‌ی نقاطی از Ω است که به وسیله‌ی g ثابت نگه داشته نشوند و با $supp(g)$ نمایش می‌دهیم. $Fix(g)$ مجموعه نقاطی از Ω است که به وسیله‌ی g ثابت نگه داشته می‌شوند.

تعریف ۲۴.۱.۱. فرض کنیم σ یک جایگشت مجموعه‌ی $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$ باشد.رده‌ی هم ارزی در Ω معین شده با رابطه‌ی هم ارزی

$$\forall \quad a, b \in \Omega \qquad a \sim b \Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} \quad s.t \quad b = \sigma^n(a).$$

مدارهای σ هستند و می‌نویسم $orb_\sigma(a) = \{\sigma^n(a) : n \in \mathbb{Z}\}$.

تعریف ۲۵.۱.۱. جایگشت $\sigma \in S_n$ را یک دور می‌نامیم اگر دارای حداکثر یک مدار شامل بیش از یک عنصر باشد. طول یک دور تعداد عناصر در بزرگترین مدار آن است. یک دور به طول r را با $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲۶.۱.۱. گروه G و مجموعه‌ی ناتهی X را درنظر بگیرید. فرض کنید به‌ازای هر g از G و هر x از X، عضو یکتایی از X که آن را با علامت $x \bullet g$ نشان می‌دهیم وجود داشته باشد به‌طوری‌که

(۱) به‌ازای هر x از X، $x \bullet 1 = x$، و

(۲) به‌ازای هر g_1 و g_2 از G و هر x از X، $(x \bullet g_1) \bullet g_2 = x \bullet (g_1 g_2)$.

دراین‌صورت گوئیم G بر X عمل می‌کند و $\bullet$ را عمل G بر X گویند. برای سهولت در نوشتن، به‌جای $x \bullet g$ از xg استفاده می‌کنیم.

تعریف ۲۷.۱.۱. فرض کنید گروه G بر مجموعه‌ی X عمل کند و $g \in G$ و $x \in X$. گوئیم g عضو (یا نقطه‌ی) x را ثابت نگه می‌دارد هرگاه $xg = x$. مجموعه‌ی اعضایی از G را که هر عضو X را ثابت نگه‌می‌دارد، هسته‌ی عمل می‌نامند.

تعریف ۲۸.۱.۱. فرض کنید گروه G بر مجموعه‌ی ناتهی X عمل کند و $x \in X$، دراین‌صورت مجموعه‌ی $\{g \in G \mid xg = x\}$ را پایدارساز x در G می‌نامند و با علامت $St_G(x)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۲۹.۱.۱. فرض کنید گروه G بر مجموعه X عمل کند. رابطه‌ی $\sim$ را در X چنین تعریف می‌کنیم: گوییم $x_1 \sim x_2$ درصورتی‌که به ازای عضوی از G مانند g، $x_1 g = x_2$. رابطه‌ی $\sim$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی در X است. هر رده‌ی هم‌ارزی را یک مدار عمل، یا گاهی از اوقات یک G-مدار، می‌نامیم. اگر $x \in X$ آنگاه رده هم‌ارزی شامل x را مدار x در G می‌نامیم و آن را با علامت $Orb_G(x)$ (یا مختصرا با $Orb(x)$) نشان می‌دهیم. با توجه به تعریف فوق، $Orb_G(x) = \{xg \mid g \in G\}$. بر طبق خواص رده‌های هم‌ارزی، معلوم می‌شود که مدارها افرازی از Xاند و در نتیجه هر دو مدار متمایز از هم جدا هستند و اجتماع آنها برابر با X است. در صورتی که $Orb_G(x)$ مجموعه‌ای متناهی باشد، عده‌ی اعضای آن را طول مدار x در G می‌نامیم.

قضیه ۳۰.۱.۱. فرض کنید گروه G بر مجموعه‌ی X عمل کند. برای هر g از G، تابع $\varphi_g : X \longrightarrow X$ را با ضابطه‌ی $x\varphi_g = xg$ تعریف می‌کنیم. دراین‌صورت $\varphi_g \in S_x$ و نگاشت $\varphi : G \longrightarrow S_x$ با ضابطه‌ی $g \longmapsto \varphi_g$ یک همریختی است که هسته‌ی آن با هسته‌ی عمل برابر است.

قضیه ۳۱.۱.۱. **(مدار-پایدارساز)** فرض کنید گروه G بر مجموعه‌ی X عمل کند و $x \in X$. دراین‌صورت، تناظری یک‌به‌یک بین $Orb(x)$ و مجموعه‌ی همه‌ی همدسته‌های راست $St(x)$ در G وجود دارد. بالاخص اگر $Orb(x)$ متناهی باشد آنگاه $|G : St(x)| = |Orb(x)|$.

لم ۳۲.۱.۱. فرض کنیم $S \subseteq V(\Gamma)$. در این صورت S مستقل است، اگر وتنها اگر $V \setminus S$ یک پوشش از Γ باشد.

برهان. بنابر تعریف، S یک مجموعه مستقل از Γ است اگر و تنها اگر هر دو انتهای هیچ یالی از Γ در S نباشد و یا هم ارز آن، اگر و تنها اگر هر یال دارای حداقل یک انتها در $V \setminus S$ باشد. اما این مطلب درست است اگر و تنها اگر $V \setminus S$ پوشش Γ باشد. □

لم ۳۳.۱.۱. فرض کنید Γ یک گراف باشد. در این صورت $\alpha(\Gamma) + \beta(\Gamma) = n(\Gamma)$.

برهان. فرض کنید S مجموعه مستقل ماکسیمم و K پوشش مینیمم Γ باشد. در این‌صورت بنابر لم قبل، $V \setminus K$ یک مجموعه مستقل و $V \setminus S$ یک پوشش برای Γ است، لذا $n(\Gamma) - \beta(\Gamma) = |V \setminus K| \leq \alpha(\Gamma)$ همچنین،

$$n(\Gamma) - \alpha(\Gamma) = |V \setminus S| \geq \beta(\Gamma) \Rightarrow n(\Gamma) - \beta(\Gamma) \geq \alpha(\Gamma) \Rightarrow n(\Gamma) - \beta(\Gamma) = \alpha(\Gamma) \Rightarrow$$

$$\alpha(\Gamma) + \beta(\Gamma) = n(\Gamma).$$

□

فصل ۲

گراف جابجایی گروه‌های D_{2n} و Q_n

۱.۲ مقدمه

این فصل شامل دو بخش است، که در آن به معرفی گراف جابجایی گروه‌های D_{2n} و Q_n، می‌پردازیم و قضایا و نتایجی را در مورد این مفهوم بیان و اثبات می‌نمائیم. در بخش اول، ساختار گراف جابجایی $\mathfrak{C}(G, G-Z(G))$، که در آن G یکی از گروه‌های مذکور است، را مورد مطالعه قرار داده و عدد استقلال، عدد خوشه و عدد پوششی آن را به دست می‌آوریم. در بخش دوم، به بررسی گراف جابجایی $\mathfrak{C}(D_{2n}, \Omega)$، به صورت کلی‌تر می‌پردازیم. سپس پارامترهایی مانند عدد خوشه، عدد رنگی، قطر و ... را برای این گراف‌ها به دست می‌آوریم.

۲.۲ خواص اساسی گراف جابجایی با مجموعه‌ی رئوس $G-Z(G)$

در این بخش، که از مرجع [۱۹] آورده‌ایم، گراف جابجایی $\mathfrak{C}(G, X)$، دارای مجموعه‌ی رئوس $X = G - Z(G)$ است. دو رأس متمایز x و y با یک یال به هم وصل می‌شوند، هرگاه $xy = yx$. $\mathfrak{C}(G, X)$ را با $\Gamma(G)$ نمایش می‌دهیم. گروه دووجهی و گروه کواترنیون تعمیم یافته را به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$D_{2n} =< a, b | a^n = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} >$$

و

$$Q_n =< c, d | d^4 = c^{2^{n-1}} = 1, d^2 = c^{2^{n-2}}, d^{-1}cd = c^{-1} > .$$

فرض کنید $[G : Z(G)] = m$، $m \geq 4$، و $T = \{1, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}\}$ یک تراگرد $Z(G)$ در G باشد. به وضوح هر دو عنصر از همدست $x_iZ(G)$، $1 \leq i \leq m-1$، با هم جابجا می‌شوند.بنابراین هر دو عنصر از این همدست به هم متصل می‌شوند. زیرگراف القایی $\Gamma^u(G)$ از گراف جابجایی $\Gamma(G)$ را طوری در نظر می‌گیریم، که مجموعه رأس‌های آن $T - 1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}\}$ باشد.

قضیه ۱.۲.۲. فرض کنید G یک گروه ناآبلی باشد. در این صورت $\Gamma(G) \cong \Gamma^u(G)[K_l]$، که در آن $l = |Z(G)|$.

برهان. فرض کنیم $Z(G) = \{a_1, a_2, \ldots, a_l\}$، و $T = \{1, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}\}$ یک تراگرد از $Z(G)$ در G باشد، در این صورت $G = \cup_{i=1}^{m-1} x_iZ(G) \cup Z(G)$. بنابر تعریف $V(\Gamma(G)) = G - Z(G)$، لذا

$V(\Gamma(G))=\cup_{i=1}^{m-1}x_iZ(G)$، که در آن برای هر i، $1\leq i\leq m-1$، $x_iZ(G)=\{x_ia_1,x_ia_2,\ldots,x_ia_l\}$. قرار می‌دهیم $V(K_l)=\{1,2,\ldots,l\}$. برای هر i و j، که $1\leq i\leq m-1$ و $1\leq j\leq l$، نگاشت φ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\varphi : V(\Gamma(G))\longrightarrow V(\Gamma^u(G)[K_l])$$

$$x_ia_j\longmapsto (x_i,j)$$

φ خوش تعریف است زیرا

$$x_ia_j=x_ka_t\Longrightarrow x_ia_j,x_ka_t\in x_iZ(G)\Longrightarrow x_i=x_k\Longrightarrow a_j=a_t$$

$$\Longrightarrow j=t\Longrightarrow (x_i,j)=(x_k,t)\Longrightarrow \varphi(x_ia_j)=\varphi(x_ka_t).$$

اگر $\varphi(x_ia_j)=\varphi(x_ka_t)$، آنگاه $(x_i,j)=(x_k,t)$. لذا $x_i=x_k$ و $j=t$. در نتیجه $x_ia_j=x_ka_t$. بنابراین φ یک به یک است.

به ازای هر $(x_i,j)\in V(\Gamma^u(G)[K_l])$، $a_j\in Z(G)$ وجود دارد که $\varphi(x_ia_j)=(x_i,j)$، لذا φ پوشا نیز هست. بنابراین φ دو سویی است.

به ازای هر $x_ia_j,x_ka_t\in V(\Gamma(G))$، اگر x_ia_j و x_ka_t متعلق به یک همدست باشند، آنگاه $x_i=x_k$، و چون K_l گراف کامل است پس $j,t\in E(K_l)$. بنابراین

$$\{x_ia_j,x_ka_t\}\in E(\Gamma(G))\Longleftrightarrow \{(x_i,j),(x_k,t)\}\in E(\Gamma^u(G)[K_l]).$$

حال فرض کنیم x_ia_j و x_ka_t در دو همدسته‌ی متمایز باشند. در این صورت

$$\{x_ia_j,x_ka_t\}\in E(\Gamma(G))\Longleftrightarrow x_ia_jx_ka_t=x_ka_tx_ia_j\Longleftrightarrow$$

$$x_ix_ka_ja_t=x_kx_ia_ja_t\Longleftrightarrow x_ix_k=x_kx_i\Longleftrightarrow$$

$$\{x_i,x_k\}\in E(\Gamma(G))\Longleftrightarrow \{(x_i,j),(x_k,t)\}\in E(\Gamma^u(G)[K_l]).$$

بنابراین $\Gamma(G)\cong\Gamma^u(G)[K_l]$. □

لم ۲.۲.۲. فرض کنید G یک گروه متناهی ناآبلی باشد. در این صورت $\omega(\Gamma(G)) = \omega(\Gamma^u(G))|Z(G)|$.

برهان. فرض می‌کنیم A خوشه‌ای برای $\Gamma^u(G)$ باشد که $|A| = \omega(\Gamma^u(G))$. در این صورت برای هر دو همدست $xZ(G)$ و $yZ(G)$ که $x, y \in A$، اگر $a \in xZ(G)$ و $b \in yZ(G)$ باشد آنگاه $ab = ba$. لذا a و b در $\Gamma(G)$ مجاورند. بنابراین $X = \cup_{x\in A} xZ(G)$ خوشه‌ای از $\Gamma(G)$ است. در نتیجه

$$\omega(\Gamma(G)) \geq |X| = |A||Z(G)| = \omega(\Gamma^u(G))|Z(G)| \tag{۱.۲}$$

حال فرض می‌کنیم A' خوشه‌ای برای $\Gamma(G)$ باشد که $|A'| = \omega(\Gamma(G))$. برای هر i، $1 \leq i \leq m-1$، اگر $A' \cap x_iZ(G) \neq \emptyset$ آنگاه $x \in A' \cap x_iZ(G)$ وجود دارد که $x = x_ia_j$، $a_j \in Z(G)$، و برای هر $b \in A'$، $xb = bx$. لذا

$$x_ia_jb = bx_ia_j \Longrightarrow a_jx_ib = a_jbx_i \Longrightarrow x_ib = bx_i \tag{۲.۲}$$

اکنون برای هر $y \in x_iZ(G)$، $a \in Z(G)$ یی وجود دارد که $y = x_ia$، لذا با استفاده از (۲.۲)، داریم:

$$\forall b \in A' \quad yb = x_iab = x_iba = bx_ia = by \Longrightarrow y \in A' \Longrightarrow x_iZ(G) \subseteq A'.$$

در نتیجه $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k} \in T \setminus \{1\}$ وجود دارند که

$$A' = \cup_{j=1}^{k} x_{ij}Z(G) \Rightarrow |A'| = k|Z(G)|$$

همچنین، $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}\}$ خوشه‌ای از $\Gamma^u(G)$ است. بنابراین $\omega(\Gamma^u(G)) \geq k$ در نتیجه

$$\omega(\Gamma(G)) = |A'| = k|Z(G)| \leq \omega(\Gamma^u(G))|Z(G)|$$

بنابراین از (۱.۲) و (۲.۲) نتیجه می‌گیریم که

$$\omega(\Gamma(G)) = \omega(\Gamma^u(G))|Z(G)|.$$

□