بِسْمِ اللهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمْ

٣١٨١٨

دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر - بخش ریاضی

پایان‌نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی‌ارشد ریاضی کاربردی

تحت عنوان:

بررسی رفتار تابع Hat

استاد راهنما:

دکتر محمود محسنی‌مقدم

مولف :

محمدعلی مس‌فروش

بهمن ماه ۱۳۷۶

بسمه تعالی

این پایان‌نامه

به عنوان یکی از شرایط احراز درجه کارشناسی ارشد

به

بخش ریاضی ـ دانشکده ریاضی و کامپیوتر

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی‌شود.

دانشجو : محمدعلی مس‌فروش

استاد راهنما: دکتر محمود محسنی مقدم

داور ۱ : دکتر رستم ثابتی

داور ۲ : دکتر عباس سالمی

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه: آقای دکتر ناصح‌زاده

دانشگاه شهید باهنر کرمان اداره تحصیلات تکمیلی

تقدیم به

پدر

مادر

و همسرم

تشکر و قدردانی

خدای را سپاس که نعمت آموختن قطره‌ای از اقیانوس بی‌کران علم را به من ارزانی داشت. در آغاز برخود فرض می‌دانم که از یکایک اعضای خانواده‌ام به ویژه پدر، مادر و همسرم که همواره مشوق من بودند تشکر کنم.

از استاد گرانقدر جناب آقای دکتر محسنی که در طول دوران تحصیل خود از وجود ایشان بهره‌های فراوان برده‌ام کمال تشکر را دارم.

از آقایان دکتر ثابتی و دکتر سالمی که زحمت مطالعه و داوری این رساله را تقبل کردند سپاسگذارم و در پایان از خانمها باقری و مانی که تایپ این رساله را به انجام رساندند متشکرم.

محمدعلی مس‌فروش

دیماه ۱۳۷۶

چکیده

این رساله از سه فصل تشکیل شده است.

در فصل اول تعدادی از تعاریف و قضایای مقدماتی آمده است که در سراسر رساله مورد استفاده قرار گرفته است.

در فصل دوم سعی شده است که با ارائه یک مدل ساده از ورزدادن خمیر به نظریه آشوب وارد شد و سپس با مدل‌بندی کردن ورزدادن خمیر تابع Hat معرفی شده است.

در فصل سوم ابتدا به تعریف اصطلاحات کلیدی نظریه آشوب پرداخته شده است و این فصل با مطالعه رفتار تابع Hat به پایان رسیده است.

فهرست مطالب

فصل ۱

پیشنیازهای ریاضی

تعریف ۱_۱: فرض کنید که X یک مجموعه ناتهی باشد. گردایه τ از زیر مجموعه‌های X یک توپولوژی روی X گفته می‌شود هرگاه τ دارای خواص زیر باشد:

۱_ $X \in \tau$ و $\emptyset \in \tau$.

۲_ اگر U و V متعلق به τ باشند آنگاه $U \cap V$ متعلق به τ باشد.

۳_ اگر $\{V_i : i \in I\}$ خانواده‌ای از اعضای τ باشد آنگاه

$$\bigcup_{i \in I} V_i \in \tau.$$

تعریف ۱_۲: اگر τ یک توپولوژی روی X باشد آنگاه به (X, τ) یک فضای توپولوژیکی گویند.

در یک فضای توپولوژیکی تعاریف مقدماتی زیر را داریم:

تعریف ۱_۳: اگر (X, τ) یک فضای توپولوژیکی باشد آنگاه به اعضای توپولوژی τ مجموعه‌های باز گویند.

تعریف ۱_۴: نقطه $x \in X$ یک نقطه بستاری برای مجموعه A گفته می‌شود هرگاه هر همسایگی V از x شامل حداقل یک نقطه از A باشد. مجموعه تمام نقاط بستاری A را با $\overline{A}$ نمایش می‌دهند. بدیهی است که:

$$A \subset \overline{A}$$

به عبارت دیگر $\overline{A}$ کوچکترین مجموعه بسته‌ای است که شامل A می‌باشد.

قضیه ۱_۵: فرض کنید که X یک فضای توپولوژیکی باشد و A و B دو زیر مجموعه از X باشند در اینصورت گزاره‌های زیر برقرارند:

۱) اگر $A \subset B$ آنگاه $\overline{A} \subset \overline{B}$.

۲) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

۳) A یک مجموعه بسته است اگر و فقط اگر $A = \overline{A}$.

تعریف ۱ـ۶: فرض کنید که X یک فضای توپولوژیکی و A زیر مجموعه‌ای از X باشد در اینصورت A در X چگال است هرگاه:

$$\overline{A} = X\cdot$$

تعریف ۱ـ۷: اگر X یک فضای توپولوژیکی باشد و A زیر مجموعه X باشد آنگاه درون A را با $\mathring{A}$ نمایش می‌دهند و به شکل زیر تعریف می‌کنند:

$$\mathring{A} = \{x \in X : V \subseteq A \text{ یک‌همسایگی } V \text{ از } x \text{ موجودباشدبه‌قسمی‌که}\}$$

به اعضای $\mathring{A}$ نقاط درونی گویند.

تعریف ۱ـ۸: فرض کنید X یک فضای توپولوژیکی و A یک زیر مجموعه X باشد در اینصورت به A هیچ‌جا چگال گویند هرگاه:

$$(\mathring{\overline{A}}) = \emptyset\cdot$$

تعریف ۱ـ۹: دنباله $\{x_n\}$ از فضای متریک X را دنباله کوشی می‌گویند هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$، n_0 ی موجود باشد به قسمی که برای هر $n, m > n_0$

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon\cdot$$

تعریف ۱ـ۱۰: فضای متریک X را جدائی‌پذیر گویند هرگاه شامل زیر مجموعه چگال شمارش‌پذیری باشد.

قضیه ۱ـ۱۱: اگر X یک فضای متری تام باشد آنگاه اشتراک هر تعداد از گردایه‌های باز چگال در X نیز در X چگال است.

تعریف ۱ـ۱۲: یک مجموعه را از نوع G_δ گویند هرگاه به شکل اشتراک تعداد شمارائی از مجموعه‌های باز باشد.

تعریف ۱ـ۱۳: فرض کنید که X یک مجموعه باشد. یک پایه توپولوژی‌ای در X گردایه‌ای است از زیر مجموعه‌های X به طوری که:

۱) به ازای هر $x \in X$، حداقل یک عضو پایه مانند B شامل x موجود است.

۲) اگر x متعلق به مقطع دو عضو پایه مانند $B_۱$ و $B_۲$ باشد آنگاه عضوی از پایه مانند $B_۳$ موجود است به طوری که:

$$x \in B_۳ \quad , \quad B_۳ \subset B_۱ \cap B_۲.$$

قضیه ۱ـ۱۴: اگر X یک فضای متری تام باشد آنگاه اشتراک شمارائی از گردایه‌های باز چگال از X در X چگال است.

فصل ۲

مقدمه‌ای بر نظریه آشوب

۲_۱ مقدمه

عموماً بحث کردن پیرامون نظریه آشوب کار ساده‌ای نیست، اما در مدلهای خاصی که در آنها دو عمل به طور تکراری انجام می‌شوند راههای جالبی وجود دارد که بوسیله آن می‌توان مفهوم واقعی رفتار آشوبی را درک کرد.

از آنجائیکه برای اکثر حالات مورد نظر یک تعریف عمومی و کاربردی از آشوب موجود نمی‌باشد لذا ریاضیدانان با در نظر گرفتن سه ویژگی برای توابعی که رفتار آشوبی دارند آغاز می‌کنند. این سه ویژگی عبارتند از:

۱ـ حساس بودن انتخاب نقاط شروع.

۲ـ اختلاط.

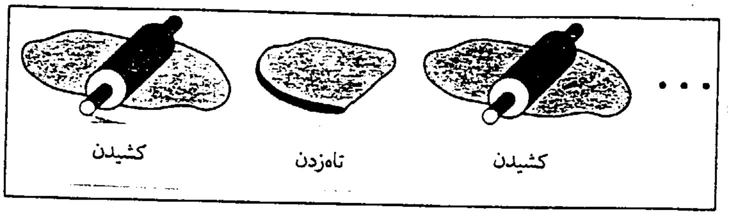
۳ـ متراکم بودن نقاط تناوبی.

که در ادامه با مثالهائی به شرح هر یک از سه ویژگی مطروحه خواهیم پرداخت.

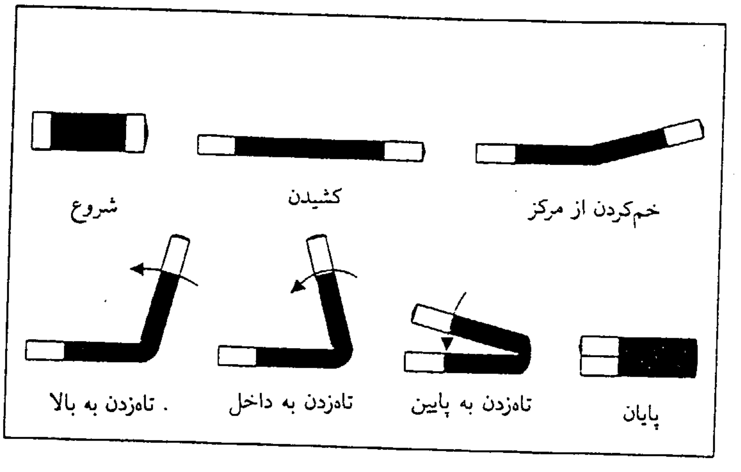
مسئله ورزدادن خمیر یکی از مدلهائی است که به کمک آن می‌توان خواص ریاضی ارائه شده در فوق را مورد بررسی قرار داد.

از آنجا که عمل ورزدادن خمیر به صورتی انجام می‌شود، که همیشه دوکار به طور تکراری انجام می‌شوند لذا می‌توان ساختار رفتار آشوبی را بدون توسل به ریاضیات پیشرفته مورد بررسی قرار داد.

ما فرض می‌کنیم که عمل ورزدادن خمیر عبارتست از کشیدن خمیر و تاه‌زدن آنها روی خودش که بارها و بارها پشت سرهم انجام می‌گیرد.



نموار ۲ـ۱ ورزدادن خمیر



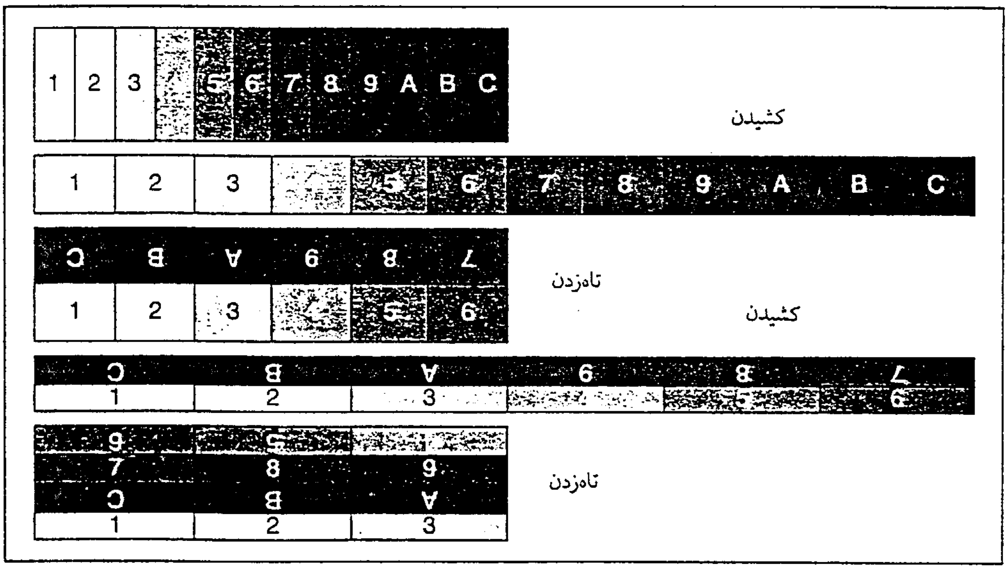
نموار ۲ـ۲ روش کشیدن_تاه‌زدن

۲ـ۲ روش کشیدن_تاه‌زدن

در این روش ورزدادن، خمیر که به طور یکنواخت پهن شده است ابتدا تا دو برابر اندازه اولیه کشیده می‌شود و سپس از مرکز خم شده و روی خودش تاه می‌خورد. نمودار ۲ـ۲ بیانگر این عملیات می‌باشد.

نمودار ۲ـ۳ نشان دهنده این مطلب است که اگر یک قطعه خمیر را به ۱۲ قسمت تقسیم کنیم و با روش کشیدن_تاه‌زدن آن را ورز دهیم چه اتفاقی می‌افتد.

مشاهده می‌شود که لایه نهائی خمیر از تعدادی قسمت مخلوط تشکیل شده است.



نموار ۲_۳ روش کشیدن_تاه‌زدن روی خمیر ۱۲ قسمتی

اگر فرض کنیم که با یک لایه خمیر بسیار نازک کار می‌کنیم به طوری که تاه‌زدن لایه‌ها هیچ تغییری در ضخامت ایجاد نمی‌کند می‌توانیم خمیر را با یک قطعه خط نشان دهیم. نمودار ۲_۴ نشان دهنده ورزدادن خمیر است.

در نمودار ۲_۴ ابتدا دو نقطه از خمیر را علامت‌دار می‌کنیم. مشاهده می‌شود که دو نقطه در آغاز بسیار نزدیک به هم می‌باشند اما پس از چندبار انجام عمل کشیدن_ تاه‌زدن دو نقطه در مکانهای بسیار متفاوتی قرار می‌گیرند در واقع این مسئله نشان می‌دهد که عمل ورزدادن روابط همسایگی را از بین می‌برد.

این مطلب مبین حساس بودن انتخاب نقاط آغازین می‌باشد زیرا انحراف کم در وضعیت نقاط آغازین موجب انحراف زیاد در طی انجام عمل می‌شود.

نمودار ۲_۵ یک دستگاه را نشان می‌دهد که عمل کشیدن_تاه‌زدن را شبیه‌سازی می‌کند.