بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

گرایش محض

عنوان:

تحقیقی بر روی طیف اول یک مدول

استاد راهنما:

دکتر حبیب اله انصاری طرقی

نگارش:

اختر طاهری رودکناری

زمستان ۹۱

تقدیم به :

پدر و مادر عزیزم

و

همه عزیزانی که صمیمانه دوستشان دارم

تقدیر و تشکر :

اکنون که به خواست و کمک خداوند متعال و حمایت های علمی اساتید دانشکده و حمایت های معنوی خانواده ام موفق به انجام این پایان نامه شده ام ، شایسته است که از زحمات کسانی که در این راه ، مشوق و پشتوانه ی گرمی برای من بوده اند ، تقدیر و تشکر نمایم .

ابتدا از آقای دکتر حبیب اله انصاری ، که به عنوان استاد راهنما قبول زحمت فرمودند ، تقدیر و تشکر می نمایم .همچنین از آقایان دکتر شهاب الدین ابراهیمی و دکتر فرهاد درستکار ، که داوری این پایان نامه را پذیرفته اند ، تشکر می نمایم.

نیز، از تمامی اساتید دانشکده که افتخار این را داشتم به عنوان دانشجو ، از محضرعلمی ایشان بهره ببرم ، قدر دانی می کنم .

همچنین از آقای سیامک کیوانی و خانم شکوفه حبیبی ، به خاطر راهنمایی های ارزنده و کمکشان در انجام این پایان نامه ،سپاس گذارم .

و در آخر از پدر و مادر مهربان و عزیزم که همواره در تمام مراحل زندگی و تحصیل ، یار و مشوق من بوده اند و از هیچ کمکی دریغ ننمودند تشکر می کنم و دست مبارکشان را بوسه می زنم .

اختر طاهری رودکناری

دانشجوی کارشناسی ارشد (ریاضی محض)

چکیده :

تحقیقـــی بر روی طیف اول یک مـــدول

اختـــر طاهری رودکنـــاری

فرض کنیم R یک حلقه ی جا بجایی باشد . فرض کنیم $X = Spec_R(M)$ طیف اول M با توپولوژی زاریسکی باشد . در این پایان نامه با استفاده از خواص توپولوژیکی X ، شرایطی را که $Max_R(M) = Spec_R(M)$ بررسی می کنیم . به علاوه بعدهای توپولوژیکی X را هنگامی که X یک فضای توپولوژیکی نوتری باشد را بررسی می کنیم . مطالعه ی مورد بحث از مقالات [۱] ، [۲] و [۴] برگرفته شده است .

واژه های کلیدی : زیر مدول های اول ، توپولوژی زاریسکی ، فضای توپولوژیکی نوتری ، همبندی ، تحویل ناپذیری .

فهرست مطالب :

مقدمه :

تعریف زیر مدول اول به عنوان تعمیمی از مفهوم ایده آل اول از یک حلقه ، بروی مدول ها روی حلقه های جابجایی ، برای اولین بار در سال ۱۹۷۸ میلادی توسط Johon Dauns مطرح گردید . پس از وی از میان افرادی که در این زمینه نقش مهمی ایفا کردند می توان به P.F.Smith ، C.P.lu ، R.L.McCasland و M.E.Moor اشاره کرد .

در سراسر این پایان نامه R یک حلقه ی جابجایی و یکدار و غیر بدیهی و M یک R-مدول یکانی می باشد . زیر مدول سره ی P از M را یک زیر مدول اول می نامند ، هرگاه بازای هر $r \in R$ و $m \in M$ ، $rm \in P$ ایجاب کند که $m \in P$ یا $r \in (P:_R M)$ ، که در اینجا $(P:_R M) = \mathrm{Ann}_R(M/P) = \{r \in R : rM \subseteq P\}$.

گردایه ی همه ی زیر مدول های اول (ماکسیمال) مدول M را با نماد $X = \mathrm{Spec}_R(M)$ ($\mathrm{Max}_R(M)$) نمایش می دهیم . نگاشتهای $f: \mathrm{Spec}_R(M) \longrightarrow \mathrm{Spec}(R/\mathrm{Ann}_R(M))$ و $g: \mathrm{Max}_R(M) \longrightarrow \mathrm{Max}(R/\mathrm{Ann}_R(M))$

$$P \longrightarrow (P:_R M)/\mathrm{Ann}_R(M) \qquad\qquad Q \longrightarrow (Q:_R M)/\mathrm{Ann}_R(M)$$

را به ترتیب نگاشتهای طبیعی طیف اول و طیف ماکسیمال می نامیم . یک به یک و پوشا بودن این نگاشت ها نقش بسیار مهمی در مطالعه ی توپولوژی های زاریسکی بر روی طیف اول یک مدول ایفا می کند . در سال ۲۰۰۷ C.P.LU در [۹] دسته ی جدیدی از مدول ها را به عنوان مدول های پرایم فول معرفی کرد . در واقع M یک پرایم فول نامیده می شود هرگاه M=(0) یا $M \neq (0)$ و نگاشت طبیعی طیف اول M پوشا باشد . این مدول ها شامل دسته ی مدول های متناهی مولد و تخت با وفا می باشد . درفصل اول این پایان نامه ، مقدمات و مطالب پیشنیاز گردآوری شده است .در فصل دوم توپولوژی زاریسکی و پایه برای این توپولوژی روی حلقه ی R و R- مدول M را مطرح می کنیم و برخی از نتایج مربوطه را بررسی می کنیم . در فصل سوم به بررسی مدول ها و شرایطی که تحت آن طیف اول و ماکسیمال M با هم برابر می شوند ، می پردازیم و در نهایت در فصل چهارم ، بعد های توپولوژیکی X را هنگامی که X یک فضای توپولوژیک نوتری باشد ،مطرح می کنیم و آنها را با بعدهای توپولوژیکی $\mathrm{Supp}_R(M)$ مقایسه می کنیم . همچنین توصیفی از تحویل ناپذیری X را ارائه می دهیم و نتایج مربوطه را بدست می آوریم .

فصل اول

مقدمات و مطالب پیشنیاز

فصل اول- مقدمات و مطالب پیشنیاز

۱.۱- تعاریف اولیه :

۱.۱.۱ تذکر: در سراسر این پایان نامه ، R حلقه جابجایی یکدار است و مدول ها یکانی هستند .

۲.۱.۱ تعریف : مجموعه ی همه ایده ال های اول R را طیف اول R می نامیم و با $Spec(R)$ نمایش می دهیم .

۳.۱.۱ تعریف : زیر مدول P از R- مدول M را اول گوییم هرگاه :

۱) $P \neq M$،

۲) برای هر $r \in R$ و $m \in M$ که $r\, m \in P$ ، داشته باشیم $r \in (P:_R M)$ یا $m \in P$.

۴.۱.۱ تعریف : P ، زیر مدول اول (یا زیر مدول p- اول) M است ، هرگاه :

۱) $P \neq M$،

۲) برای هر $r \in R$ و $m \in M$ که $r\, m \in P$ ، داشته باشیم $r \in p$ یا $m \in P$ که $p = (P:_R M)$.

۵.۱.۱ تعریف : طیف اول R–مدول M را با $Spec_R(M)$ (یا $Spec(M)$) نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$spec_R(M) = \left\{P \,:\, \text{است } M \text{ زیر مدول اول } P\right\}.$$

۶.۱.۱ تعریف : زیر مدول N از R–مدول M را ماکسیمال گوییم هرگاه :

۱) $N \neq M$ ،

۲) اگر P زیر مدولی از $R-$مدول M به قسمی باشد که $N \subseteq P \subseteq M$ آنگاه $P = N$ یا $P = M$.

همچنین مجموعه ی همه ی زیر مدولهای ماکسیمال $R-$ مدول M را با $Max_R(M)$ نمایش می دهیم .

۷.۱.۱ تعریف : فرض کنیم N یک $R-$زیر مدول M باشد . در این صورت $\{r \in R \ : \ r\,M \subseteq N\}$ یک ایده آل R است که آن را با نماد $(N:_R M)$ یا $Ann_R(M\ /\ N)$ نشان می دهیم . بعلاوه $(0:_R M)$ را پوچساز M گوییم و با نماد $Ann_R(M)$ بیان می کنیم . (ر . ک . [۱۶])

۸.۱.۱ تعریف : فرض کنیم R یک دامنه ی صحیح و M یک R- مدول باشد . مجموعه ی

$$\{m \in M : \exists\, 0 \neq r \in R \quad r\,m = 0\}$$

یک زیر مدول M است که آن را زیر مدول تابدار M می نامیم و با نماد $T(M)$ نمایش می دهیم .

اگر $T(M) = M$ آنگاه مدول M را تابدار و اگر $T(M)=0$ ، R- مدول M را بدون تاب می گوییم . (ر . ک . [۱۶])

۹.۱.۱ قضیه : زیر مدول K از R- مدول M اول است اگر و فقط اگر $p = (K:_R M)$ ایده آل اولی از R باشد و R/p- مدول M/K بدون تاب باشد .

برهان : (ر . ک . [۱۴])

۱۰.۱.۱ تعریف : فرض کنیم M ، R- مدول و X زیر مجموعه ای از M باشد . X را مجموعه ی مولد برای M گوییم اگر $M=RX$. اگر X متناهی باشد آنگاه M را متناهیا تولید شده گوییم و اگر X تک عضوی باشد ، M را دوری می نامیم .

۱۱.۱.۱ لم : فرض کنیم M یک R- مدول متناهیا تولید شده و غیر صفر باشد . آنگاه بازای هر ایده آل اول (به ترتیب ماکسیمال) p از R و شامل $Ann_R(M)$ ، یک زیر مدول p- اول از M موجود است (به ترتیب ، یک زیر مدول ماکسیمال

L از M که $(L:_R M) = p$ موجود است) .

برهان : (ر . ک . [۱۱])

۱۲.۱.۱ قضیه : فرض کنیم M یک R- مدول غیر صفر باشد که $R \neq 0$. اگر M متناهیا تولید شده باشد ، آنگاه یک نگاشت پوشا از $Spec_R(M)$ به $Spec\left({R}/{Ann_R(M)}\right)$ موجود است ، و مشابها ، یک نگاشت پوشا از $Max_R(M)$ به $Max\left({R}/{Ann_R(M)}\right)$ موجود است . بنابراین $Spec_R(M) \neq \emptyset$ و $Max_R(M) \neq \emptyset$.

برهان : نتیجه مستقیم از لم قبل است .

۱۳.۱.۱ تعریف : R- مدول M را پرایم فول گوییم هر گاه :

۱) $M = (0)$ یا

۲) $M \neq (0)$ و نگاشت طبیعی $\psi: Spec_R(M) \longrightarrow Spec\left({R}/{Ann_R(M)}\right)$ با ضابطه ی $P \longrightarrow {(P:_R M)}/{Ann_R(M)}$ ، پوشا باشد .

۱۴.۱.۱ تعریف : R- مدول M را نوتری گوییم اگر در شرط زنجیر صعودی صدق کند . یعنی هر زنجیره ی صعودی از زیر مدول های M چون $M_۱ \subseteq M_۲ \subseteq \cdots \subseteq M_n \subseteq M_{n+۱} \ldots$ سرانجام ایستا باشد . حلقه ی R را نوتری گوییم اگر R به عنوان یک R- مدول نوتری باشد .

۱۵.۱.۱ تعریف : R - مدول M را آرتینی گوییم اگردر شرط زنجیر نزولی صدق کند .یعنی هر زنجیره ی نزولی از زیر مدول های M چون $M_۱ \supseteq M_۲ \supseteq \cdots \supseteq M_n \supseteq M_{n+۱} \ldots$ سرانجام ایستا باشد . حلقه ی R را آرتینی گوییم اگر R به عنوان یک R- مدول آرتینی باشد .

۱۶.۱.۱ قضیه : فرض کنیم R یک حلقه ی نوتری باشد . آنگاه موارد زیر معادلند :

۱) $Spec(R) = Max(R)$.

۲) $Spec(R)$ گسسته و متناهی است .

۳) $Spec(R)$ گسسته است .

۴) R یک حلقه ی آرتینی است .

برهان : (ر . ک . [۵])

۱۷.۱.۱ تعریف : حلقه ی R را شبه موضعی گوییم هرگاه حلقه ی R (لزوما نوتری نیست) تنها دارای یک ایده آل ماکسیمال m باشد ، که در این صورت حلقه را با نماد (R, m) نمایش می دهیم . (ر . ک . [۱۶])

۱۸.۱.۱ تعریف : R- مدول M ، یک مدول ضربی است هر گاه برای هر زیر مدول N از M ، ایده آل I از R وجود داشته باشد ، بطوریکه $N = IM$.

۱۹.۱.۱ قضیه : هر مدول ضربی آرتینی ، شبه موضعی و دوری است .

برهان : (ر . ک . [۱۱])

۲۰.۱.۱ تعریف : R – مدول M را با وفا گوییم هرگاه $Ann_R(M) = 0$ ، همچنین هرگاه برای هر زیر مدول N از M داشته باشیم $Ann_R(N) = 0$ ، آنگاه M را کاملا با وفا می نامیم .

۲۱.۱.۱ تعریف : اگر M یک R- مدول باشد ، آنگاه تعریف می کنیم :

$$Ass_R(M) = \{ p \in spec\,(R) : \exists\, 0 \neq m \in M \quad (0:_R m) = p \}$$

$$Supp_R(M) = \{ p \in spec\,(R) : \exists\, 0 \neq m \in M \quad (0:_R m) \subseteq p \} = \{ p \in spec\,(R) : M_p \neq 0 \}.$$

۲۲.۱.۱ تبصره :

۱) فرض کنیم M یک R- مدول و K زیر مدول اول M باشد ، آنگاه $(K:_R M)$ ایده آل اول R است . (ر . ک . [۱۱])

۲) اگر N زیر مدول ماکسیمال M باشد ، آنگاه N زیر مدول اول M است و $(N:_R M)$ یک ایده آل ماکسیمال R است .

(ر . ک . [۱۱])

۳) اگر M یک R-مدول متناهیا تولید شده باشد ،هر زیر مدول سره ی M ، مشمول در یک زیر مدول ماکسیمال است .

(ر . ک . [۱۰])

۲۳.۱.۱ تعریف : فرض کنیم R یک حلقه باشد . آنگاه R حلقه ی ژاکوبسون است اگر هر ایده آل اول در R ، اشتراکی از ایده آل های ماکسیمال R باشد . (برای مثال هر حلقه ی آرتینی یک حلقه ی ژاکوبسون است .) (ر . ک . [۵])

۲۴.۱.۱ تذکر : همچنین اگر R حلقه ی ژاکوبسون باشد ، آنگاه $Max(R)$ یک زیر فضای چگال در فضای توپولوژیکی $Spec(R)$ است . (ر . ک . [۵])

۲۵.۱.۱ قضیه : فرض کنیم M یک R- مدول ناصفر باشد ، عبارات زیر معادلند :

۱) نگاشت طبیعی $\psi: Spec_R(M) \longrightarrow Spec\left({}^{R}/_{Ann_R(M)}\right)$ پوشاست .

۲) بازای هر $p \in V(Ann_R(M))$ ، $P \in Spec_R(M)$ ای موجود است بطوریکه $(P:_R M) = p$.

۳) بازای هر $p \in V(Ann_R(M))$ ، $pM_p \neq M_p$.

۴) بازای هر $p \in V(Ann_R(M))$ ، $Spec_p(M) \neq \emptyset$.

برهان : (ر . ک . [۹] ، قضیه ی ۲.۱)

۲۶.۱.۱ قضیه : بازای هر R- مدول M ، عبارات زیر هم ارزند :

۱) M یک R-مدول پرایم فول ناصفر است .

۲) بازای هر $p \in V(Ann_R(M))$ ، M_p یک R_p-مدول ناصفر پرایم فول است .

برهان : (ر . ک . [۹] ، قضیه ی ۴.۱)

۲۷.۱.۱ تعریف : R- مدول M را تخت باوفا می گوییم هرگاه :

دنباله ی $0 \longrightarrow N \longrightarrow N' \longrightarrow N^{"} \longrightarrow 0$ دقیق است اگر و فقط اگر دنباله ی

$0 \to N \otimes_R M \longrightarrow N' \otimes_R M \longrightarrow N^{"} \otimes_R M \longrightarrow 0$ دقیق است .

۲.۱- تعارفی از توپولوژی :

۱.۲.۱ تعریف : فضای توپولوژیکی T را شبه فشرده می گوییم ، هر گاه هر پوشش باز T ، دارای یک زیر پوشش متناهی باشد .

۲.۲.۱ تعریف : فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد . در این صورت گوییم X در اصل T_0 صدق می کند ، در صورتی که بازای هر دو نقطه ی متمایز X ، مجموعه ی بازی موجود باشد که شامل یکی از آنها بوده و شامل دیگری نباشد . هر فضا که در اصل T_0 صدق کند ، یک فضای T_0 می نامیم .

۳.۲.۱ تعریف : فرض کنیم X یک فضا ی توپولوژیک باشد . در این صورت گوییم X در اصل $T_۱$ صدق می کند ، در صورتی که بازای هر دو نقطه ی متمایز X مانند x و y ، مجموعه ی بازی شامل x مانند U موجود باشد ، بطوریکه $y \notin U$ (یعنی هر کدام یک همسایگی دارد که شامل دیگری نیست) . هر فضا که در اصل $T_۱$ صدق کند یک فضای $T_۱$ می نامیم .

۴.۲.۱ تعریف : فرض کنیم X یک فضا ی توپولوژیک باشد . در این صورت گوییم X در اصل $T_۲$ (یا خاصیت هاسدورف) صدق می کند، در صورتی که بازای هر دو نقطه ی متمایز X مانند x و y ، دو مجموعه ی باز از هم جدا مانند U و V موجود باشند ، بطوریکه $x \in U$ و $y \in V$. هر فضا که در اصل $T_۲$ صدق کند ، یک فضای $T_۲$ (هاسدورف) می نامیم .

۵.۲.۱ تعریف : فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد . در این صورت X را یک فضای منظم گوییم در صورتی که بازای

هر x از X و هر مجموعه ی بسته ی X مانند F که $x \notin F$ ، دو مجموعه ی باز جدا از هم مانند U و V وجود داشته باشند

بطوریکه $x \in U$ و $F \subseteq V$.

۶.۲.۱ تعریف : فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد . در این صورت X را یک فضای نرمال گوییم در صورتی که بازای

هر دو مجموعه ی بسته ی X مانند E و F که $E \cap F = \emptyset$ ، دو مجموعه ی باز جدا از هم مانند U و V وجود داشته باشد

بطوریکه $E \subseteq U$ و $F \subseteq V$.

۷.۲.۱ تعریف : فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد . گوییم X در اصل $T_۳$ صدق می کند ، در صورتی که X منظم

و در اصل T_0 صدق کند . هر فضا را که در اصل $T_۳$ صدق کند ، یک فضای $T_۳$ می نامیم .

۸.۲.۱ تعریف : فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد . گوییم X در اصل $T_۴$ صدق می کند ، در صورتی که X نرمال

و در اصل $T_۱$ صدق کند . هر فضا را که در اصل $T_۴$ صدق کند ، یک فضای $T_۴$ می نامیم .

۹.۲.۱ تذکر : هر فضای T_i یک فضای $T_{i-۱}$ است که $i \in \{۱,۲,۳,۴\}$.

۱۰.۲.۱ قضیه : فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژیک و تابع $f: X \longrightarrow Y$ یک به یک و پیوسته باشد . اگر Y یک فضای

T_i باشد که در آن $0 \leq i \leq ۲$ ، آنگاه X نیز یک فضای T_i است .

۱۱.۲.۱ تعریف : فضای توپولوژیک X را ناهمبند می گوییم هرگاه بتوان آن را به صورت اجتماع دو زیر مجموعه ی باز

(بسته) سره و مجزای خود نوشت ، در غیر اینصورت X راهمبند می نامیم . به عنوان قرار داد مجموعه ی تهی را یک مجموعه

ی ناهمبند فرض می کنیم .

۱۲.۲.۱ تعریف : فرض کنیم $X \neq \emptyset$ یک فضای توپولوژیکی باشد . آنگاه گوییم X نوتری است اگر زیر مجموعه های باز X

در شرط زنجیر صعودی (یا شرط ماکسیمال) صدق کند . چون زیر مجموعه های بسته ، متمم مجموعه های بازند ، بنابراین

بطور مشابه گفته میشود که زیر مجموعه های بسته ی X در شرط زنجیر نزولی صدق کند (یا به طور معادل شرط مینیمال) .

۱۳.۲.۱ تعریف : فرض کنیم $X \neq \emptyset$ یک فضای توپولوژیکی باشد . گوییم X تحویل ناپذیر است ، اگر X به صورت اجتماع دو زیر مجموعه ی سره ی بسته خود نباشد . به عبارت دیگر فضای توپولوژیکی X تحویل ناپذیر است هرگاه هر زوج از زیر مجموعه های باز غیر تهی X ، اشتراک ناتهی داشته باشد .

۱۴.۲.۱ قضیه: فرض کنیم T یک فضای توپولوژیک غیر تهی باشد .

۱) فرض کنیم S یک زیر مجموعه ی تحویل ناپذیر از T باشد (یعنی ، یک زیر مجموعه از T که در توپولوژی القا شده از T ، یک فضای تحویل ناپذیر است) و فرض کنیم $(C_i)_{۱\leq i\leq n}$ یک پوشش متناهی از زیر مجموعه های بسته ی T ، برای S باشد (بنابراین $C_۱, C_۲, \dots, C_n$ زیر مجموعه های بسته از T هستند بطوریکه $S \subseteq \bigcup_{i=۱}^{n} C_i$) ، آنگاه i ای $(۱ \leq i \leq n)$ موجود است بطوریکه $S \subseteq C_i$.

۲) اگر T تحویل ناپذیر باشد ، آنگاه هر زیر مجموعه ی باز غیر تهی از T نیز تحویل ناپذیر است .

۳) فرض کنیم T' فضای توپولوژیکی دیگری باشد و فرض کنیم $f : T \longrightarrow T'$ نگاشت پیوسته باشد ، اگر T تحویل ناپذیر باشد ، آنگاه $f(T)$ نیز تحویل ناپذیر است . (ر . ک . [۷])

۱۵.۲.۱ تذکر و تعریف : هر فضای توپولوژیکی غیر تهی T، دارای یک زیر مجموعه تحویل ناپذیر ماکسیمال است .

زیر مجموعه های تحویل ناپذیرماکسیمال T ، مولفه های تحویل ناپذیر نامیده می شوند .

مولفه های تحویل ناپذیر T بسته اند و پوششی برای T هستند و همچنین هر کدام از زیر مجموعه های تحویل ناپذیر T ، مشمول در یک مولفه ی تحویل ناپذیر T است . (ر .ک . [۷])

۱۶.۲.۱ تعریف : تابع $f: X \longrightarrow Y$ یک هومئومورفیسم است هرگاه f یک تناظر ۱-۱ باشد و به علاوه f و $f^{-۱}$ هر دو

پیوسته باشند . دو فضای X و Y را هومئومورف گوییم در صورتی که یک هومئومورفیسم مانند $f: X \longrightarrow Y$ موجود باشد .

۱۷.۲.۱ قضیه : عبارات زیر معادلند :

۱) X نوتری است .

۲) هر زیر فضای باز X ، شبه فشرده است .

۳) هر زیر فضای X ، شبه فشرده است .

برهان : (ر . ک . [۵])

۱۸.۲.۱ قضیه : اگر X یک فضای توپولوژیکی ناتهی باشد . شرایط زیر معادلند :

۱) X تحویل ناپذیر است .

۲) هر زیر مجموعه ی باز ناتهی از X ، در X چگال است .

۳) هر زیر مجموعه ی باز ناتهی از X ، همبند است .

فصل دوم

توپولوژی زاریسکی روی طیف اول مدول

فصل دوم- توپولوژی زاریسکی روی طیف اول مدول

۱.۲- توپولوژی زاریسکی روی طیف اول حلقه ی R :

۱.۱.۲ تعریف : برای زیرمجموعه ی J از R ، وریته ی J وابسته به R *را با* $V^R(J)$ نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$V^R(J) = \{ p \in Spec(R) : J \subseteq p \}$$

مجموعه ی $Z_R = \{ V^R(J) : J \subseteq R \}$ را در نظر می گیریم .

۲.۱.۲ قضیه : اگر $E \subseteq R$ ، آنگاه ایده آل I از R موجود است که $V^R(E) = V^R(I)$.

برهان : فرض کنیم I کوچکترین ایده آل شامل E باشد . آنگاه از آنجا که $E \subseteq I$ ، داریم $V^R(I) \subseteq V^R(E)$.

همچنین اگر $p \in V^R(E)$ آنگاه $E \subseteq p$. باید نشان دهیم $I \subseteq p$. برای اثبات ، چون I و p هر دو شامل E هستند . لذا $E \subseteq I \cap p$ و I کوچکترین ایده آل شامل E است ، لذا $I \cap p = I$ ، بنابراین $I \subseteq p$. ■

۳.۱.۲ تعریف و قضیه : عناصر مجموعه ی Z_R زیر مجموعه های بسته ی یک فضای توپولوژیکی روی $spec(R)$ هستند ، که این توپولوژی را توپولوژی زاریسکی روی $X^R = spec(R)$ می نامیم .

برهان : داریم $V^R(R) = \{ p \in X^R : R \subseteq p \} = \emptyset$ و $V^R(\emptyset) = \{ p \in X^R : \emptyset \subseteq p \} = X^R$. لذا $\emptyset , X^R \in Z_R$. حال فرض کنیم $\{V^R(E_\propto)\}_{\propto \in I}$ خانواده ای از اعضای Z_R باشد .

در این صورت $\bigcap_{\propto \in I} V^R(E_\propto) = V^R(\bigcup_{\propto \in I} E_\propto) \in Z_R$. لذا $\bigcap_{\propto \in I} V^R(E_\propto) \in Z_R$.

همچنین اگر $V^R(F)\ ,\ V^R(E) \in Z_R$ ، آنگاه با توجه به قضیه ی ۲.۱.۲ ، ایده آل های I و J از R موجودند که

$V^R(F) = V^R(J)$ و $V^R(E) = V^R(I)$ و از آنجا که $I\,J \subseteq I$ و $I\,J \subseteq J$ ، لذا $V^R(I) \subseteq V^R(I\,J)$ و

$V^R(J) \subseteq V^R(I\,J)$ و از آنجا $V^R(J) \cup V^R(I) \subseteq V^R(I\,J)$. برای اثبات اینکه $V^R(I\,J) \subseteq V^R(I) \cup V^R(J)$ ،

فرض کنیم $p \in V^R(I\,J)$ و $J \nsubseteq p$. نشان می دهیم که $I \subseteq p$. برای این منظور فرض کنیم $g \in I$ و $f \in J \setminus p$ ،

آنگاه $fg \in p$ و چون p اول است و $f \notin p$ پس $g \in p$. لذا $I \subseteq p$ که در نتیجه $p \in V^R(I)$.■

۴.۱.۲ تعریف : قرار می دهیم $X^R = Spec(R)$. برای $f \in R$ تعریف می کنیم :

$$X_f^R = X^R - V^R(f) = \{\, p \in X^R : f \notin p \,\} .$$

۵.۱.۲ قضیه : X_f^R های تعریف شده در بالا ، تشکیل یک پایه از مجموعه های باز ، برای توپولوژی زاریسکی روی $X^R = Spec(R)$ می دهد .

برهان : فرض کنیم $E \subseteq R$. قرار می دهیم $U^R(E) = X^R \setminus V^R(E)$. در این صورت اگر $p \in U^R(E)$ ، آنگاه $E \nsubseteq p$. لذا می توان $f \in E \setminus p$ اختیار کرد . در این صورت از آنجا که $f \notin p$ لذا $p \in X_f^R$. بنابراین $U^R(E) \subseteq X_f^R$.

برای اثبات اینکه $X_f^R \subseteq U^R(E)$ ، فرض کنیم $q \in X_f^R$. در این صورت $f \notin q$ ، لذا $E \nsubseteq q$. پس $q \in U^R(E)$ و در نتیجه $p \in X_f^R \subseteq U(E)$ ، که این یعنی X_f^R ها پایه ای برای توپولوژی زاریسکی روی X هستند . ■

۶.۱.۲ قضیه : اگر $f, g \in R$ دو عنصر دلخواه باشند :

۱) $X_f^R \cap X_g^R = X_{fg}^R$.

۲) $X_f^R = \emptyset$ اگر و فقط اگر f یک عنصر پوچ توان در R باشد .

۳) $X_f^R = X^R$ اگر و فقط اگر f یک عنصر یکه در R باشد .

۴) $X_f^R = X_g^R$ اگر و فقط اگر $\sqrt{(f)} = \sqrt{(g)}$.