دانشکده علوم

گروه ریاضی

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
، گرایش جبر

عنوان

مرتبه عناصر و هم درجه سرشت ها

استاد راهنما

دکتر هوشنگ بهروش

دانشجو

فریبا قدیری هدایت آباد

مهر ماه ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

که چشمانم به چراغ نگاه مهربانشان روشن است و لبهایم به لطف کلام پر از صفایشان گویا.

کاش میدانستیم :

زندگی با همه وسعت خویش

محفل ساکت غم خوردن نیست

حاصلش تن به قضا دادن و پژمردن نیست

زندگی کوشش و راهی شدن است

زندگی جوشش و جاری شدن است

از تماشاگه آغاز حیات

تا بدانجا که خدا میداند......

سپاس گزاری...

حمد و سپاس فراوان به درگاه آن یکتای بی‌همتا که قلم را قداست و انسان را کرامت بخشید و بر بنده حقیر منت نهاد تا این تلاش کوچک به ثمر بنشیند. اما برخود لازم می‌دانم تا در این مقدمه کوتاه از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر هوشنگ بهروش که راهنمایی این رساله را پذیرفتند و در این دوره‌ی تحصیلی همواره مشوق و راهنمای من بوده و مرا مورد الطاف و عنایات خویش قرارداده‌اند صمیمانه سپاس گذاری نمایم.

همچنین از کلیه اعضای محترم هیئت داوران که در جلسه‌ی دفاعیه اینجانب حضور داشته و راهنمایی‌های لازم را در تصصیح پایان‌نامه نموده‌اند، کمال تشکر را نمایم.

در پایان ولی نه به عنوان کمترین، خالصانه‌ترین مراتب تشکر و قدردانی خود را تقدیم می‌کنم به پدر فداکار و مادردلسوزم که همواره در طول مدت تحصیل، پشتیبان و یاری‌رسان بنده بوده‌اند و همیشه عزت و سربلندی را برایشان آرزو دارم.

سخن آخر آنکه، عزت نزد خداوند است و بس. سپاس بی‌کران آن یاری دهنده متعال را سزاست که ما را ره‌پوی مسیری قرار داده تا بتوانیم سهمی هرچند کوچک در راه اعتلای میهن عزیزمان ایران داشته باشیم.

فریبا قدیری

فهرست مطالب

۱.۰ چیکده

هدف این پایان نامه یافتن ارتباطی بین مرتبه عناصر و هم‌درجه‌های سرشت‌شان می‌باشد. چنانکه اگر G گروهی متناهی و g عنصری از آن باشد. در این صورت سرشت تحویل‌ناپذیری چون χ از G وجود دارد چنانکه به ازای هر مقسوم علیه اول از مرتبه g مانند p می‌تواند $a(\chi)$ را عاد کند.

کلمات کلیدی: مرتبه عنصر، سرشت، گروه حل پذیر متناهی

۲.۰ پیشگفتار

نظریه نمایش گروه‌های متناهی و به موازات آن نظریه سرشت‌ها یکی از کارآمدترین ابزارهای مطالعه‌ای نظریه گروههای متناهی است که در اواخر قرن نوزدهم میلادی توسط اشخاصی چون فروبنیوس[۱] وبرونساید[۲] مطرح گردید. با توجه به آنکه نظریه سرشت، بررسی گروه‌ها با استفاده از مقادیر سرشت‌های تحویل‌ناپذیری آن‌هاست. در این راستا فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی و $\mathrm{Irr}(G)$ مجموعه‌ی تمام سرشت‌های تحویل‌ناپذیر G می‌باشد. در این‌صورت ضمن تعریف مجموعه خارج قسمتی

$$a(\chi) = \frac{|G : \mathrm{Ker}(\chi)|}{\chi(1)},$$

با مؤلفه دیگری تحت عنوان هم‌درجه سرشت χ از G آشنا می‌شویم، که یک عدد گویای صحیح می‌باشد و اینکه چگونه با تعیین فرض معینی روی این اعداد می‌توان به بررسی ساختار گروه G پرداخت.

[۱] Frobnius
[۲] Burnside

در مرجع‌های [۱] و [۲] با استفاده از خواص هم‌درجه‌ها به بررسی ساختار گروه پرداخته شده است. به عنوان مثال، اگر به ازای هر $\chi \in \mathbf{Irr}(G)$ هم‌درجه‌اش از مرتبه‌ی مربع‌آزاد باشد، آنگاه گروه متناهی G حل‌پذیر می‌باشد.

اولین نتیجه‌مان پاسخ مثبتی است به این سوال که اگر G گروهی حل‌پذیر متناهی و g عنصری از آن باشد، آیا عنصری از $\mathbf{cdq}(G) = \{a(\chi) \mid \chi \in \mathbf{Irr}(G)\}$ وجود دارد چنان‌که مجموعه مقسوم علیه‌های اول آن شامل مجموعه همه‌ی مقسوم علیه‌های اول مرتبه g باشد؟

با این مقدمه کوتاه به آنچه در این پایان‌نامه آمده است اشاره می‌کنیم: در فصل اول و دوم به ترتیب به بررسی مطالب و مفاهیم مقدماتی در مورد نظریه گروه و نظریه سرشت می‌پردازیم که در سرتاسر پایان‌نامه مورد استفاده قرار گرفته است. در فصل سوم ابتدا معیاری از نظریه سرشت برای گروه‌های که $p-$بسته باشند را ارائه می‌دهیم. سپس به بررسی چند قضیه و لم اساسی که در فهم و اثبات قضیه اصلی کاربرد دارند می‌پردازیم. در فصل چهارم، با فرض اینکه G گروهی متناهی و حل‌پذیر باشد، به بررسی قضیه اصلی که در پی یافتن رابطه‌ای بین مرتبه عناصر و هم‌درجه‌های سرشت متناظرشان است، می‌پردازیم [۱۵]. در فصل پنجم که بخش پایانی نیز می‌باشد، مشابه فصل قبل رابطه بین مرتبه عناصر وهم‌درجه سرشت متناظرشان را می‌یابیم، منتها در حالتی که شرط حل‌پذیری گروه را حذف

کرده‌ایم. لازم به ذکر است، این نحوه اثبات توسط مارتین آیزاکس [۳] ارائه شده که دارای اثباتی نسبتاً ساده‌تر و زیباتر می‌باشد [۱۰].

مجدداً یادآوری می‌کنیم که این پایان نامه براساس دو مقاله زیر تهیه و تنظیم شده است:

•G. Qian, A not on element orders and character codegrees, Arch. Math. 97(2011), 99-103.

•I. M. Isaacs, Element orders and character codegrees, Arch. Math. 97(2011), 499-501.

[۳] Martin Isaacs

فصل ۱
گروه متناهی

۱.۱ نظریه مقدماتی گروه

در این بخش به برخی از نمادها و تعاریف و قضایای نظریه‌ی گروه‌های متناهی نگاهی اجمالی خواهیم داشت و برخی از آن‌ها را که در کتاب‌ها متداول نیستند، اثبات می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید G یک گروه و X یک زیرمجموعه از G، همچنین $x, g \in G$. در این صورت منظور از مزدوج x توسط g که با نماد x^g، نشان می‌دهیم عبارت است از

$$x^g = g^{-1}xg.$$

همچنین رده تزویجی x در G را با نماد x^G، نشان می‌دهیم و داریم:

$$x^G = \{x^g \mid g \in G\}.$$

تعریف ۲.۱.۱. اگر G یک گروه و X یک زیرمجموعه آن باشد، آنگاه مرکزساز و نرمال‌ساز X در G را به ترتیب با نمادهای

$$C_G(X) = \{g \in G \mid x^g = x, \ \ x \in X \text{به ازای هر}\},$$

$$N_G(X) = \{g \in G \mid X^g = X\}.$$

نشان می‌دهیم. واضح است که $N_G(X)$ و $C_G(X)$ هر دو زیرگروه G می‌باشند. همچنین $C_G(X) \trianglelefteq N_G(X)$ و H زیرگروهی از G باشد، آنگاه $H_G(X)$.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید G گروه دلخواهی باشد. مرکز G را با نماد $Z(G)$ نمایش داده و آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Z(G) = \big\{x \in G : \ g^{-1}xg = x \ ; \ g \in G \text{به ازای هر}\big\} = \bigcap_{x \in G} C_G(x).$$

تذکر ۴.۱.۱. هر زیرگروه یک گروه آبلی، زیرگروهی نرمال می‌باشد.

قضیه ۵.۱.۱. *(قضیه تناظر) فرض کنید G یک گروه است و $N \lhd G$. در این صورت تناظری یک به یک بین مجموعه‌ی زیرگروه‌های G شامل N و زیرگروه‌های G/N به شکل H/N است که H زیرگروه G شامل N بوده و $N \lhd G$.*

برهان. رجوع شود به [[۱۹]، قضیه ۷.۳]. □

قضیه ۶.۱.۱. *فرض کنید $G/Z(G)$ دوری باشد، آنگاه G آبلی است.*

برهان. از آنجایی که $G/Z(G)$ دوری است، پس عنصری چون x از G، موجود است چنان‌که بتوان نوشت:

$$G/Z(G) =< xZ(G) > .$$

اکنون نشان می‌دهیم G آبلی است. فرض کنید $a, b \in G$ و اعداد طبیعی مانند m و n وجود دارند، چنان‌که داریم:

$$aZ(G) = x^m Z(G) \quad , \quad bZ(G) = x^n Z(G).$$

عناصر z و y در $Z(G)$ وجود دارند چنان‌که

$$a = x^m y \quad , \quad b = x^n z,$$

از این‌رو داریم:

$$ab = (x^m y)(x^n z) = x^m y x^n z = x^m x^n yz = x^{n+m} yz,$$

$$ba = (x^n z)(x^m y) = x^n z x^m y = x^m x^n yz = x^{m+n} yz,$$

لذا $ab = ba$ و G آبلی است. □

تذکر ۷.۱.۱. اگر G گروهی متناهی و به ازای هر عدد صحیح n، حداکثر n عنصر $x \in G$ وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که $x^n = 1$، آنگاه G دوری است.

برهان. رجوع شود به [[۱۹]، گزاره ۷.۲]. $\square$

قضیه ۸.۱.۱. *فرض کنید G یک گروه متناهی و H زیرگروه آن باشد. در این صورت $H \leqslant Z(G)$ اگر و تنها اگر $C_G(H) = G$.*

برهان. بلافاصله از تعریف مرکزگروه و مرکزساز H در G حاصل می‌شود. $\square$

لم ۹.۱.۱. *فرض کنید $K \leqslant H \leqslant G$ و $K \trianglelefteq G$. در این صورت داریم:*

(۱) $H \trianglelefteq G$ *اگر و تنها اگر* $[H, G] \leqslant H$.

(۲) $[H, G] \leqslant K$ *اگر و تنها اگر* $H/K \leqslant Z(G/K)$.

برهان. (۱) فرض کنید $H \trianglelefteq G$. در این صورت برای هر $h \in H$ و هر $g \in G$ داریم: $g^{-1}hg \in H$. در نتیجه $[h, g] = h^{-1}g^{-1}hg \in H$. لذا $[H, G] \leqslant H$.

بر عکس مشابه قسمت قبل ثابت می‌شود.

(۲) فرض کنید $h \in H$ دلخواه باشد. در این صورت برای هر $g \in G$ داریم:

$[g, h] \in K$ اگر و تنها اگر $hgk = ghk$ اگر و تنها اگر

$(hk)(gk) = (gk)(hk)$ اگر و تنها اگر $hk \in Z(G/K)$.

□

تعریف ۱۰.۱.۱. زیرگروهی از یک گروه G یک $p-$زیرگروه G است، که مرتبه‌ی هر عنصر آن توانی از عدد اول p باشد.

تذکر ۱۱.۱.۱. گروهی که p مرتبه‌ی هر عضو آن را عاد نکند، $p'-$گروه می‌نامیم.

تعریف ۱۲.۱.۱. زیرگروهی از یک گروه G یک $p-$زیرگروه[1] G است. هرگاه این زیرگروه خود یک $p-$ گروه باشد.

گزاره ۱۳.۱.۱. *هر $p-$گروه آبلی متناهی، مساوی حاصل‌ضرب مستقیم گروه‌های دوری است.*

برهان. رجوع شود به [[۱۸]، لم ۳.۱۱]. □

تعریف ۱۴.۱.۱. فرض کنید $x, y \in G$، $X, Y \leqslant G$. در این صورت جابجاگر x و y را با نماد $[x, y]$ نشان داده و چنین تعریف می‌کنیم:

$$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy = x^{-1}x^{y}.$$

[1] p-Subgroup

زیرگروه $[X,Y]$ این گونه تعریف می‌شود:

$$[X,Y]=\langle [x,y]\,|x\in X, y\in Y\rangle.$$

در حالت خاص ، $G'=[G,G]$ را زیرگروه مشتق (جابجاگر) G می‌نامیم.

قضیه ۱.۱.۱۵. *فرض کنید G یک گروه و $N\lhd G$ باشد. در این صورت*

(۱) *G/N آبلی است اگر و فقط اگر $G'\leqslant N$.*

(۲) *G آبلی است اگر و فقط اگر $G'=\{e\}$.*

(۳) *G/G' آبلی است.*

برهان. (۱) G/N آبلی است اگر و فقط اگر به ازای هر $a,b\in G$،

$$aNbN=bNaN \Leftrightarrow abN=baN \Leftrightarrow$$

$$a^{-1}b^{-1}abN=N \Leftrightarrow [a,b]\in N,$$

به عبارت دیگر G/N آبلی است اگر و فقط اگر $G'=<[a,b]:a,b\in G>\leqslant N$.

(۲) در قسمت (۱)، قرار دهید $N=\{e\}$.

(۳) چون $G'\leqslant G'$، لذا بنابر (۱)، G/G' آبلی است. □

تعریف ۱۶.۱.۱. قرار داد می‌کنیم که π، معرف مجموعه تمام مقسوم علیه‌های اول عدد طبیعی n است.

(۱) عدد صحیح مثبت n را یک $\pi-$عدد گوییم، هرگاه هر مقسوم علیه اول n به π تعلق داشته باشد.

(۲) فرض کنید $g \in G$ دارای مرتبه‌ای متناهی باشد. g را یک $\pi-$عضو در G می‌نامیم، هرگاه $|g|$ یک $\pi-$عدد باشد.

(۳) فرض کنید G گروهی متناهی باشد. G را یک $\pi-$گروه می‌نامیم، هرگاه $|G|$ یک π عدد باشد.

قضیه ۱۷.۱.۱. *فرض کنید G یک $\pi-$ گروه متناهی باشد. در این صورت همه‌ی زیرگروه‌ها و همه‌ی گروه‌های خارج قسمتی G، $\pi-$گروه‌اند.*

برهان. بنابه قضیه لاگرانژ مرتبه‌های همه‌ی زیرگروه‌ها و همه گروه‌های خارج قسمتی G، باید $|G|$ را بشمارند. $\square$

تعریف ۱۸.۱.۱. فرض کنید G گروهی نابدیهی باشد، زیرگروه حقیقی M از G را زیرگروه ماکسیمال G می‌نامیم هرگاه زیرگروهی مانند L وجود نداشته باشد به‌طوری که $M < L < G$.

تعریف ۱۹.۱.۱. فرض کنید G گروهی نابدیهی باشد. زیرگروه حقیقی N از G را زیرگروه مینیمال G می‌نامیم هرگاه زیرگروهی مانند L وجود نداشته باشد به‌طوری که $M > L > 1$.

نتیجه ۲۰.۱.۱. *هر زیرگروه نرمال مینیمال G یا مساوی حاصل‌ضرب مستقیم گروه‌های یک‌ریخت با $\mathbb{Z}_p$ است، به ازای یک عدد اول p، یا مساوی حاصل ضرب گروه‌های ساده‌ی ناآبلی است.*

برهان. رجوع شود به [[۱۹]، نتیجه ۱۳.۲]. □

تعریف ۲۱.۱.۱. فرض کنید $G \neq 1$، در این صورت G شامل حداقل یک زیرگروه ماکسیمال است. $\Phi(G)$ را اشتراک تمام زیرگروه‌های ماکسیمال G تعریف می‌کنیم و آن را زیرگروه فراتینی[۲] G می‌نامیم.

تعریف ۲۲.۱.۱. فرض کنید G یک گروه متناهی و $H \leqslant G$. در این صورت H را زیرگروه هال [۳]می‌نامیم، هرگاه داشته باشیم $(|H|, |G : H|) = 1$. همچنین اگر π زیرمجموعه‌ای از اعداد اول باشد و π' مکمل آن باشد، آنگاه H را زیرگروه $\pi-$ هال می‌نامیم، هرگاه

$$\pi(H) \subseteq \pi \;\text{ و }\; \pi(|G : H|) \subseteq \pi'.$$

[۲]Frattini Subgroup
[۳]Hall

تعریف ۲۳.۱.۱. فرض کنید $H \leq G$، به‌طوری که به ازای هر $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ داشته باشیم $H^{\alpha} \subseteq H$. گوییم H یک زیرگروه مشخصه G می‌باشد.

اگر H زیرگروه مشخصه G باشد، آنگاه $H \trianglelefteq G$. همچنین دو زیرگروه G' و $Z(G)$ نمونه‌هایی از زیرگروه‌های مشخصه یک گروه G می‌باشند.

قضیه ۲۴.۱.۱. *فرض کنید H و N زیرگروه‌هایی از گروه G باشند. در این صورت:*

(۱) *اگر $H \trianglelefteq G$، N زیرگروه مشخصه N باشد، آنگاه $N \trianglelefteq G$.*

(۲) *اگر $N \trianglelefteq H$، هال باشد، آنگاه H زیر گروه مشخصه G می‌باشد.*

برهان. رجوع شود به [[۱۳]، قضیه ۱.۳.۲.] □

قضیه ۲۵.۱.۱. *اگر $H, K \leqslant G$ به‌طوری که هر دو از اندیس متناهی هستند و $(|G:H|, |G:K|) = 1$، آنگاه $G = HK$.*

برهان. رجوع شود به [[۱۷]، قضیه ۲.۱.۸]. □

هرگاه G یک گروه متناهی باشد و $H \leqslant G$، بنابر قضیه‌ی لاگرانژ می‌دانیم که $|H| \mid |G|$ ولی آیا عکس آن نیز برقرار است؟ یعنی با فرض اینکه $n \mid |G|$، آیا می‌توان گفت که G دارای زیرگروهی از مرتبه n است؟ جواب این سوال در حالت کلی منفی است، اما اگر n توانی از

یک عدد اول باشد جواب مثبت است. این قضیه‌ای مربوط به سیلو [۴] می‌باشد، که در زیر به آن‌ها اشاره می‌کنیم.

تعریف ۲۶.۱.۱. فرض کنید G یک گروه متناهی و p یک عدد اول باشد. یک $p-$ زیرگروه ماکسیمال از G را یک $p-$زیرگروه سیلو از G می‌نامند. مجموعه‌ی تمام $p-$زیرگروه‌های سیلو G را با نماد $\mathrm{Syl}_p(G)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۲۷.۱.۱. *فرض کنید G یک گروه متناهی و p یک عدد اول باشد. در این صورت مرتبه یک $p-$ زیرگروه سیلو برابر است با بزرگ‌ترین توان p که مرتبه گروه را عاد می‌کند، همچنین همه‌ی $p-$ زیرگروه‌های سیلو G باهم مزدوج می‌باشند.*

برهان. رجوع شود به [[۱۳]، قضیه ۳.۲.۳]. □

قضیه ۲۸.۱.۱. *فرض کنید G یک گروه متناهی است و عدد اول p مرتبه G را عاد کند. در این صورت G دارای $P-$ سیلو زیرگروه است.*

برهان. رجوع شود به [[۱۹]، قضیه ۶.۳]. □

نتیجه ۲۹.۱.۱. *فرض کنید P یک $p-$ سیلو زیرگروه G است. در این صورت $P \trianglelefteq G$، اگر و تنها اگر P تنها زیرگروه سیلو G باشد.*

[۴] Sylow