بنام خدا

دانشگاه علم و صنعت ایران

دانشکده مهندسی برق

پایان نامه کارشناسی ارشد

طراحی شبیه‌ساز نرم‌افزاری تعیین موقعیت یک ماهواره در مدار بیضوی

استاد راهنما

دکتر بلندی

دانشجو

حامد مختارپور اصل

چکیده

هر ماهواره برای انجام مأموریتی از پیش تعیین شده به فضا پرتاب می شود. این اهداف وقتی محقق می شوند که در اولین قدم موقعیت ماهواره در فضا بصورت لحظه به لحظه در اختیار بوده و کنتـرل گردد. تعیین موقعیت یک ماهواره در فضا عبارتست از مشخص کردن محل قرار گرفتن مرکـز جـرم ماهواره در فضا نسبت به زمین، خورشید و دیگر سیارات و ستارگان.

در این پروژه ابتدا با دینامیک مدارات فضائی، قوانین حاکم بر آنها و پارامترهای مداری آشنا شـده و روابط حاکم بر آنها را بصورت نرم‌افزاری پیاده‌سازی مـی‌کنـیم. الگوریتمهـای اسـتخراج پارامترهـای مداری با استفاده از مشاهدات مختلف ایستگاه زمینی را پیاده‌سازی و شبیه‌سازی می‌کنـیم. در ایـن راستا، تعیین موقعیت با استفاده از سه بردار رنج ایستگاه رادار یا لیزر، تعیین موقعیت بـا اسـتفاده از دو بردار رنج و زمان بین آنها، تعیین موقعیت با اسـتفاده از ایـستگاه رادار بـا قابلیـت سـنجش نـرخ مشاهدات و تعیین موقعیت با استفاده از ایستگاه لیزر مجهز بـه تلـسکوپ (جهـت ثبـت مـشاهدات زاویه‌ای) مورد بررسی، پیاده‌سازی و شبیه‌سازی قرار گرفته است.

از آنجاکه ماهواره در تمام مدت زمان پریود مداری در دید ایستگاه زمینی قـرار نـدارد؛ و از آنجاکـه گسترش تعداد ایستگاههای زمینی برای ثبت مشاهدات در تمام زمان پریود، عملی نمی‌باشد؛ با حل مسأله کپلر، موقعیت مداری را برای لحظات آینده تخمین زده‌ایم.

در پایان با استفاده از تمام الگوریتمهای پیاده‌سازی شده، سیمولاتور نرم‌افـزاری تعیـین موقعیـت را تولید نموده‌ایم.

فصل اول: دینامیک مداری

فصل دوم: تعیین مدار با استفاده از مشاهدات

فصل پنجم: شبیه سازی و نتیجه‌گیری

فصل اول

دینامیک مداری

۱-۱ اصول فیزیکی پایه

مکانیک مداری که به یک ماهواره اعمال میشود، بر پایه مکانیک سماوی است. در مطالعه حرکت ماهواره ها، اصولی کاملاً ابتدائی مورد نیاز میباشد. در حقیقت کپلر[۱]، سه قانون مبتنی بر تجربه را مطرح نمود که حرکت در یک مدار بدون حضور اغتشاشات را توصیف می کردند. قوانین مطرح شده توسط نیوتن، کلی تر بودند و حرکت یک سیاره را توصیف می نمودند. این قوانین شامل مشاهدات کپلر بودند[۱].

۱-۱-۱ قوانین کپلر و نیوتن

کپلر سه قانون تجربی برای حرکت سیاره ای بر پایه مشاهدات براهه[2] مطرح نمود.

قانون اول کپلر: "مدار هر سیاره حول خورشید، بصورت بیضی است که خورشید در یک کانون آن قرار دارد."

قانون دوم کپلر: "خطی که خورشید را به سیاره وصل می کند، در مدت زمانهای مساوی مساحتهای مساوی را جاروب میکند." (قانون مساحتها)

قانون سوم کپلر: "مربع پریود مداری یک سیاره متناسب است با مکعب نصف قطر بزرگ بیضی."

نیوتن سه قانون مکانیک و یک قانون برای قوه جاذبه مطرح نمود. بیشتر آنالیزهای مربوط به دینامیک مدارات فضا پیماها بر اساس قوانین نیوتن میباشد. این قوانین به شکل زیر فرموله می گردند:

۱- تا زمانیکه نیروهای خارجی به یک جسم وارد نشوند، جسم مایل به حفظ حالت خود میباشد.

اگر در حالت سکون باشد، در همان حالت باقی میماند و اگر در حال حرکت مستقیم الخط با سرعت ثابت باشد، با همان سرعت به حرکت ادامه میدهد.

۲- نرخ تغییرات گشتاور خطی یک جسم برابر است با نیروی F اعمالی به جسم؛ که $\vec{P} = m\vec{V}$ گشتاور خطی است و

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(m\vec{V})}{dt} \qquad ۱-۱$$

در این معادله، m جرم جسم و V بردار سرعت آن میباشد. برای جرم ثابت، معادله به شکل ساده زیر در می آید:

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad ۲-۱$$

که در آن $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$ شتاب خطی است.

۳- به ازای هر نیروی F_{12} اعمالی توسط جسم ۱ بروی جسم ۲، نیرویی (F_{21}) وجود دارد که از طرف جسم ۲ بر جسم ۱ وارد میشود و از نظر اندازه با آن برابر و درخلاف جهت آن میباشد.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \qquad ۳-۱$$

۴- هر دو ذره بر یکدیگر نیروی جاذبه ای بصورت زیر وارد میکنند:

Kepler [1]
Brahe [2]

$$\vec{F} = \frac{Gm_1 m_2 \vec{r}}{r^3}$$ ۴-۱

که $\vec{r}$ بردار فاصله دو ذره از یکدیگر میباشد. m_1 و m_2 جرمهای دو ذره و $G = 6.669*10^{-11} m^3 Kg^{-1} S^{-2}$ ثابت جهانی جاذبه میباشد [۱].

۱-۱-۲ کار و انرژی

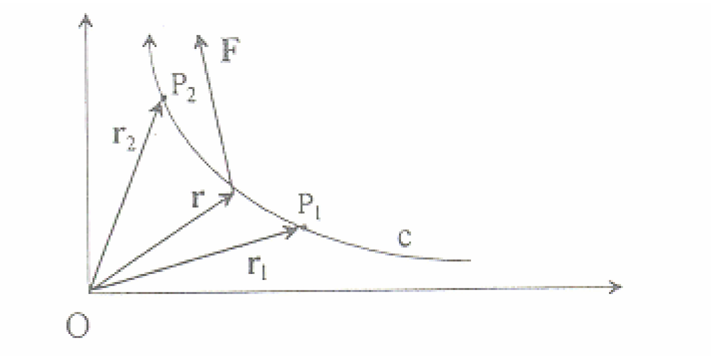
اگر نیروی F اعمال شده به جسم باعث جابجائی آن به اندازه dr گردد، کار انجام شده توسط این نیرو بر روی جسم بصورت زیر تعریف میگردد:

$$d\vec{W} = \vec{F}.d\vec{r}$$ ۵-۱

که یک ضرب نقطه ای است. یعنی فقط اجزائی از F که در راستای جابجائی dr قرار دارند، کار انجام میدهند. کار کل انجام شده توسط نیرو بر روی جسم برابر انتگرال خطی است:

$$W_{12} = \int_C \vec{F}.d\vec{r} = \int_{r1}^{r2} \vec{F}.d\vec{r}$$ ۶-۱

(شکل ۱-۱ را ببینید.)



شکل ۱-۱ انتگرال خطی نیرو و کار.

کار انجام شده روی جسم باعث تغییر انرژی جنبشی و پتانسیل آن می شود. نسبت به انرژی جنبشی، کل کار انجام شده بر روی جسم با حرکت آن در طول مسیر C از نقطه P_1 به P_2 در شکل ۱-۱ با رابطه زیر محاسبه میگردد:

$$W_{12} = \int_C F.dr = \int_C m\frac{dV}{dt}.dr = \int_{r1}^{r2} m.dV.V = \int_{r1}^{r2} \frac{m}{2} d(V^2)$$
$$= \frac{m}{2}(V_2^2 - V_1^2) = T_2 - T_1$$ ۷-۱

که عبارتست از اختلاف انرژی جنبشی در نقاط r_1 و r_2؛ و نیز $T = \frac{mV^2}{2}$ و $dW = dT$.

نسبت به انرژی پتانسیل، در میدانهای نیروی محافظه کار[۳] _ نیروئی که کار انجام شده توسط آن فقط به نقطه نهائی جابجائی جسم بستگی دارد، نه به مسیر حرکت._ تابع اسکالر U وجود دارد بطوریکه:

$$\vec{F} = -gradU(\vec{r}) \qquad \text{۸-۱}$$

در چنین میدانهائی اگر کار از نقطه P_1 تا P_2 انجام شود، داریم:

$$W_{12} = \int_{r1}^{r2} F.dr = \int_{r1}^{r0} F.dr + \int_{r0}^{r2} F.dr = \int_{r1}^{r0} F.dr - \int_{r2}^{r0} F.dr = U(r_1) - U(r_2) \qquad \text{۹-۱}$$

که در حقیقت اسکالر $U(r)$ به عنوان انرژی پتانسیل در r تعریف میگردد. از اینرو

$$dW = -dU \qquad \text{۱۰-۱}$$

همانطور که میدانیم، کار انجام شده در میدان نیروی محافظه کار به مسیر طی شده توسط نیرو بستگی ندارد و فقط تابع نقطه نهائی میباشد.

از معادلات ۱-۸ و ۱-۱۰ قانون زیر که قانون بقای انرژی است؛ بدست می آید:

$$T + U = const. = E \quad \text{و} \quad dT + dU = 0 \qquad \text{۱۱-۱}$$

که E انرژی کل میباشد. برای میدان نیروی محافظه کار، انرژی ثابت است (قانون بقای انرژی).

۱-۲ مسأله دو- جسم[۴]

مسأله دو جسم، مسأله و شرایط ساده شده ای است که به بررسی دو جسم که نسبت به هم دارای حرکت نسبی میباشند؛ میپردازد. این دو جسم در یک میدان نیرو که با قانون مربع معکوس (معادله ۱-۴) مشخص میشود، قرار دارند. یرای ساده شدن بحث در بدست آوردن نتایج تحلیلی حرکت اجسام یا فضاپیماها در فضا، فرض میشود که اجسام دیگر (غیر از مثلاً زمین و فضاپیما) به اندازه کافی از سیستم دو جسم دور هستند؛ و هیچ نیروی قابل توجهی از سوی یک جسم سوم بر آنها اعمال نمیگردد.

در شکل۱-۲ ، m_2 نیروی جاذبه $F_1 = m_1\ddot{r}_1$ را بر m_1 اعمال میکند و m_1 نیز نیروی $F_2 = m_2\ddot{r}_2$ را بر روی m_2:

$$F_1 = m_1\ddot{r}_1 = Gm_1m_2\frac{r_2 - r_1}{\left|r_2 - r_1\right|^3}$$

$$F_2 = m_2\ddot{r}_2 = Gm_1m_2\frac{r_1 - r_2}{\left|r_1 - r_2\right|^3} = -F_1 \qquad \text{۱-۱۲ و ۱-۱۳}$$

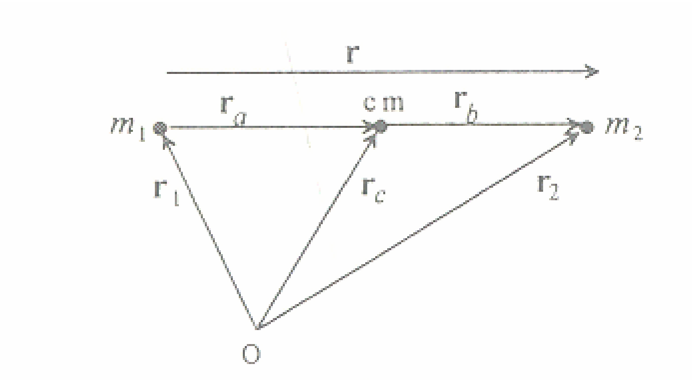
از معادلات ۱-۱۲ و ۱-۱۳ بدست می آید:

$$\ddot{r}_2 - \ddot{r}_1 = -G(m_1 + m_2)\frac{r_2 - r_1}{r^3} \qquad \text{۱ -۴}$$

و از آنجائیکه $r = r_2 - r_1$ پس:

---

conservative[3]
Two-Body [4]



شکل۱-۲ بردارهای جابجائی در سیستم دو جسم

$$\ddot{r} + G(m_1 + m_2)\frac{r}{r^3} = 0 \qquad ۱۵-۱$$

معادله۱-۱۵ معادله اساسی حرکت برای مسأله دو- جسم است.

مرکز جرم (cm) سیستم دو جسم را میتوان از معادله $\sum m_j r_j = 0$ بدست آورد. در نتیجه:

$$r_a m_1 - r_b m_2 = 0$$

در شکل ۱-۲ ، r_c بردار شعاعی از مبدأ دستگاه مختصات تا مرکز جرم سیستم دو- جسم بوده و r_a و r_b به ترتیب فاصله m_1 و m_2 از مرکز جرم سیستم میباشند. مشاهده میکنیم که $r_a = r_c - r_1$ و $r_b = r_2 - r_c$؛ یا بطور معادل

$$m_1(r_c - r_1) - m_2(r_2 - r_c) = 0$$

بنابراین

$$r_c(m_1 + m_2) = m_1 r_1 + m_2 r_2 \qquad ۱۶-۱$$

بعد از دو بار دیفرانسیل گیری از معادله ۱-۱۶ و در نظر گرفتن معادله ۱-۱۲ و ۱-۱۳، خواهیم داشت:

$$\dot{r}_c = const. \qquad ۱۷-۱$$
$$\ddot{r}_c = 0$$

معادله آخر نشاندهنده این است که مرکز جرم بدون شتاب بوده و سیستم میتواند در حرکت مستقیم الخط با سرعت ثابت باشد.

با توجه به تعریف مرکز جرم سیستم دو- جسم، میتوان نوشت:

$$r = r_a\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \quad و \quad r_b = r_a\left(\frac{m_1}{m_2}\right)$$

پس از دیفرانسیل گیری خواهیم داشت:

$$\ddot{r}_a = \ddot{r}\frac{m_2}{m_1 + m_2} \qquad ۱۸-۱$$
$$\ddot{r}_b = \ddot{r}\frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

اگر $m_1 >> m_2$ باشد، آنگاه $\ddot{r}_a = \ddot{r}\left(\frac{m_2}{m_1}\right) \to 0$ و $\ddot{r}_b = \ddot{r}$. نتیجه بدیهی این است که جسم خیلی کوچکتر(m_2)اثر قابل توجهی روی حرکت جسم خیلی بزرگتر (m_1) ندارد.

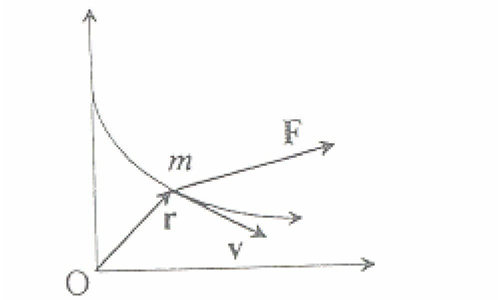
۱-۳ گشتاور زاویه ای[۵]

در شکل ۱-۳ ، r بردار موقعیت ذره m می باشد. این ذره در میدان نیروی F در حال حرکت است. گشتاور نیروی F حول مبدأ O عبارتست از:

۱۹-۱
$$\vec{M} = \vec{r} * \vec{F}$$

گشتاور زاویه ای حول O بصورت زیر تعریف میشود:

۲۰-۱
$$\vec{h} = m(\vec{r} * \vec{V}) = \vec{r} * (m\vec{V}) = \vec{r} * \vec{P}$$



شکل ۱-۳ گشتاور تولید شده توسط یک بردار نیرو

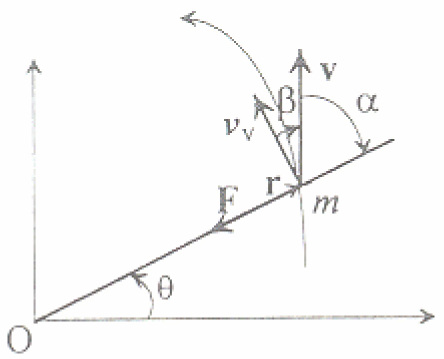
که $m\vec{V} = \vec{P}$، گشتاور خطی ذره میباشد. در ادامه داریم:

۲۱-۱
$$\frac{d\vec{h}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} * m\vec{V}\right) = \dot{r} * \left(m\vec{V}\right) + \vec{r} * \frac{d}{dt}\left(m\vec{V}\right)$$
$$= \vec{V} * \left(m\vec{V}\right) + \vec{r} * \frac{d}{dt}\left(m\vec{V}\right) = 0 + \vec{r} * \vec{F} = \vec{M}$$

معادله آخر بیانگر یک حقیقت بسیار مهم میباشد؛ اینکه گشتاور اعمال شده به ذره برابر است با نرخ تغییرات در زمان گشتاور زاویه ای آن. این حالت حتی با وجود جرم متغیر m یا وجود نیروی غیرمحافظه کار[۶] نیز صادق است.

---

[5] Moment of Momentum
[6] nonconservative



شکل ۱-۴ مؤلفه های شعاعی و عمودی بردار سرعت یک جسم

اگر حرکت جسم در میدان نیروی مشخص شده با قانون مربع معکوس اتفاق بیافتد؛ آنگاه گشتاور زاویه ای جسم ثابت باقی میماند. برای نشان دادن این مطلب،شکل ۱-۴ را در نظر بگیرید. نیروی مرکزی در مبدأ o قرار دارد. این نیرو ($\vec{F}$) در امتداد بردار شعاعی $\vec{r}$ از O تا جسم با جرم m اعمال میشود. تا زمانیکه $\vec{r}$ و $\vec{F}$ در یک راستا واقع شوند، $\vec{r}*\vec{F}=\vec{M}=0$ خواهد بود. با استفاده از معادله ۱-۲۱ برای جرم واحد در می یابیم که $dh/dt=0$ و $\vec{h}=\vec{r}*\vec{V}=const.$. بردار $\vec{h}$ را گشتاور زاویه ای خاص[7] می نامیم؛ که هم بر $\vec{r}$ و هم بر $\vec{V}$ عمود بوده و در فضا ثابت میباشد. این بدان معنی است که حرکت ذره در یک صفحه اتفاق می افتد [۱].

در شکل ۱-۴، α را به عنوان زاویه بین $\vec{V}$ و امتداد بردار $\vec{r}$ ؛ و β را به عنوان زاویه بین $\vec{V}$ و تعامد محلی[8] تعریف نموده ایم. از آنجائیکه $\vec{h}=\vec{r}*\vec{V}$ یک ضرب برداری است، $h=rv\sin(\alpha)=rv\cos(\beta)$. بنابراین از آنجائیکه $v_V=v\cos(\beta)$ جزئی از $\vec{V}$ است که بر $\vec{r}$ عمود می باشد، مقدار گشتاور زاویه ای برابر است با:

$$h=rv\cos(\beta)=rv_V=r\left(r\frac{d\theta}{dt}\right)=r^2\frac{d\theta}{dt} \qquad ۱-۲۲$$

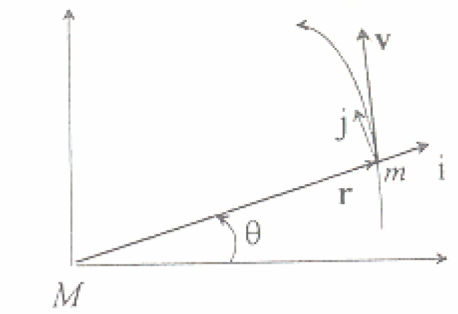
۱-۴ معادلات حرکت یک ذره در میدان نیروی مرکزی[9]

۱-۴-۱ معادلات حرکت یک جسم در مدار کپلری

بدلیل اینکه حرکت در یک صفحه انجام می گیرد، راحت تر است که معادلات حرکت را بفرم قطبی نوشته و حل نمائیم. در شکل ۱-۵ ، $\vec{i}$ و $\vec{j}$ به ترتیب بردارهای واحد در جهت $\vec{r}$ و v_V میباشند. میدانیم v_V جزئی از بردار سرعت است که بر بردار شعاعی $\vec{r}$ عمود می باشد. از آنجائیکه $\vec{r}=\vec{i}\,r$ میباشد، بدست می آید که [۲]:

---

specific angular momentum [7]
local horizontal [8]
central force field [9]



شکل ۱-۵ مؤلفه های شعاعی و عمودی حرکت در یک صفحه

$$\frac{d\vec{i}}{dt}=\frac{d\vec{i}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\vec{j}\,\dot{\theta}$$

$$\frac{d\vec{j}}{dt}=\frac{d\vec{j}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=-\vec{i}\,\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d\vec{i}}{dt}r+\vec{i}\,\frac{dr}{dt}=r\frac{d\theta}{dt}\vec{j}+\vec{i}\,\frac{dr}{dt}$$ ۱- ۲۳

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\frac{dr}{dt}\left(\vec{j}\,\frac{d\theta}{dt}\right)+r\left\{-\vec{i}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\vec{j}\,\frac{d^2\theta}{dt^2}\right\}+\frac{d^2r}{dt^2}\vec{i}+\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{j}$$

$$=\vec{i}\left\{\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}+\vec{j}\left\{2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right\}=-\frac{\mu}{r^2}\vec{i}=F(\vec{r})$$

که در آن $\mu=GM$. در نتیجه باید داشته باشیم:

$$2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+r\frac{d^2\theta}{dt^2}=\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)=0$$

بنابراین:

$$h=r^2\frac{d\theta}{dt}=const.$$ ۱-۲۴

(معادله ۱-۲۲ را ببینید.). پس خواهیم داشت:

$$\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=-\frac{\mu}{r^2}$$ ۱-۲۵

معادله ۱-۲۵ غیرخطی است و بطور مستقیم قابل حل نمی باشد ولی با جاگذاری متغیر r با $\frac{1}{u}$ می توان حل فرم بسته تحلیلی را بدست آورد. اگر $r=\frac{1}{u}$ باشد، داریم:

$$\frac{dr}{dt}=-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt}=-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$ ۱-۲۶

از معادله۱-۲۴ ، $h=r^2\left(d\theta/dt\right)$ و از آنجا $\frac{d\theta}{dt}=hu^2$.

پس:

$$\frac{dr}{dt}=-\frac{1}{u^2}\frac{d\theta}{dt}\frac{du}{d\theta}=-h\frac{du}{d\theta}$$ ۱-۲۷

$$\frac{d^2r}{dt^2}=-h\frac{d}{dt}\frac{du}{d\theta}=-h\frac{d}{d\theta}\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=-h\frac{d^2u}{d\theta^2}\frac{d\theta}{dt}=-h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$ ۲۸-۱

با استفاده از ۱-۲۸ در معادله ۱-۲۵ خواهیم داشت:

$$-h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}-\frac{1}{u}h^2u^4=-\mu u^2$$

یا

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{\mu}{h^2}$$ ۲۹-۱

که یک معادله خطی درجه دو برای u می باشد که حل آن بصورت زیر است:

$$u=\frac{\mu}{h^2}+c\cos(\theta-\theta_0)$$ ۳۰-۱

اگر $\theta=\theta_0$ باشد، در نتیجه $u=u_{\max}$ و $r=r_{\min}=1/u_{\max}$.

برای یافتن ثابت انتگرال c، از معادله انرژی (معادله ۱-۱۱) به ازاء جرم واحد $m=1$ استفاده می کنیم. در این مورد داریم:

$$E=\frac{v^2}{2}-\frac{\mu}{r}$$

این رابطه را «انرژی کل در واحد جرم[10]» گوئیم. ترمهای $\frac{v^2}{2}$ و $\frac{\mu}{r}$ را به ترتیب انرژی جنبشی و پتانسیل برای جرم واحد می نامیم. با مشاهده شکل ۱-۵ میتوان نوشت:

$$v^2=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2=h^2\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{hu^2}{u}\right)^2=h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right]$$ ۳۱-۱

با گرفتن مشتق از معادله ۱-۳۰ داریم:

$$\frac{du}{d\theta}=-c\sin(\theta-\theta_0)$$

و با توجه به معادله ۱-۳۱ خواهیم داشت:

$$v^2=\left[c^2+\frac{2\mu}{h^2}c\cos(\theta-\theta_0)+\left(\frac{\mu}{h^2}\right)^2\right]h^2$$

و E خواهد شد:

$$E=\frac{h^2}{2}c^2-\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{h^2}$$ ۳۲-۱

از این معادله آخر داریم:

$$c=\frac{\mu}{h^2}\sqrt{1+2E\frac{h^2}{\mu^2}}$$ ۳۳-1

اگر« خروج از مرکز[11]» را به شکل $e=\sqrt{1+2E\frac{h^2}{\mu^2}}$ تعریف نمائیم، داریم:

---

[10] total energy per unit mass
[11] eccentricity

$$E = \left(e^2 - 1\right)\frac{\mu^2}{2h^2}$$ ۳۴-۱

که یک رابطه خیلی مهم بین خروج از مرکز و انرژی کل یک مدار کپلری است.

با جاگذاری $\frac{1}{r}$ به جای u به معادله نهائی مدارات کپلری می رسیم:

$$r = \frac{h^2/\mu}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)} = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}$$ ۳۵-۱

در اینجا $p = \frac{h^2}{\mu}$ نمایانگر یک ثابت هندسی مدار بنام پارامتر[12] یا semi-latus rectum میباشد. معادله ۱-۳۵ معادله بخش مخروطی[13] می باشد. این معادله کلی مدار است و میتوان از آن معادله انواع مختلف مدارها را استخراج نمود. حرکت تحت نیروی مرکزی، چنین مداراتی را نتیجه می دهد [۲]. در بخش بعد به آنالیز این مدارات کپلری خواهیم پرداخت.

۱-۴-۲ آنالیز مدارات کپلری

مدارهای دایروی[14]

در مدارهای دایروی، خروج از مرکز برابر با صفر میباشد $(e = 0)$. r_اندازه بردار شعاعی $\vec{r}$ _ ثابت و برابر با $r = p = \frac{h^2}{\mu} = \frac{(rv\cos(\beta))^2}{\mu}$ میباشد. از طرفی در مدار دایروی $\beta = 0$ میباشد(سرعت جسم بر بردار شعاعی $\vec{r}$ عمود است)؛ پس خواهیم داشت:

$$v^2 = \frac{\mu}{r}$$ ۳۶-1

و سرعت نیز ثابت است. پس انرژی برابر است با

$$E = \frac{-\mu^2}{2h^2} < 0$$

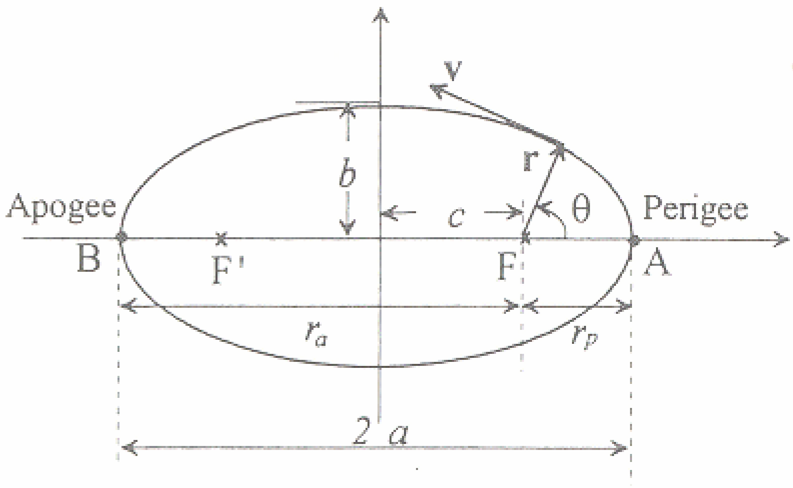
مدارهای بیضوی[15]

در مدارهای بیضوی، $0 < e < 1$ بوده و انرژی $E = \frac{(e^2 - 1)\mu^2}{2h^2} < 0$ می باشد. نقطه بیضی در $\theta = 0^\circ$ (نقطه A در شکل ۱-۶)، periapsis نامیده میشود و بردار شعاعی از کانون F تا نقطه periapsis کوچکترین بردار شعاعی قابل رسم از این کانون به نقاط روی بیضی میباشد. مقدار آن نیز طبق معادله ۱-۳۵ برابر است با:

$$r_p = \frac{p}{1 + e}$$ ۳۷-۱

---

[12] parameter
[13] conical
[14] circular
[15] elliptic



شکل ۱-۶ تعریف هندسی یک مدار بیضوی

برای مدارهای حول زمین، که در آنها زمین در کانون F قرار دارد، نقطه periapsis را حضیض[۱۶] مینامیم. r_p فاصله حضیض از کانون بیضی است. در مدارهای حول خورشید periapsis را سمت الشمس[۱۷] مینامیم.

قرارداد: *از این پس و تا پایان این پروژه به جای* periapsis *در تمام حالات آن از لفظ حضیض استفاده خواهیم نمود.*

اگر $\theta = 180^\circ$ باشد، آنگاه برای نقطه B در شکل ۱-۶ داریم:

$$r_a = \frac{p}{(1-e)} \qquad ۳۸-۱$$

نقطه B را apoasis گوئیم. این نقطه بزرگترین بردار شعاعی از کانون F را داراست. r_a نیز به بردار شعاعی apoasis اشاره دارد. apoasis در یک مدار حول زمین، نقطه اوج[۱۸] و در مدار حول خورشید، اوج خورشیدی[۱۹] نامیده میشود.

قرارداد: *از این پس و تا پایان این پروژه ، به جای* apoasis *در تمام حالات آن از لفظ نقطه اوج استفاده خواهیم نمود.*

از معادلات ۱-۳۷ و ۱-۳۸ میتوان نوشت:

$$\frac{r_a}{r_p} = \frac{(1+e)}{(1-e)}$$

در نتیجه:

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} \qquad ۳۹-۱$$

در بیضی قطر بزرگ برابر است با $2a = r_a + r_p = \dfrac{2p}{1-e^2}$ بنابراین:

---

perigee [16]
perihelion [17]
apogee [18]
aphelion [19]

$$p = a(1-e^2) = \frac{h^2}{\mu}$$ ۱-۴۰

و a را نصف قطر بزرگ[20] مینامیم.

از معادلات ۱-۱۱ و ۱-۱۲ انرژی کل یک جسم با جرم واحد در مدار را به شکل زیر بیان میکنیم:

$$E = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{(e^2-1)\mu^2}{2h^2} = \frac{(e^2-1)\mu}{2p} = \frac{(e^2-1)\mu}{2a(1-e^2)} = -\frac{\mu}{2a}$$ ۱-۴۱

که از آن:

$$\frac{v^2}{2} = \frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{2a}$$ ۱-۴۲

شرط اینکه مدار بیضوی باشد عبارتست از:

$$\frac{v^2}{2} < \frac{\mu}{r}$$ ۱-۴۳

از معادلات ۱-۳۴ و ۱-۴۱ انرژی برابر است با $-\frac{\mu}{2a}$؛ که ثابت انرژی[21] نامیده میشود.

برای یک بیضی داریم: $c = ae$. در معادله ۱-۴۰ یافتیم که: $p = a(1-e^2)$. همچنین میتوان به سادگی نشان داد که:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{a^2 - a^2e^2} = a\sqrt{1-e^2}$$

از آنجاکه $a = \frac{p}{1-e^2}$؛ پس داریم:

$$b = \frac{p\sqrt{1-e^2}}{1-e^2} = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$$ ۱-۴۴

که b را نصف قطر کوچک[22] مدار بیضوی گوئیم. به هر حال

$$c = \frac{pe}{1-e^2}$$ ۱-۴۵

که در آن c فاصله بین کانون F بیضی و مرکز هندسی آن می باشد. (شکل ۱-۶ را ببینید.)

مدارهای سهموی[23]

مدارهای سهموی دارای اهمیت عملی نمی باشند. مشخصه آنها $E = 0$ و $e = 1$ میباشد. در نتیجه:

$$r = \frac{p}{1+\cos(\theta)} \quad , \quad r_p = \frac{p}{2}$$

و آنگاه:

$$r = \frac{2r_p}{1+\cos(\theta)}$$

از $E = 0$ نتیجه میشود: $a \to \infty$؛ و همچنین

semimajor axis [20]
energy constant [21]
semiminor axis [22]
Parabolic [23]

$$v^2 = \frac{2\mu}{r}$$ ۴۶-۱

سرعت در معادله ۱-۴۶ ، «سرعت گریز[۲۴]» مورد نیاز جهت ترک مدار سهموی حول جسم مرکزی (کانون F) در شکل ۱-۶ می باشد. به عبارت دیگر فضاپیما میتواند در میدان جاذبه اجسام مرکزی جدیدی مانند ماه قرار بگیرد. جالب است توجه نمائیم که سرعت گریز فقط با ضریب $\sqrt{2}$ از سرعت مدار دایروی در فاصله یکسان r از کانون F، بیشتر است.

مدارهای هایپربولیک[۲۵]

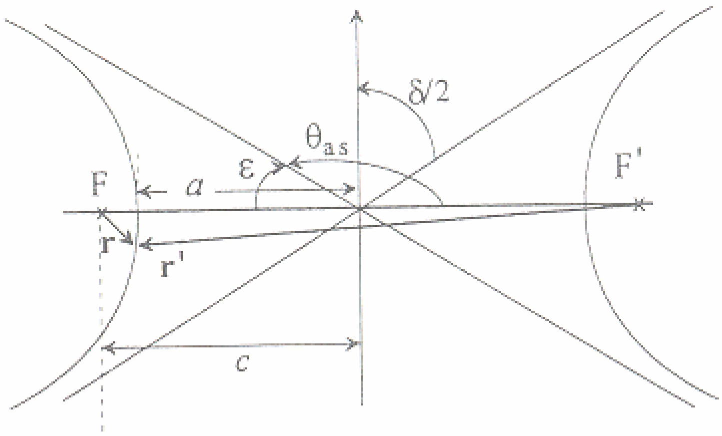
برای این کلاس مهم از مدارات، انرژی کل E مثبت است ($E > 0$). این بدان معنی است که انرژی جنبشی فضاپیما بیشتر از انرژی پتانسیل آن می باشد. در نتیجه فضاپیما قادر به ترک میدان جاذبه جسم مرکزی می باشد. ماهواره ای که در یک مدار هایپربولیک حرکت میکند، حول یک جسم مرکزی نمی چرخد.

از آنجاکه $E > 0$، با توجه به معادله ۱-۴۱ داریم: $a = \frac{-\mu}{2E} < 0$. اگر بخواهیم که $a > 0$ باشد؛ باید معادله ۱-۴۰ را بصورت زیر تغییر دهیم:

$$p = a\left(e^2 - 1\right)$$

در نتیجه $p > 0$ شده و داریم:

$$r = \frac{a\left(e^2 - 1\right)}{1 + e\cos(\theta)} = \frac{p}{1 + e\cos(\theta)}$$ ۴۷-۱



شکل ۱-۷ هندسه مدار هایپربولیک

به هر حال با افزایش r به سمت بی نهایت، $1 + e\cos(\theta)$ به سمت صفر می رود؛ چراکه P برای یک مدارخاص، دارای مقدار ثابتی است. در این حالت (شکل ۱-۷ را ببینید.) معادله خطوط مجانب بصورت زیر خواهد بود:

---

escape velocity [24]
Hyperbolic [25]

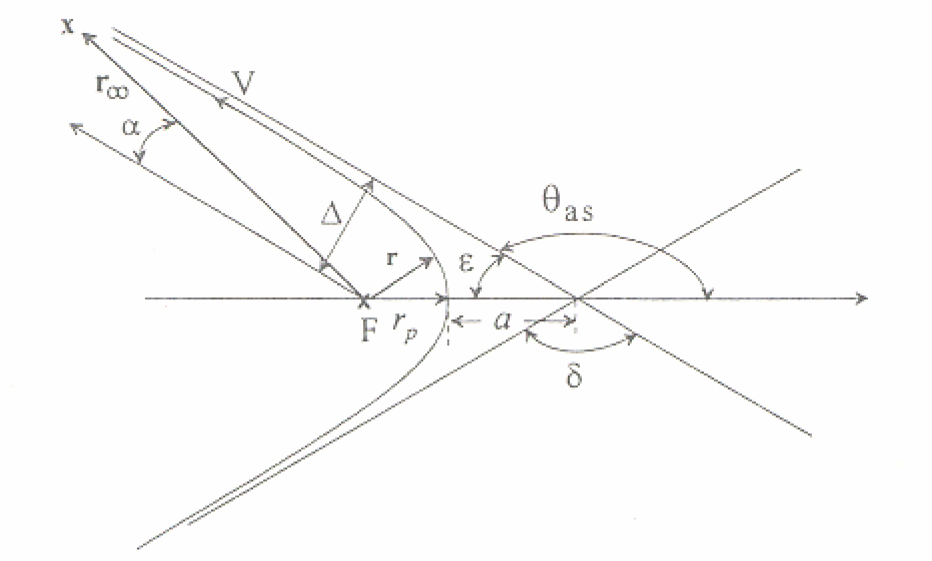
$$\cos(\theta_\infty) = \cos(\theta_{as}) = -\frac{1}{e}$$ ۴۸-۱

بدلیل اینکه $\varepsilon = \pi - \theta_\infty = \frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}$ نتیجه میدهد که $\theta_\infty = \frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2}$؛ در نتیجه:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2}\right) = \cos(\theta_\infty) = -\frac{1}{e} = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

و در نهایت:

$$\sin\left(\frac{\delta}{2}\right) = \frac{1}{e}$$ ۴۹-۱



شکل ۱-۸ هندسه مدارات هایپربولیک مورد استفاده در سفرهای بین سیاره ای

مدارات هایپربولیک جهت سفرهای بین سیاره ای فضاپیماها مورد استفاده قرار می گیرند. عملکرد آنها در $r \to \infty$ جذابیت خاص خود را دارد (کاپلن ۱۹۷۶). شکل ۱-۸ را ببینید. گشتاور زاویه ای در نقطه X را درنظر بگیرید. نقطه X خیلی دورتر از کانون F میباشد. داریم:

$$h = Vr\sin(\alpha) = V\Delta = V_\infty\Delta$$

انرژی کل در بی نهایت برابر است با:

$$E = \frac{V_\infty^2}{2} - \frac{\mu}{r_\infty} = -\frac{\mu}{2a}$$

بنابراین:

$$a = -\frac{\mu}{V_\infty^2}$$ ۵۰-۱

ولی از طرفی داریم: $p = a(e^2 - 1)$. پس

$$p = \frac{\mu}{V_\infty^2}(e^2 - 1) = \frac{V_\infty^2\Delta^2}{\mu} = \frac{h^2}{\mu}$$

و