بسمه تعالی

جلسه دفاع از رساله دکتری

خواص هندسی فضاهای همگن

سخنران: مهری ناصحی نجف آبادی

زمان: سه شنبه ۳۰ /۱۰/ ۹۳ ساعت ۲ بعد از ظهر
مکان: سالن خوارزمی دانشکده‌ی علوم ریاضی

هیئت داوران

۱– دکتر منصور آقاسی

۲– دکتر اعظم اعتماد

۳– دکتر اسداللّه رضوی (دانشگاه کرمان)

۴– دکتر بهروز بیدآباد (دانشگاه صنعتی امیرکبیر)

۵– دکتر فرید بهرامی

چکیده:

مطالعه‌ی خواص هندسی فضاهای همگن و گروه‌های لی یکی از زمینه‌های تحقیقاتی پرجاذبه در هندسه‌ی دیفرانسیل است که از جمله‌ی این خواص می‌توان به مطالعه‌ی ژئودزی‌های همگن، ساختارهای مختلط و اتصالی پایا، سولیتن ریچی پایا و غیره اشاره نمود که دارای کاربردهای متعددی در فیزیک و مکانیک هستند. از این‌رو در این رساله ابتدا یک کلاس از گروه‌های لی حل پذیر M^{2n+1} را در نظر می‌گیریم که در سال ۱۹۸۰ توسط بزک[۱] مطرح شده‌اند و شکل دقیقی از همه‌ی ساختارهای همگن و نوع آن‌ها را در دو حالت ریمان و لوران بر روی این فضاها بیان می‌کنیم. سپس به بررسی تابع انرژی یک میدان برداری دلخواه پایای چپ از این فضاها می‌پردازیم و در حالت لوران ثابت می‌کنیم که هیچ‌کدام از میدان‌های برداری زمان‌گون بر روی این فضاها نقطه‌ی بحرانی برای تابع انرژی فضاگون نیستند. هم‌چنین شکل دقیقی از ابررویه‌های کاملاً ژئودزی، توازی پذیر و نیمه‌توازی پذیر را روی این فضاها معرفی کرده و ثابت می‌کنیم که روی این فضاها ساختارهای اتصالی پایا، سولیتن یامابی و سولیتن ریچی پایای چپ وجود ندارند. در ادامه با توجه به اهمیت مترهای فینسلر و به‌طور خاص مترهای رندرز در فیزیک، فضاهای همگن را در نظر می‌گیریم که به مترهای رندرز مجهز شده‌اند و به معرفی و رده بندی یک ساختار هندسی روی گروه‌های لی می‌پردازیم که به یک متر رندرز از نوع بروالد مجهز شده‌اند. سرانجام با استفاده از مطالعه‌ی ویژگی‌های هندسی این فضاها یک قضیه برای فضاهای همگن رندرز تحویل پذیر را بهبود داده و دو نتیجه برای مترهای رندرز از نوع داگلاس بر روی این فضاها را تعمیم می‌دهیم.

کلمات کلیدی: گروه‌های لی حل پذیر، منیفلدهای همگن، ژئودزی‌های همگن، ساختارهای اتصالی و مختلط پایای چپ، سولیتن ریچی پایای چپ، ساختارهای همگن، مترهای رندرز پایای چپ.

---

[۱] Bozek

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

خواص هندسی فضاهای همگن

رساله برای دریافت درجه دکتری در رشته ریاضی

مهری ناصحی نجف آبادی

استاد راهنما

دکتر منصور آقاسی

دی ۱۳۹۳

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

رساله برای دریافت درجه دکتری در رشته ریاضی خانم مهری ناصحی نجف آبادی
تحت عنوان

خواص هندسی فضاهای همگن

در تاریخ ۹۳/۱۰/۳۰ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تأیید نهایی قرار گرفت.

۱– استاد راهنما دکتر منصور آقاسی

۲– استاد مشاور دکتر اعظم اعتماد

۳– استاد داور۱ دکتر اسدالله رضوی (دانشگاه کرمان)

۴– استاد داور۲ دکتر بهروز بیدآباد (دانشگاه صنعتی امیرکبیر)

۵– استاد داور۳ دکتر فرید بهرامی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده دکتر فرید بهرامی

سپاس و ستایش کردگار یکتایی که ذات بیکرانش آکنده از علم و دانش است و چه با سخاوت از این خوان بی همتا، بشر را موهبتی شگرف ارزانی داشت و دریای کمالات خود را بر روی گشود.

نهایت سپاس و تشکر را به حضور اولین و بزرگترین معلمانم پدر و مادر عزیزم و خواهر و برادرانم که همواره مشوق من بوده و با دلگرمی هایشان سختی این مسیر را برایم هموار نمودند تقدیم می نمایم.

بر خود لازم می دانم که نهایت تشکر و سپاس صمیمانه را از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر منصور آقاسی که به عنوان استاد راهنما در مراحل مختلف انجام این رساله همراه و همگام من بودند و اولین جرقه های علاقه ی من به گروه های لی از کلاس های درس ایشان حاصل شد و اینکه جبران قطره ای از زحمت ها و محبت هایشان برایم ممکن نیست، ابراز نمایم.

از سرکار خانم دکتر اعظم اعتماد که به عنوان استاد مشاور تصحیح و بازبینی این رساله را بر عهده گرفتند و همواره بار، هنمودهای ارزنده ی خود مرا یاری نموده اند صمیمانه سپاسگزارم.

از اساتید ارجمندم جناب آقای دکتر اسدالله رضوی، جناب آقای دکتر بهروز بید آباد و جناب آقای دکتر فرید بهرامی که زحمت بازخوانی و داوری این رساله را بر عهده داشته اند از صمیم قلب سپاسگزارم.

در پایان از دوستان عزیزم و تمام کسانی که در دوره ی تحصیل در دانشگاه صنعتی اصفهان مرا یاری نمودند قدردانی می نمایم.

دی ۱۳۹۳

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

به خاطر همه ی تلاش های محبت آمیزی که در دوران مختلف زندگی ام انجام داده اند

و با مهربانی چگونه زیستن را به من آموخته اند.

فهرست مطالب

چکیده:

مطالعه‌ی خواص هندسی فضاهای همگن و گروه‌های لی یکی از زمینه‌های تحقیقاتی پرجاذبه در هندسه‌ی دیفرانسیل است که از جمله‌ی این خواص می‌توان به مطالعه‌ی ژئودزی‌های همگن، ساختارهای مختلط و اتصالی پایا، سولیتن ریچی پایا و غیره اشاره نمود که دارای کاربردهای متعددی در فیزیک و مکانیک هستند. از این‌رو در این رساله ابتدا یک کلاس از گروه‌های لی حل پذیر M^{2n+1} را در نظر می‌گیریم که در سال ۱۹۸۰ توسط بزک [1] مطرح شده‌اند و شکل دقیقی از همه‌ی ساختارهای همگن و نوع آن‌ها را در دو حالت ریمان و لوران بر روی این فضاها بیان می‌کنیم. سپس به بررسی تابع انرژی یک میدان برداری دلخواه پایای چپ از این فضاها می‌پردازیم و در حالت لوران ثابت می‌کنیم که هیچ‌کدام از میدان‌های برداری زمان‌گون بر روی این فضاها نقطه‌ی بحرانی برای تابع انرژی فضاگون نیستند. هم‌چنین شکل دقیقی از ابررویه‌های کاملاً ژئودزی، توازی پذیر و نیمه‌توازی پذیر را روی این فضاها معرفی کرده و ثابت می‌کنیم که روی این فضاها ساختارهای اتصالی پایا، سولیتن یامابی و سولیتن ریچی پایای چپ وجود ندارند. در ادامه با توجه به اهمیت مترهای فینسلر و به‌طور خاص مترهای رندرز در فیزیک، فضاهای همگن را در نظر می‌گیریم که به مترهای رندرز مجهز شده‌اند و به معرفی و رده بندی یک ساختار هندسی روی گروه‌های لی می‌پردازیم که به یک متر رندرز از نوع بروالد مجهز شده‌اند. سرانجام با استفاده از مطالعه‌ی ویژگی‌های هندسی این فضاها یک قضیه برای فضاهای همگن رندرز تحویل پذیر را بهبود داده و دو نتیجه برای مترهای رندرز از نوع داگلاس بر روی این فضاها را تعمیم می‌دهیم.

کلمات کلیدی: گروه‌های لی حل پذیر، منیفلدهای همگن، ژئودزی‌های همگن، ساختارهای اتصالی و مختلط پایای چپ، سولیتن ریچی پایای چپ، ساختارهای همگن، مترهای رندرز پایای چپ.

---

[1] Bozek

فصل ۱

مقدمه

یک منیفلد M را یک فضای همگن می‌نامیم، هرگاه به فرم $M = \frac{G}{H}$ باشد که در آن G یک گروه لی و H یک زیرگروه بسته از G است. در نتیجه اگر H یک گروه همانی باشد فضای همگن به یک گروه لی تبدیل می‌شود. گروه‌های لی یک رابطه‌ی نزدیک بین دو شاخه‌ی بزرگ از ریاضی یعنی جبر و توپولوژی برقرار می‌کنند. از این‌رو مطالعه‌ی خواص هندسی فضاهای همگن و گروه‌های لی یکی از زمینه‌های تحقیقاتی پر جاذبه در هندسه‌ی دیفرانسیل است که از جمله‌ی این خواص می‌توان به مطالعه‌ی ژئودزی‌های همگن، ساختارهای مختلط و تماسی پایا، سولیتن ریچی پایا و غیره اشاره نمود که دارای کاربردهای متعددی در فیزیک و مکانیک هستند. به عنوان مثال ژئودزی‌های همگن در مکانیک متناظر با نسبیت تعادل هستند که در مسائل مربوط به حرکت میدان جاذبه کاربرد دارند([۱۱]). از این‌رو می‌توان معادله‌ی حرکت بسیاری از سیستم‌های مکانیک کلاسیک را به معادله‌ی ژئودزی در یک منیفلد مناسب کاهش داد. هم‌چنین مطالعه‌ی حرکت ذرات باردار بر روی فضاهای متفاوت، نشان می‌دهد که چنین معادله‌هایی تعمیمی از معادله‌ی یک ژئودزی همگن هستند.

مطالعه‌ی ژئودزی‌های همگن به وسیله‌ی هرمان [۱]، کاستنت و وینبرگ [۲] شروع شد. در حقیقت آن‌ها یک شرط جبری را برای یک ژئودزی همگن پیدا نمودند. سپس کاجزر [۳] ثابت کرد که گروه لی G با متر پایای چپ ریمانی g دارای حداقل یک ژئودزی همگن است که از نقطه‌ی همانی آن می‌گذرد. این مطالعه در سال ۲۰۰۰ توسط کوالسکی [۴] و سزنت [۵] به منیفلدهای همگن تعمیم پیدا کرد. آنان هم‌چنین ثابت کردند که منیفلد همگن ریمانی $(\frac{G}{H}, g)$ با بعد m که

---

[۱] Hermann

[۲] Vinberg and Kostant

[۳] Kajzer

[۴] Kowalski

[۵] Szenthe

در آن G یک گروه لی حل پذیر است تعداد m ژئودزی متعامد ضربی می‌پذیرد. از این‌رو زمینه‌ی مطالعه بر روی تعداد ژئودزی‌های متعامد ضربی روی منیفلدهای همگن که دارای گروه‌های لی نیمه‌ساده نبودند مطرح شد. از جمله‌ی این مطالعات می‌توان به [۲۲] اشاره نمود که در آن نویسندگان به بررسی ژئودزی‌های همگن بر روی یک کلاس از گروه‌های لی حل پذیر M^{2n+1} پرداخته‌اند. ژئودزی‌های همگن در حالت شبه ریمان در سال ۲۰۰۶ در فیزیک مطرح شدند و در سال ۲۰۰۹ این مفاهیم به حالت آفین گسترش یافتند. با توجه به روند مطالعات انجام گرفته یک سوال طبیعی این است که آیا نتایج به‌دست آمده برای ژئودزی‌های همگن بر روی گروه‌های لی حل پذیر M^{2n+1} در حالت لوران مشابه با حالت ریمان است یا نه؟ یکی از اهداف این رساله پاسخ دادن به این سوال است. در حقیقت در فصل سوم به مطالعه‌ی ژئودزی‌های همگن بر روی گروه‌های لی حل پذیر M^{2n+1} در حالت لوران می‌پردازیم. این نتیجه مقدمه‌ای می‌شود که به مطالعه‌ی سایر ویژگی‌های هندسی بر روی این فضاها پرداخته شود. در حقیقت در این فصل ابتدا شکل دقیقی از همه‌ی ساختارهای همگن و نوع آن‌ها را در دو حالت ریمان و لوران روی این فضاها بیان می‌کنیم. سپس به بررسی تابع انرژی از یک میدان برداری دلخواه پایای چپ بر روی این فضاها می‌پردازیم و در حالت لوران ثابت می‌کنیم که هیچ‌کدام از میدان‌های برداری زمان‌گون روی این فضاها نقطه‌ی بحرانی برای تابع انرژی فضاگون نیستند. سپس شکل دقیقی از ابررویه‌های کاملاً ژئودزی، توازی پذیر و نیمه‌توازی پذیر بر روی این فضاها بیان می‌شود و در ادامه ثابت می‌شود که روی این فضاها ساختارهای تماسی پایا و سولیتن ریچی پایای چپ وجود ندارند.

در فصل چهارم که شامل دو بخش است به مطالعه‌ی ویژگی‌های هندسی بر روی دو خانواده از فضاهای همگن اختصاص دارد. در حقیقت در بخش اول منیفلد پرچم $\frac{SO(7)}{U(3)}$ را در نظر می‌گیریم. این منیفلد به عنوان مثالی از یک فضای همگن دارای این ویژگی است که تمام ژئودزی‌های آن همگن هستند(یعنی یک فضای g.o. است)، ولی به‌طور طبیعی تحویل پذیر نیست. به همین دلیل این منیفلد مورد توجه بسیاری از تحقیقات از جمله [۱۲]، [۱۵] و [۲۹] قرار گرفته است. از این‌رو در این بخش ابتدا شکل دقیق ساختارهای کیلر را روی این منیفلد به‌دست می‌آوریم و سپس تمام تماسی سازی‌های ۱۳ بعدی بر روی آن بیان می‌شود و نشان داده خواهد شد که این ساختارها ساساکی هستند. هم‌چنین شکل دقیق ساختارهای همگن و نوع آن‌ها را نیز روی این فضای همگن بیان می‌نماییم. در بخش دوم از این فصل گروه‌های لی چهار بعدی پارا ابر مختلط را در نظر می‌گیریم. ساختارهای پارا ابر مختلط که در سیگما مدل‌های ابرمتقارن ظاهر می‌شوند کاربردهای مهمی در فیزیک دارند. در [۱۳] باربریز [6] گروه‌های لی ابرمختلط ۴− بعدی را رده بندی نمود. این رده بندی به وسیله‌ی وکمیروی و بلازیک در حالت پارا ابر مختلط در [۱۶] انجام گرفت. سپس سلیمی مقدم در [۴۹] شکل دقیقی از التصاق‌های لوی چیویتا و انحنای برشی را بر روی این فضاها به‌دست آورد. به همین دلیل در بخش دوم از این فصل ابتدا به بیان شکل دقیقی از تمام نگاشت‌های همساز بر روی این فضاها و سپس به محاسبه‌ی انرژی یک میدان برداری دلخواه بر روی این فضاها پرداخته می‌شود. هم‌چنین سولیتن ریچی و سولیتن یامابی پایای چپ روی این فضاها بیان می‌شوند. اثبات وجود گروه‌های لی چهاربعدی پارا ابر مختلط انیشتین

[6] Barberis

از نتایج دیگر این بخش است.
در فصل پنجم که شامل سه بخش است فضاهای همگن را که به مترهای رندرز مجهز شده‌اند در نظر می‌گیریم. مترهای رندرز نخستین بار در حین مطالعه‌ی نظریه‌ی نسبیت توسط رندرز مطرح شدند. این مترها به وسیله‌ی اینگاردن که از آن‌ها برای توصیف حرکت نسبی یک الکترون استفاده نمود تحت عنوان مترهای رندرز نامگذاری شدند. با توجه به اینکه مترهای رندرز تعمیمی از مترهای ریمان هستند یکی از مسائل اساسی در هندسه تعمیم و گسترش ویژگی‌های هندسی فضاهای همگن از حالت ریمان به رندرز و به‌طور کلی حالت فینسلر است. در این زمینه می‌توان به مقالات دنگ، هایو و هو اشاره نمود (مراجع [۲۶،۲۷،۵۵]). هم‌چنین در مورد ویژگی هندسی ژئودزی‌های همگن در حالت فینسلر و رندرز می‌توان به مقالات رضوی، لطیفی و تومانیان اشاره نمود(مراجع [۴۰، ۴۲–۴۴]). اخیراً دنگ در کتابی تحت عنوان "فضاهای همگن رندرز" به گردآوری مطالب چاپ شده در نشریات مختلف در این زمینه پرداخته است([۲۵]). با توجه به مطالعات انجام گرفته در این زمینه تعمیم ساختارهای همگن از حالت ریمان به رندرز یکی از کارهایی است که می‌توان انجام داد. پیدایش ساختارهای همگن در حالت ریمان با مطالعات کارتان [۷] در سال ۱۹۲۶ بر روی فضاهای متقارن ریمانی به وجود آمد. سپس امبروز [۸] و سینگر [۹] در سال ۱۹۵۸ با استفاده از یک (۲،۱)- میدان تانسوری S که بعدها به وسیله‌ی تریسری و وانهک[۱۰] ساختار همگن نامیده شد این مطالعه را بر روی فضاهای همگن ریمانی تعمیم دادند. سرانجام در سال ۱۹۹۲ گادیا و اوبینا این ساختارها را به حالت شبه ریمانی تعمیم دادند. هم‌چنین تاکنون مطالعات فراوانی برای یافتن این ساختارها بر روی فضاهای متفاوت انجام گرفته است که از جمله‌ی آن‌ها می‌توان به مراجع [۱۴،۴] اشاره نمود. از این‌رو در بخش اول این فصل ابتدا به معرفی و رده بندی یک ساختار همگن رندرز بر روی گروه‌های لی می‌پردازیم که به یک متر رندرز پایای چپ از نوع بروالد مجهز شده‌اند. سپس تمام ساختارهای همگن رندرز را روی گروه‌های لی سه بعدی به‌دست می‌آوریم. در بخش دوم به بهبود یک نتیجه برای فضاهای همگن رندرز به‌طور طبیعی تحویل پذیر $(M = \frac{G}{H}, F)$ پرداخته و سرانجام در بخش سوم ویژگی‌های هندسی خانواده‌ای از فضاهای همگن را مطالعه می‌کنیم که به یک متر رندرز از نوع داگلاس مجهز شده‌اند. تعمیم قضایایی از مراجع [۴۸] و [۵۰] از جمله نتایج این بخش است.
در این رساله با توجه به اینکه مرجع [۳۰] از نماد G_n برای نمایش گروه‌های لی حل پذیر M^{2n+1} استفاده نموده است از همین نماد برای نمایش این گروه‌های لی استفاده می‌نماییم.

---

[۷] Cartan

[۸] Ambrose

[۹] Singer

[۱۰] Vanhecke and Tricerri

فصل ۲

تعاریف و مفاهیم اولیه

در این فصل به بیان بعضی تعاریف و مفاهیم از هندسه‌ی ریمانی، فضاهای همگن و مترهای رندرز می‌پردازیم. مهم‌ترین مراجع مورد استفاده در این بخش‌ها عبارتند از [۴۷،۳۵] و [۲۵].

۱.۲ مروری بر هندسه‌ی ریمانی

این بخش را به یادآوری برخی مفاهیم موجود در هندسه‌ی ریمانی که در فصل‌های بعد از آن‌ها استفاده خواهیم کرد اختصاص می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۲ فرض کنید M یک منیفلد هموار و $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ یک خم هموار باشد. اگر $C^\infty(p)$ مجموعه‌ی تمام توابع $f : M \to \mathbb{R}$ باشد که در یک همسایگی از نقطه‌ی $p = \gamma(\circ)$ هموار باشند، آنگاه عملگر $\gamma'(\circ) : C^\infty(p) \to \mathbb{R}$ با تعریف $\gamma'(\circ)(f) = \frac{d(f\circ\gamma)}{dt}(\circ)$ بردار مماس بر خم γ در نقطه‌ی p نامیده می‌شود. یک بردار مماس بر خم هموار $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ در نقطه‌ی $p = \gamma(\circ)$، یک بردار مماس بر M در نقطه‌ی p نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۱.۲ فرض کنید M یک منیفلد هموار باشد. در این‌صورت مجموعه‌ی بردارهای مماس در نقطه‌ی p از منیفلد M را با T_pM نمایش می‌دهند و آن را فضای مماس بر منیفلد M می‌نامند. اجتماع مجزا از فضاهای مماس $(TM = \sqcup_{p\in M} T_pM)$ کلاف مماس نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۱.۲ فرض کنید M یک منیفلد هموار و $\pi_M : TM \to M$ نگاشت تصویر کلاف مماس باشد. یک میدان برداری هموار روی M نگاشتی هموار مانند $X : M \to TM$ است به نحوی که $\pi_M \circ X = 1_M$. در واقع X به هر نقطه‌ی $p \in M$ بردار مماس $X_p \in T_pM$ را نظیر می‌کند. مجموعه‌ی میدان‌های برداری هموار را با $\chi(M)$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۴.۱.۲ اگر برای منیفلد هموار M قرار دهیم $\chi(M)^* = Hom_{C^\infty(M)}(\chi(M), C^\infty(M))$ (دوگان مجموعه‌ی $\chi(M)$، که در آن $C^\infty(M)$ مجموعه‌ی تمام توابع هموار بر M را نمایش می‌دهد)، آن‌گاه یک میدان تانسوری از نوع (k,l) روی M عبارت است از یک نگاشت

$$\underbrace{\chi(M)\times\cdots\times\chi(M)}_{k}\times\underbrace{\chi(M)^*\times\cdots\times\chi(M)^*}_{l}\to C^\infty(M)$$

به‌طوری که نسبت به تک تک مؤلفه‌هایش $C^\infty(M)$–خطی باشد.

مثال ۵.۱.۲ نگاشت $J = \frac{\partial}{\partial x}\otimes dx + \frac{\partial}{\partial y}\otimes dy$ یک میدان تانسوری از نوع $(1,1)$ روی $\mathbb{R}^2$ است. ★

تعریف ۶.۱.۲ فرض کنید M یک منیفلد هموار باشد. یک متر ریمانی روی M عبارت است از یک میدان تانسوری از نوع $(2,0)$ به‌طوری که برای هر $p\in M$ تحدید $g_p := g|_{T_pM\otimes T_pM} T_pM\otimes T_pM\to\mathbb{R}$ با تعریف $g_p(X_p,Y_p)=g(X,Y)(p)$ در شرایط زیر صدق کند.

(۱) g به‌طور معین مثبت باشد، یعنی برای هر $X_p\in T_pM$، $g_p(X_p,X_p)\geqslant 0$ و اگر $g_p(X_p,X_p)=0$، آن‌گاه $X_p=0$ یعنی g ناتباهیده باشد.

(۲) g متقارن باشد، یعنی برای هر $X_p,Y_p\in T_pM$، $g_p(X_p,Y_p)=g_p(Y_p,X_p)$.

مثال ۷.۱.۲ متر $g=\sum_{i=1}^{n}(dx^i)^2$ یک متر ریمانی روی $\mathbb{R}^n$ است. ★

تعریف ۸.۱.۲ فرض کنید M یک منیفلد هموار و g یک متر ریمانی نامعین روی M باشد و $\{e_1,\cdots,e_n\}$ یک پایه‌ی شبه متعامد یکه برای فضای مماس بر M در نقطه‌ی p باشد (یعنی به ازای هر $i\neq j$، $g_p(e_i,e_i)=\pm 1$ و $g_p(e_i,e_j)=0$). در این‌صورت به زوج مرتب $(p,n-p)$ که در آن برای $1\leq i\leq p$، $g_p(e_i,e_i)=1$ و برای $p+1\leq i\leq n$، $g_p(e_i,e_i)=-1$ نماد (علامت) این متر می‌گویند.

مثال ۹.۱.۲ متر $\tilde{g}=dx_1^2+\cdots+dx_p^2-dx_{p+1}^2-\cdots-dx_{n+1}^2$ برای منیفلد $\mathbb{R}^{n+1}$ از نماد $(p,n+1-p)$ است. ★

تعریف ۱۰.۱.۲ یک متر شبه ریمانی g از نماد (p,q) روی منیفلد هموار M با بعد $n=p+q$ عبارت است از یک میدان تانسوری g از نوع $(2,0)$ به‌طوری که ناتباهیده، متقارن و از نماد (p,q) باشد. منیفلد M را که به چنین متری مجهز شده باشد، یک منیفلد شبه ریمانی می‌نامند.

تذکر ۱۱.۱.۲ در تعریف فوق اگر $q=0$ (یعنی وقتی که g مثبت معین است)، g یک متر ریمانی و (M,g) یک منیفلد ریمانی خواهد بود و در حالتی که $q=1$ (و $p>0$)، g یک متر لوران و (M,g) یک منیفلد لورنتسی نامیده می‌شود.

تذکر ۱۲.۱.۲ یک بردار مماس v در یک نقطه‌ی x از یک منیفلد لورنتسی (M,g) به ترتیب فضاگون، زمان‌گون و نورگون نامیده می‌شود هرگاه به ترتیب داشته باشیم $g_x(v,v)>0$، $g_x(v,v)<0$ و $g_x(v,v)=0$.

مثال ۱۳.۱.۲ متر ریمانی $\tilde{g}$ در مثال ۹.۱.۲ یک متر شبه ریمانی روی $\mathbb{R}^{n+1}$ القا می‌کند و زیر منیفلد S^n با فرض $n=p-1$ یک منیفلد ریمانی و با فرض $n=p$ یک منیفلد لورنتسی است. ★

تعریف ۱۴.۱.۲ فرض کنید M یک منیفلد هموار و $T:\underbrace{\chi(M)\times\cdots\times\chi(M)}_{k}\to C^\infty(M)$ یک نگاشت دیفرانسیل پذیر باشد به‌طوری که در شرایط زیر صدق کند

(۱) T یک نگاشت k خطی (همریختی مدولی) باشد یعنی برای هر $f_1,f_2\in C^\infty(M)$ و $X_i,Y_i\in\chi(M)$ داشته باشیم

$$T(X_1,\cdots,f_1X_i+f_2Y_i,\cdots,X_k)=f_1T(X_1,\cdots,X_i,\cdots,X_k)+f_2(X_1,\cdots,Y_i,\cdots,X_k).$$

(۲) T متناوب باشد یعنی با تغییر مؤلفه‌های کنار هم علامت آن تغییر کند

$$T(X_1,\cdots,X_i,\cdots,X_j,\cdots,X_n)=-T(X_1,\cdots,X_j,\cdots,X_i,\cdots,X_n).$$

در این‌صورت T یک k-تانسور متناوب روی M نامیده می‌شود. اجتماع تمام k-تانسورهای متناوب روی M را با $\wedge^k(M)$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۱۵.۱.۲ یک میدان k-فرمی (یا یک فرم از درجه‌ی k) روی M عبارت است از یک نگاشت $\omega:M\to\wedge^k(M)$ که با در نظر گرفتن نگاشت تصویر $\pi:\wedge^k(M)\to M$ در رابطه‌ی $\pi\circ\omega=id_M$ صدق کند. مجموعه‌ی تمام k- فرمی‌ها را با $\Omega^k(M)$ نمایش می‌دهند.

مثال ۱۶.۱.۲ اگر $V=\mathbb{R}^2$ و $\{e_1,e_2\}$ یک پایه‌ی متعامد یکه برای $\mathbb{R}^2$ با دوگان $\{e^1,e^2\}$ باشد، آن‌گاه برای توابع حقیقی w_i یک ۱-فرمی در $\wedge^1(\mathbb{R}^2)=(\mathbb{R}^2)^*$ به‌صورت $w=w_1e^1+w_2e^2$ و برای تابع حقیقی w_{12} هر ۲-فرمی در $\wedge^2(\mathbb{R}^2)$ به‌صورت $w=w_{12}e^1\wedge e^2$ است. ★

تعریف ۱۷.۱.۲ فرض کنید $X\in\chi(M)$ که در آن M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر و $\gamma:I\to M$ که $I=(-\epsilon,\epsilon)$ یک خم دیفرانسیل پذیر باشد، به نحوی که برای هر $t\in I$ ، $X(\gamma(t))=\gamma'(t)$. در این‌صورت خم γ را یک خم انتگرال برای X گویند.

مثال ۱۸.۱.۲ خم‌های انتگرال میدان برداری $X = y\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + ۲\frac{\partial}{\partial z}$ روی $\mathbb{R}^۳$ برای $t \in \mathbb{R}$ به‌صورت

$$\gamma(t) = (ae^t + b, ae^t, ۲t + c),$$

با ثابت های حقیقی a، b و c هستند. ★

تعریف ۱۹.۱.۲ فرض کنید W یک همسایگی از نقطه‌ی $p \in M$ و $\gamma_p : I \to M$ یک خم انتگرال X باشد. در این‌صورت به نگاشت دیفرانسیل پذیر $\varphi : I \times W \to M$ با تعریف $\varphi(t,p) = \gamma_p(t)$ شار موضعی X گویند.

تذکر ۲۰.۱.۲ یک شار موضعی، وابرسانی [1] $\phi_t : M \to M$ را به‌صورت $\phi_t(p) = \gamma_p(t) = \varphi(t,p)$ تعریف می‌کند.

مثال ۲۱.۱.۲ فرض کنید $Z = xy\frac{\partial}{\partial y} - \frac{x^۲}{۲}\frac{\partial}{\partial x}$ یک میدان برداری روی $\mathbb{R}^۲$ باشد. در این‌صورت برای هر $(x,y) \in \mathbb{R}^۲$ با استفاده از رابطه‌ی $\frac{\partial \varphi}{\partial t}|_{t=۰} = Z$ شار موضعی Z به‌صورت زیر است

$$\varphi(t,(x,y)) = (\frac{۲x}{۲ + xt}, \frac{y}{۴}(tx + ۲)^۲).$$

★

تعریف ۲۲.۱.۲ برای هر دو میدان برداری $X, Y \in \chi(M)$ و نقطه‌ی $p \in M$ مشتق لی Y در جهت X به‌صورت

$$(\mathcal{L}_X Y)_p = \lim_{t \to o} \frac{۱}{t}(Y_p - \varphi_{t*} Y_{\varphi_t^{-۱}(p)}) = -\frac{d}{dt}|_{t=۰}(\varphi_{t*} Y_{\varphi_t^{-۱}(p)}),$$

تعریف می‌شود که در آن φ_t شار موضعی X است. هم‌چنین برای یک فرم دیفرانسیل ω مشتق لی ω با در نظر گرفتن X در p به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$(\mathcal{L}_X \omega)_p = \lim_{t \to ۰} \frac{۱}{t}(\omega_p - {\varphi_t}^* \omega_{\varphi_t(p)}) = -\frac{d}{dt}|_{t=۰}({\varphi_t}^* \omega_{\varphi_t(p)}).$$

تذکر ۲۳.۱.۲ برای میدان‌های برداری $X, Z, Y_۱, \ldots, Y_r \in \chi(M)$ و r فرمی ω مشتق لی در جهت X در روابط زیر صدق می‌کند

$$\mathcal{L}_X(\omega(Y_۱, \ldots, Y_r)) = (\mathcal{L}_X \omega)(Y_۱, \ldots, Y_r) + \sum_{i=۱}^{r} \omega(Y_۱, \ldots, Y_{i-۱}, [X, Y_i], Y_{i+۱}, \ldots, Y_r),$$

$$\mathcal{L}_X Z = [X, Z].$$

تعریف ۲۴.۱.۲ فرض کنید (M,g) یک منیفلد شبه ریمانی از بعد n و TM کلاف مماس آن باشد. در این‌صورت با در

[1] diffeomorphism

نظرگرفتن نگاشت تصویری $\pi : TM \to M$، هسته‌ی نگاشت $T\pi : T(TM) \to TM$ یعنی $kerT\pi =: V(TM)$ کلاف عمودی TM نامیده می‌شود. هم‌چنین اگر قرار دهیم $\varphi : T(TM) \to V(TM)$ در این‌صورت $ker\varphi$ زیرکلافی از $T(TM)$ است که کلاف افقی TM نامیده می‌شود. در نتیجه $T(TM) = V(TM) \oplus H(TM)$ و در هر نقطه‌ی (x, u) از کلاف مماس TM فضای مماس $T_{(x,u)}(TM)$ به دو زیر فضای افقی و عمودی به‌صورت زیر شکافته می‌شود(ر. ک [۴۶]).

$$T_{(x,u)}(TM) = H_{(x,u)}(TM) \oplus V_{(x,u)}(TM) := H_{(x,u)} \oplus V_{(x,u)}.$$

تعریف ۲۵.۱.۲ در تعریف فوق اگر X یک بردار مماس بر M باشد، آن‌گاه یک بردار $X^h \in H_{(x,u)}$ (که بالابر افقی X نامیده می‌شود)، وجود دارد به‌طوری که برای نگاشت $\pi : TM \to M$ در رابطه‌ی $\pi_*(X^h) = X$ صدق می‌کند. هم‌چنین بالابر عمودی از یک بردار $X \in T_xM$ به‌صورت $X^v \in V_{(x,u)}$ نمایش داده می‌شود که برای همه‌ی توابع f روی M به‌صورت $X^v(df) = Xf$ با $(df)(x, u) = uf$ تعریف می‌شود. به‌علاوه نگاشت $X \to X^v$ یک یک‌ریختی بین T_xM و $V_{(x,u)}$ و نگاشت $X \to X^h$ یک یک‌ریختی بین T_xM و $H_{(x,u)}$ ایجاد می‌کند. هم‌چنین هر بردار مماس $\tilde{Z} \in T_{(x,u)}(TM)$ را می‌توان به‌صورت یکتای $\tilde{Z} = X^h + Y^v$ که در آن $X, Y \in T_xM$ نوشت. در این‌صورت متر ساساکی g^s روی TM به‌طور یکتا به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$g^s_{(x,u)}(X^h, Y^h) = g_x(X, Y), \quad g^s_{(x,u)}(X^v, Y^h) = g^s_{(x,u)}(X^h, Y^v) = ۰, \quad g^s_{(x,u)}(X^v, Y^v) = g_x(X, Y),$$

که در آن $X^h \in H_{(x,u)}(TM)$ و $X^v \in V_{(x,u)}(TM)$(ر. ک [۱۹]).

تعریف ۲۶.۱.۲ فرض کنید M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر باشد. یک التصاق آفین روی M عبارت است از یک نگاشت $\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$ به‌طوری که برای هر $X, Y, Z \in \chi(M)$ و $f, g \in C^\infty(M)$ در روابط زیر صدق کند

$(i)\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z,$

$(ii)\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$

$(iii)\nabla_X(fY) = (X.f)Y + f\nabla_X Y.$

قضیه ۲۷.۱.۲ فرض کنید (M, g) یک منیفلد ریمانی (یا شبه ریمانی) باشد. در این‌صورت یک التصاق یکتای ∇ روی M وجود دارد که

(۱) متقارن است. یعنی $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$.

(۲) سازگار با متر ریمانی (شبه ریمانی) است. یعنی $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$.

در این حالت التصاق یکتای ∇ را التصاق لوی چیویتا می‌نامند.

برهان. ر. ک [۲۸] ص ۵۵ قضیه‌ی ۲.۶ ■

تعریف ۲۸.۱.۲ فرض کنید (M, g) یک خمینه‌ی ریمانی و ∇ التصاق لوی چیویتای M باشد، در این‌صورت تانسور انحنای R، تانسور ریچی ϱ و انحنای اسکالر τ به ترتیب از روابط زیر به دست می‌آیند

$$R(X,Y)Z = \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_Y\nabla_X Z, \tag{۱.۲}$$

$$\varrho(u,v) = \sum_{i=1}^{n} g(R(u,e_i)v, e_i), \tag{۲.۲}$$

$$\tau = \sum_{i=1}^{n} \varrho(e_i, e_i), \tag{۳.۲}$$

که در اینجا $X, Y, Z \in \chi(M)$، uو v بردارهای مماس بر M و $\{e_1, \cdots, e_n\}$ یک پایه‌ی متعامد یکه برای فضای مماس است.

۱.۱.۲ مروری بر ویژگی‌های هندسی

در این بخش به یادآوری بعضی از ویژگی‌های هندسی می‌پردازیم و برای بیان مثال در هر مورد به فصل ۳ ارجاع می‌دهیم.

تعریف ۲۹.۱.۲ یک ساختار همگن شبه ریمانی روی یک منیفلد شبه ریمانی (M, g) عبارت است از یک $(2,1)$ میدان تانسوری S روی M به‌طوری که التصاق $\widehat{\nabla} = \nabla - S$ در شرایط زیر که معادلات امبروز–سینگر [۲] نامیده می‌شوند، صدق می‌کند

$$\widehat{\nabla} g = 0, \qquad \widehat{\nabla} R = 0, \qquad \widehat{\nabla} S = 0. \tag{۴.۲}$$

در اینجا ∇ التصاق لوی چیویتا و R تانسور انحنا است. معادله‌های اول و دوم از سیستم (۴.۲) به ترتیب هم‌ارز با معادله‌های زیر هستند

$$g(S_X Y, Z) + g(Y, S_X Z) = 0, \tag{۵.۲}$$

$$\begin{aligned}(\nabla_V R)(X,Y,Z,W) &= -R(S_V X, Y, Z, W) - R(X, S_V Y, Z, W) \\ &\quad - R(X, Y, S_V Z, W) - R(X, Y, Z, S_V W),\end{aligned} \tag{۶.۲}$$

که در آن‌ها $S_{XYZ} := g(S_X Y, Z)$ و $R(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)Z, W)$.

[۲] Ambrose–Singer equations

تعریف ۳۰.۱.۲ اگر منیفلد شبه ریمانی (M, g) را بتوان به یک میدان برداری $X \in \chi(M)$ به‌گونه‌ای مجهز نمود که در رابطه‌ی

$$\mathcal{L}_X g + \varrho = \lambda g, \tag{۷.۲}$$

صدق کند، آن‌گاه M را سولیتن ریچی می‌نامند. در این رابطه $\mathcal{L}_X$ مشتق لی در جهت X و ϱ تانسور ریچی و λ یک عدد حقیقی است. سولیتن ریچی انقباضی، پایدار یا انبساطی نامیده می‌شود، هرگاه به ترتیب $\lambda > 0$، $\lambda = 0$ یا $\lambda < 0$ (ر. ک [۲۱]).

تعریف ۳۱.۱.۲ فرض کنید M یک منیفلد n بعدی باشد. یک n فرم دیفرانسیل ω که برای هر $p \in M$ در شرط $\omega_p \neq 0$ صدق کند را یک عنصر حجمی یا فرم حجمی از M می‌نامند.

مثال ۳۲.۱.۲ برای $\mathbb{R}^n$ فرم دیفرانسیل $dv = dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n$ یک عنصر حجمی است. ★

تعریف ۳۳.۱.۲ فرض کنید (M, g) یک منیفلد شبه ریمانی (هموار، همبند و جهت پذیر) از بعد n و TM کلاف مماس آن باشد که به یک متر ساساکی g^s مجهز شده است. آن‌گاه انرژی میدان برداری هموار X به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$E(X) = \frac{n}{2} vol(M, g) + \frac{1}{2} \int_M \parallel \nabla X \parallel^2 dv, \tag{۸.۲}$$

که در آن dv عنصر حجمی (M, g) است. میدان برداری هموار X، یک نگاشت همساز از (M, g) به (TM, g^s) تعریف می‌کند اگر و تنها اگر دو رابطه‌ی زیر برقرار باشند

$$\nabla^* \nabla X = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i (\nabla_{X_i} \nabla_{X_i} X - \nabla_{\nabla_{X_i} X_i} X) = 0, \tag{۹.۲}$$

$$tr[R(\nabla X, X),] = \sum_i \varepsilon_i R(\nabla_{X_i} X, X) X_i = 0, \tag{۱۰.۲}$$

که در اینجا $\{X_0, \ldots, X_n\}$ یک پایه‌ی شبه متعامد یکه برای فضای مماس است و برای هر $p \in M$ داریم $g_p(X_i, X_i) = \varepsilon_i$. هم‌چنین اگر $\nabla^* \nabla X$ مضربی از X باشد، آن‌گاه X یک میدان برداری همساز نامیده می‌شود.

تذکر ۳۴.۱.۲ در تعریف ۳۳.۱.۲ برای محاسبه‌ی انتگرال باید از قضیه‌ی استوکس که تعمیمی از قضیه‌ی گرین است استفاده نماییم. شرط استفاده از این قضیه این است که محمل v به عنوان یک $n - 1$ فرم دیفرانسیل فشرده باشد، برای اینکه این شرط برقرار باشد فرض می‌کنیم M فشرده است و در حالتی که M فشرده نیست با یک دامنه‌ی فشرده درون آن کار می‌کنیم.