دانشگاه مراغه

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان نامه :

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض (آنالیز)

عنوان:

خواص محاطی زیرکلاسی از توابع p - ارز شامل عملگرهای خاص

اساتید راهنما:

دکتر شهرام نجف زاده

دکتر اصغر رحیمی

استاد مشاور:

دکتر علی عبادیان

پژوهشگر:

پریسا حریری

تیرماه ۸۹

بسم‌الله‌الرّحمن الرّحیم

سپاس خدایی راکه سخنوران درستودن او بمانند و شمارگران شمردن نعمت های اوندانند و کوشندگان حق او را گزاردن نتوانند.خدایی که پای اندیشه‌ی تیزگام در راه شناسایی او لنگ است و سر فکرت ژرف رو به دریای معرفتش بر سنگ. صفتهای او تعریف ناشدنی است و به وصف در نیامدنی،و در وقت ناگنجیدنی و به زمانی مخصوص نابودنی.به قدرتش خلایق را بیافرید و به رحمتش بادها را بپراکنید. گواهی می دهم که خدا یکتاست،انبازی ندارد و بی همتاست.گواهیی از روی اعتقاد و ایمان و گواهی میدهم که **محمد** (ص) بنده‌ی او و پیامبر اوست.او را بفرستاد با دینی آشکار و با نشانه هایی پدیدار و قرآنی نبشته در علم پروردگار که نوری است رخشان و چراغی است فروزان و دستورهایش روشن و عیان تا گرد دودلی از دل ها بزداید وبا حجت ودلیل ملزم فرماید.

پاک خدایا!چه بزرگ است آنچه میبینم از خلقت تو،و چه خرد است بزرگی آن در کنار قدرت تو،و چه با عظمت است آنچه می بینم از ملکوت تو،و چه ناچیز است برابر آنچه بر ما نهان است از سلطنت تو.

خدایا!اگر در پرسش خود درمانم یا راه پرسیدن را ندانم صلاح کارم را به من نما و دلم را بدانچه رستگاری من در آن است متوجه فرما.

ازفرمایشات حضرت علی(ع)

تقدیم به:

پدرعزیزم و روح مادرمهربانم.

به نام خدا

و لَمْ یَشْکُر المَخْلوق لَمْ یَشْکُرالخالِق

سپاس و ستایش پروردگار متعال را که به اینجانب توفیق تلاش در راه کسب علم و دانش را عطا فرمود. در آغاز وظیفه‌ی خود می دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود،جناب آقای دکتر شهرام نجف زاده ، جناب آقای دکتر اصغر رحیمی و جناب آقای دکتر علی عبادیان و تمامی اساتید محترم دانشگاه مراغه صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم. همچنین از همه‌ی اعضای خانواده‌ام که در تمامی مراحل همواره یارو مشوق من بوده‌اند سپاسگذاری می کنم. در پایان از دوستان وهم کلاسی های دوران تحصیلم کمال تشکر و قدردانی را دارم.

پریسا حریری

فهرست مندرجات

چکیده

در این پایان نامه، با استفاده از روشهای پیروی دیفرانسیلی، روابط شمول بین کلاسهای خاص از توابع تحلیلی و $p-$ ارز را بررسی می کنیم که توسط عملگر $I_p^\alpha f(z)$ تعریف می گردند.

پیشگفتار

این پایان نامه براساس مرجع [۱] در ۵ فصل نوشته شده است .

در فصل اوّل مطالب مورد نیاز برای فصول بعدی آورده شده است که شامل چهار بخش است ، در بخش اوّل ، تعاریف و قضایای مقدماتی از جمله تعریف مجموعه ها، و توابع محدب و ستاره گون و لم شوارتز را بیان می کنیم . در بخش دوم رابطه ی پیروی ، توابع $p-$ ارز ، عملگر $I_p^\alpha f(z)$ و قضایای مربوط به آن ها را بررسی می کنیم . در بخش سوم کلاس توابع $S_p^\alpha(\eta; A, B)$ و $K_p^\alpha(\eta; \rho)$ را تعریف می کنیم و سپس به بیان قضایای مهمی در این زمینه می پردازیم . بخش چهارم نیز به توابع فوق هندسی گاوس و قضایای مربوط به آن اختصاص داده شده است.

فصل دوم شامل سه بخش است ، در بخش اوّل به مفهوم پیروی دیفرانسیل علی الخصوص پیروی دیفرانسیل بایروت – بوکوئت و قضایای مربوط به آن می پردازیم . در بخش دوم مرتبه‌ی ستاره‌گونی عملگر انتگرالی $J_{\beta,\gamma}$ بررسی می گردد، و در بخش سوم خواص کلاس‌های توابع ستاره‌گون بررسی می شود .

در فصل سوم به کمک قضایای فصل دوم، روابط شمول برای کلاس های $S_p^\alpha(\eta; A, B)$ و $K_p^\alpha(\eta; \rho)$ بررسی می گردد.

در فصل چهارم ؛ رابطه ی زیر محاطی و کران های بالا برای توابع شامل عملگر $I_p^\alpha f(z)$ زمانی که $f \in S_p^\alpha(\eta; A, B)$ بررسی می شود .

فصل پنجم نیز شامل واژه نامه و کتاب نامه می باشد .

فصل ۱

مفاهیم اولیه

۱.۱ تعاریف وقضایای مقدماتی

در این فصل مباحث مقدماتی مورد نیاز در طول پایان نامه را بیان می کنیم. تا حد امکان سعی کرده‌ایم این مطالب خلاصه و مفید باشند.

تعریف ۱.۱.۱ گردایه ی $\mathcal{M}$ از زیرمجموعه های مجموعه ی X را یک $\sigma-$ جبر[۱] در X نامیم، هرگاه $\mathcal{M}$ خواص زیر را داشته باشد :

(آ) $X \in \mathcal{M}$

(ب) هرگاه $B \in \mathcal{M}$ آنگاه $B^c \in \mathcal{M}$ ، که در آن B^c متمم B نسبت به X است .

(ج) هرگاه $B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ و به ازای $n = 1, 2, 3, \ldots$ ، $B_n \in \mathcal{M}$، آن گاه $B \in \mathcal{M}$.

تعریف ۲.۱.۱ هرگاه $\mathcal{M}$ یک $\sigma-$ جبر در X باشد ، آن گاه X را یک فضای اندازه پذیر و اعضای $\mathcal{M}$ را مجموعه های اندازه پذیر در X نامیم .

تعریف ۳.۱.۱ هرگاه X یک فضای اندازه پذیر ، Y یک فضای توپولوژیک و f نگاشتی از X به توی Y باشد ، آنگاه گوئیم f اندازه پذیر است اگر به ازای هرمجموعه ی باز V در Y ، $f^{-1}(V)$ یک مجموعه ی اندازه پذیر در X باشد.

تعریف ۴.۱.۱

(آ) یک اندازه ی مثبت[۲]، تابعی است مانند μ که بر یک $\sigma-$ جبر مثل $\mathcal{M}$ تعریف شده و برد آن $[0, \infty]$ بوده و

[۱] $\sigma - Algebra$

[۲] Positive measure

(i) $B_i \in \mathcal{M}$ وجود داشته باشد بطوریکه $\mu(B_i) < \infty$

(ii) μ جمعی شمارش پذیر باشد ؛ یعنی هرگاه $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ گردایه ای شمارش پذیر و از هم جدا از اعضای $\mathcal{M}$ باشد آن گاه:

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) .$$

(ب) هر فضای اندازه یک فضای اندازه پذیر است که یک اندازه ی مثبت تعریف شده بر $\sigma-$ جبر مجموعه های اندازه پذیر خود داشته باشد .

(ج) هر اندازه ی مختلط ، تابعی جمعی شمارش پذیر مختلط تعریف شده بر یک $\sigma-$ جبر است .

تعریف ۵.۱.۱ فرض کنیم P خاصیتی باشد که یک نقطه مانند x واجد آن است یا نیست. اگر μ اندازه ای بر $\sigma-$ جبر $\mathcal{M}$ بوده و $E \in \mathcal{M}$ ، عبارت « P تقریباً همه جا بر E برقرار است » یعنی $N \in \mathcal{M}$ هست بطوریکه $\mu(N) = 0$ ، $N \subset E$ ، و P در هر نقطه از $E \setminus N$ برقرار است .

تعریف ۶.۱.۱ فرض کنیم Ω یک مجموعه‌ی باز و $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ یک تابع مختلط باشد.گوئیم f در نقطه ی $z_0 \in \Omega$ مشتق پذیر است هرگاه حد زیر موجود باشد:

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} .$$

هرگاه f در هر نقطه ی $z_0 \in \Omega$ مشتق پذیر باشد، گوییم f در Ω تحلیلی[۳] است.

[۳] Analytic

تبصره ۷.۱.۱ دیسک واحد را در صفحه ی مختلط به صورت زیر در نظر می گیریم.

$$\mathbb{U}=\{z\in\mathbb{C}\,;\ |z|<1\}\,.$$

تبصره ۸.۱.۱ (نگاشت همدیس)[۴] نگاشت پیوسته‌ای که اندازه‌ی زاویه‌ی بین خم های مار بر یک نقطه‌ی مفروض z_0 را حفظ می نماید، حافظ زاویه در z_0 گوییم .اگر $f(z)$ در z_0 حافظ زاویه باشد و بعلاوه جهت زوایای بین خم های مار بر نقطه ی z_0 را نیز حفظ نماید، گوییم $f(z)$ در z_0 همدیس است .

قضیه ۹.۱.۱ هرگاه $f:\Omega\mapsto\mathbb{C}$ تابعی تحلیلی باشد . آن گاه f در هر نقطه ی $z_0\in\Omega$ که $f'(z_0)\neq 0$، همدیس است .

برهان : به مرجع [۵] مراجعه شود. ■

تبصره ۱۰.۱.۱ مجموعه ی توابع تحلیلی بر $\mathbb{U}$ را با $H(\mathbb{U})$ نمایش می دهیم . قرار می دهیم:

$$A_n=\{f\in H(\mathbb{U}); f(z)=z+\sum_{k=n+1}^{\infty}a_kz^k\}\,.$$

در ضمن ،

$$A_1=A=\{f\in H(\mathbb{U}); f(0)=f'(0)-1=0\}=\{f\in H(\mathbb{U}); f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_kz^k\}\,.$$

نشان دهنده ی مجموعه توابع تحلیلی نرمالیزه شده بر دیسک واحد $\mathbb{U}$ است و

$$H[a,n]=\{f\in H(\mathbb{U}); f(z)=a+a_nz^n+a_{n+1}z^{n+1}+\ldots\}\,.$$

[۴] Conformal map

قرار می دهیم ،

$$H_\circ \equiv H[\circ, \backslash] .$$

تعریف ۱۱.۱.۱ تابع $f(z)$ را در نقطه ی $z_\circ \in \Omega$ تک ارز[۵](یک به یک) گوئیم ، هرگاه برای هر $z_۱$ و $z_۲$ در $\mathbb{U}$ که $z_۲ \neq z_۱$ داشته باشیم : $f(z_۱) \neq f(z_۲)$.

گاهی اوقات نشان دادن اینکه تابع مختلط f تک ارز است مشکل می باشد. در سال ۱۹۷۳ کیدروشف[۶] ماکزیمم مقدار M راچنان پیدا کرد که اگر نامساوی زیر برقرار باشد،

$$\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| \leq M , \qquad (۱)$$

f یک تابع تک ارز باشد. وی همچنین نشان داد اگر $M = M_\circ = ۳/۰۵...$ ریشه‌ی معادله‌ی زیر باشد،

$$۸[M(M-۲)^۳]^{\frac{۱}{۲}} - ۳(۳-M)^۲ = ۱۲ , \qquad (۲)$$

و

$$\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| \leq M_\circ = ۳/۰۵... , \qquad (۳)$$

آنگاه f در $\mathbb{U}$ تک ارز است . ماکزیمم مقدار M نمی تواند بیشتر از π باشد ، بعنوان مثال تابع $f(z) = e^{\lambda z}$، در شرط $|\frac{f''(z)}{f'(z)}| = |\lambda|$ صدق می کند ، این تابع تک ارز است اگر و تنها اگر $|\lambda| \leq \pi$.

---

[۵] Univalent

[۶] Kudryashov

تعریف ۱۲.۱.۱ تابع $f(z)$ را در نقطه ی $z_\circ \in \Omega$ موضعاً تک ارز[۷] گوییم هرگاه در یک همسایگی $z_\circ$ تک ارز باشد.

مثال ۱۳.۱.۱ تابع $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + \dots$ را در نظر می گیریم . این تابع در $\mathbb{U}$ تحلیلی و تک ارز است . این تابع اهمیت خاصی در نظریه ی توابع تحلیلی دارد و به‌تابع کوبه[۸] معروف است .

تعریف ۱۴.۱.۱ مجموعه ی تمام توابع تحلیلی و تک ارز f که در دیسک واحد $\mathbb{U}$ تعریف شده و در شرایط نرمالیزه $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$ صدق می کنند رابا S (برگرفته از کلمه ی آلمانی Schlicht) نمایش می دهیم .

به سادگی ملاحظه می کنیم که هر $f \in S$ دارای بسط مکلورن به فرم زیر است :

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \qquad (|z| \leq 1) .$$

قضیه ۱۵.۱.۱ (حدس بایبرباخ)[۹] اگر $f \in S$ آنگاه،

$$|a_2| \leq 2 .$$

برهان : به مرجع [۲۵] مراجعه شود. ■

قضیه ۱۶.۱.۱ (قضیه نگاشت باز[۱۰]) فرض کنیم $\varphi \in H(\Omega)$ و $z_\circ \in \Omega$ و $\varphi \neq 0$. در اینصورت Ω یک همسایگی از $z_\circ$ مانند V را شامل است بطوریکه :

---

[۷] Locally univalent

[۸] Koebe function

[۹] Bieberbach's Theorem

[۱۰] Open mapping Theorem

۱) φ در V یک به یک است .

۲) $W=\varphi(V)$ یک مجموعه ی باز است .

۳) هرگاه $\psi: W \mapsto V$ با ضابطه ی $\psi(\varphi(z))=z$ تعریف شده باشد ، آنگاه $\psi \in H(W)$

برهان : به مرجع [۲۵] مراجعه شود . ■

تعریف ۱۷.۱.۱ تابع مختلط $f(z)$ بر Ω به وسیله ی سری توانی قابل نمایش است ، هرگاه برای هر قرص $D(a,r)\subset\Omega$ که یک قرص به مرکز a و به شعاع r است ، یک سری مانند $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ نظیر شود که به ازای هر $z\in D(a,r)$ همگرا به $f(z)$ باشد.

قضیه ۱۸.۱.۱ هر گاه f به وسیله ی سری توانی در Ω قابل نمایش باشد ، آن گاه $f\in H(\Omega)$ و f' نیز با سری توانی در Ω قابل نمایش است . در واقع به ازای هر $z\in D(a,r)$ اگر $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ آن گاه :

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1} .$$

برهان : به مرجع [۲۵] مراجعه شود . ■

تعریف ۱۹.۱.۱ مجموعه ی $E\subseteq\mathbb{C}$ را نسبت به نقطه ی ω_0 ستاره گون[۱۱] گوئیم هرگاه هر پاره‌خطی که نقاط E را به ω_0 وصل می کند دقیقاً داخل E باشد .

تعریف ۲۰.۱.۱ تابع تحلیلی f را در $\mathbb{U}$ ستاره گون نامیم ، هرگاه $f(\mathbb{U})$ نسبت به مبدأ ستاره‌گون باشد . مجموعه ی تمام توابع تحلیلی ستاره گون مانند f که در شرط نرمالیزه $f(0)=0$ و $f'(0)=1$ صدق می کنند را با S^* نشان می دهیم .

[۱۱] Starlike

قضیه ۲۱.۱.۱ فرض کنیم f یک تابع تحلیلی و تک ارز باشد . در این صورت $f \in S^*$ اگروتنها اگر،

$$Re\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right) > ۰, \qquad z \in \mathbb{U} .$$

بنابراین می توان نوشت :

$$S^* = \{f \in A; Re\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right) > ۰\} .$$

برهان : به مرجع[۱۵] مراجعه شود. ■

مثال ۲۲.۱.۱ تابع $f(z) = \frac{z}{(۱-z)^۲}$ (تابع کوبه) تابعی تحلیلی و تک ارز بوده و در $|z| < ۱$ ستاره‌گون می باشد ، زیرا :

$$\begin{aligned} Re\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right) &= Re\left(\frac{۱+z}{۱-z}\right) \\ &= \frac{\frac{۱+z}{۱-z} + \frac{۱+\bar{z}}{۱-\bar{z}}}{۲} \\ &\geq \frac{۱-|z|^۲}{(۱-|z|)^۲} \end{aligned}$$

مقدار فوق برای $|z| < ۱$ مثبت است در نتیجه،

$$Re\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right) > ۰ .$$

لم ۲۳.۱.۱ فرض کنیم $f \in S$. در اینصورت $f \in S^*$ اگر وتنها اگر، f هر قرص $|z| < r < ۱$ را بر یک ناحیه ی ستاره گون بنگارد .

برهان : به مرجع[۱۵] مراجعه شود . ■

تعریف ۲۴.۱.۱ تابع تحلیلی و تک ارز f را ستاره گون از مرتبه ی $0 \leq \sigma < 1$ گوئیم هرگاه

$$Re\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right) > \sigma .$$

مجموعه توابع ستاره گون از مرتبه‌ی σ بصورت زیر نمایش داده می شود:

$$S^*(\sigma) = \{f \in A; Re\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right) > \sigma\} .$$

مثال ۲۵.۱.۱ تابع $f(z) = \frac{z}{(1-z)^{2-2\sigma}}$ ستاره گون از مرتبه ی $0 \leq \sigma < 1$ می باشد .

تعریف ۲۶.۱.۱ مجموعه ی $E \subseteq \mathbb{C}$ محدب[12] است هرگاه نسبت به هر نقطه اش ستاره‌گون باشد . یعنی هر پاره خطی که دو نقطه از E را به هم وصل می کند ، در داخل E قرار بگیرد .

تعریف ۲۷.۱.۱ تابعی که دیسک واحد را به طور همدیس به یک دامنه ی محدب بنگارد ، تابع محدب نامیده می شود .

مجموعه‌ی توابع تحلیلی محدب که در شرط نرمالیزه صدق کنند را با K نشان می دهیم .

لم ۲۸.۱.۱ فرض کنیم $f \in S$. در اینصورت $f \in K$ اگر و تنها اگر f هر قرص $|z| < r < 1$ را بر یک حوزه ی محدب بنگارد .

برهان : به مرجع[۱۵] مراجعه شود . ■

قضیه ۲۹.۱.۱ فرض کنیم f یک تابع تحلیلی در $\mathbb{U}$ باشد.دراینصورت $f \in K$ اگر وتنها اگر:

$$Re\left(1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) > 0, \qquad z \in \mathbb{U} .$$

[12] Convex

بنابراین مجموعه توابع محدب به صورت زیر نمایش داده می شود :

$$K = \{f \in A; Re\left(1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) > 0\} .$$

برهان : به مرجع[۱۵] مراجعه شود. ■

تذکر ۳۰.۱.۱ بوضوح داریم ،

$$K \subset S^* \subset S \subset A .$$

مثال ۳۱.۱.۱ تابع $f(z) = \frac{z}{1-z} = z + \sum_{n=2}^{\infty} z^n$ بر $\mathbb{U}$ یک تابع محدب است .

تعریف ۳۲.۱.۱ تابع $f \in S$ را محدب از مرتبه ی $0 \leq \sigma < 1$ گوئیم ، هرگاه

$$Re\left(1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) > \sigma, \quad z \in \mathbb{U} .$$

مجموعه ی این توابع را با $K(\sigma)$ نشان می دهیم یعنی :

$$K(\sigma) = \{f \in A; Re\left(1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) > \sigma\} .$$

قضیه ۳۳.۱.۱ (قضیه‌ی الکساندر)[۱۳] فرض کنیم f یک تابع تحلیلی در $\mathbb{U}$ باشد که $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$، در اینصورت $f \in K$ اگر وتنها اگر $zf'(z) \in S^*$.

برهان : قرار می‌دهیم $g(z) = zf'(z)$ ، لذا داریم،

$$\frac{zg'(z)}{g(z)} = 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} .$$

بنابراین به وضوح حکم برقرار است. ■

[۱۳] Alexander's Theorem

تعریف ۳۴.۱.۱ تابع f را محدب وار یا نزدیک به محدب[۱۴] گوئیم هرگاه $h \in K$ موجود باشد چنانکه،

$$Re\left\{\frac{f'(z)}{h'(z)}\right\} > 0 \ .$$

کلاس توابع محدب وار را با C نمایش می‌دهیم.

از آنجائیکه $h \in K$ اگر و تنها اگر $zh' \in S^*$، حال اگر قرار دهیم $zh'(z) = g(z)$، آنگاه $g \in S^*$، لذا رابطه‌ی فوق را به فرم،

$$Re\left\{\frac{zf'(z)}{g(z)}\right\} > 0 \ .$$

می‌توانیم بنویسیم. بنابراین f را محدب وار گوئیم هرگاه $g \in S^*$ موجود باشد چنانکه داشته باشیم،

$$Re\left\{\frac{zf'(z)}{g(z)}\right\} > 0 \ .$$

قضیه ۳۵.۱.۱ ثابت کنید $K \subset S^* \subset C$.

برهان : این قضیه نشان می‌دهد که تمامی توابع محدب و ستاره‌گون محدب وارند. اگر $f \in S^*$ پس $Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0$. بنا به قضیه‌ی الکساندر $g \in K$ وجود دارد چنانکه $f(z) = zg'(z)$، در نتیجه،

$$Re\left\{\frac{f'(z)}{g'(z)}\right\} = Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0 \ .$$

و لذا $f \in C$. ■

لم ۳۶.۱.۱ (لم شوارتز)[۱۵] فرض کنیم $\omega \in H(\mathbb{U})$ ، $\omega(0) = 0$ و به ازای هر $z \in \mathbb{U}$ ، $|\omega(z)| \le 1$. دراینصورت ،

$$|\omega(z)| \le |z| \quad , (z \in \mathbb{U}) \ . \qquad (۴)$$

---

[۱۴] Close-to-convex

[۱۵] Schwarz's Lemma