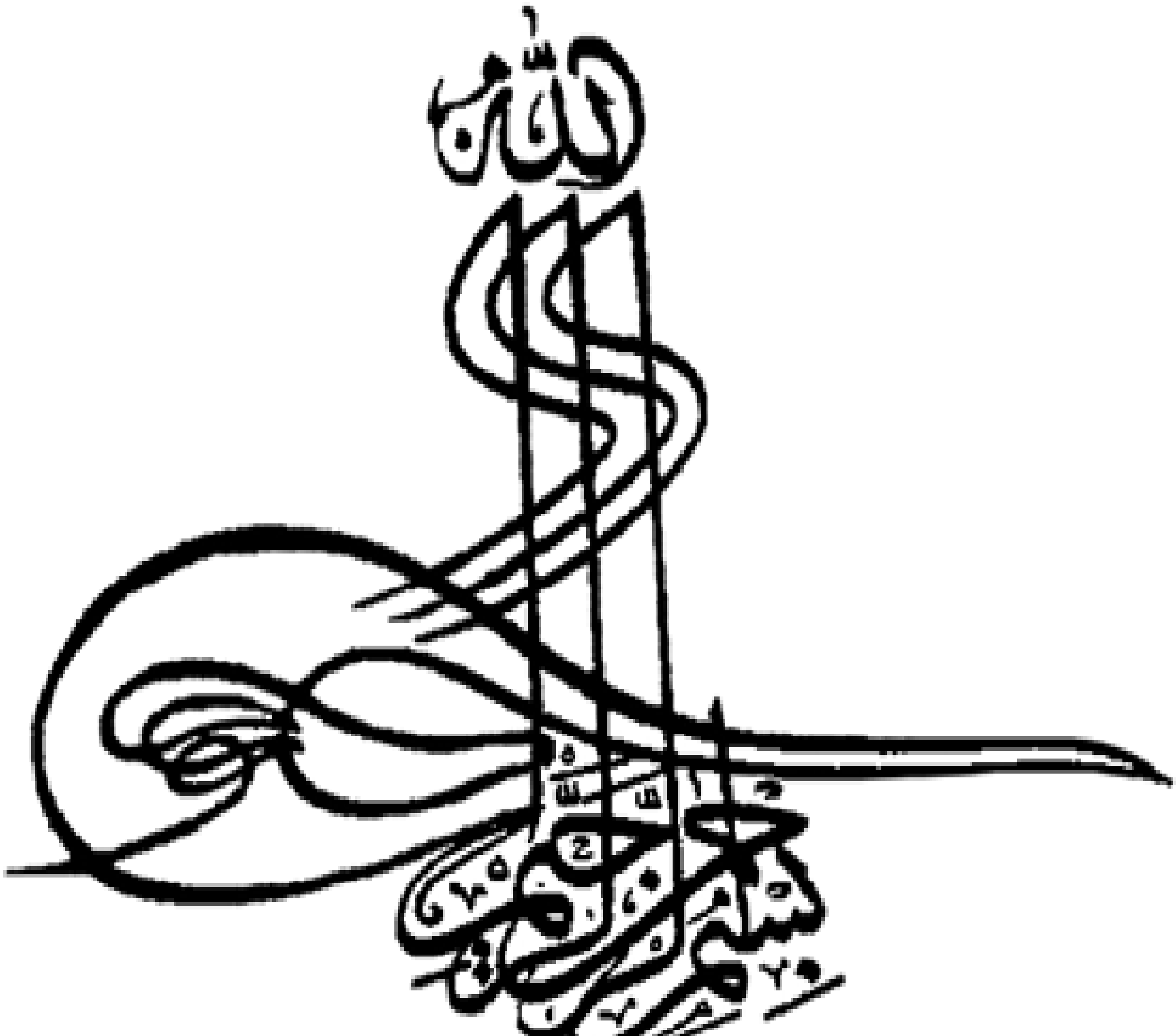

دانشگاه الزهرا(س)

دانشکده علوم‌پایه

پایان‌نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

عنوان

کاربرد توابع متعامد گویا در سیستم‌های دینامیکی

استاد راهنما

دکتر یداله اردوخانی

استاد مشاور

دکتر مرضیه اسکندری

دانشجو

مرضیه گنجی خیرآبادی

بهمن‌ماه ۱۳۹۰

قدردانی

خدای را در وسعتی بی واژه سپاسگزارم و شادمان از این که در پرتو مهرش این پایان نامه به سرانجام آمد. اینک بر خود لازم می‌دانم از مساعدت‌های ارزنده استاد فرزانه جناب آقای دکتر یداله اردوخانی و رهنمودهای ره‌گشای سرکار خانم دکتر مرضیه اسکندری تشکر و قدردانی نموده و از درگاه ایزد منان سلامتی و تندرستی برای ایشان مسئلت نمایم، چرا که پیمودن این مسیر دشوار بدون مساعدت‌های ایشان امری دشوار و چه بسا نشدنی بود. همچنین از اساتید گرانقدر جناب آقایان دکتر مصطفی شمسی و دکتر علی مردان شاهرضایی که زحمت داوری این پایان نامه را تقبل نمودند سپاسگزاری می‌نمایم.

چکیده

در این پژوهش ابتدا به معرفی توابع متعامد گویا به عنوان پایه‌ای برای بازه نیمه متناهی پرداخته و برخی از خواص این توابع را بیان می‌کنیم و سپس به حل مسائلی که در این بازه رخ می‌دهند می‌پردازیم. برای حل این مسائل از روش شبه طیفی یا هم مکانی با نقاط گره‌ای گاوس-رادو استفاده می‌کنیم. با به کار بردن این توابع و نقاط گره‌ای، معادلات دیفرانسیل مورد نظر را به یک سیستم معادلات جبری خطی یا غیرخطی تبدیل کرده و از حل این سیستم جبری تقریبی برای جواب مساله به دست می‌آوریم و آن را با جواب دقیق معادله یا جواب به دست آمده توسط روش‌های دیگر مقایسه می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: *معادلات دیفرانسیل معمولی، گویای لژاندر، گویای چبیشف، چندجمله‌ای‌های لژاندر، چندجمله‌ای‌های چبیشف، معادله لین-امدن، معادله دافینگ، معادله گاز بی ثبات، بازه نیمه متناهی، گاوس- رادو*

فهرست مطالب

مقدمه

امروزه روش‌های عددی کاربرد فراوانی در حل سیستم‌های دینامیکی مانند معادلات دیفرانسیل، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، معادلات انتگرال و نظایر آن دارد که رایج‌ترین این روش‌ها عبارت‌اند از:

۱. تفاضلات متناهی

۲. اجزای محدود

۳. روش طیفی

بسیاری از مسائل علوم و مهندسی به صورت یک معادله دیفرانسیل با شرایط کرانه‌ای روی بازه نیمه متناهی هستند. همچنین بسیاری از این معادلات دارای نقاط تکین می‌باشند و جواب‌های تحلیلی دقیقی ندارند لذا بایستی با روش‌های عددی آن‌ها را حل نمود. در این پژوهش از روش طیفی برای حل معادلات در بازه نیمه متناهی استفاده می‌کنیم.

روش‌های طیفی مختلفی که برای حل این گونه معادلات به کار رفته‌اند، عبارت‌اند از:

• انتقال مساله از فاصله نامتناهی به یک فاصله متناهی و به کار بردن چندجمله‌ای ژاکوبی برای حل مساله در بازه متناهی و سپس انتقال جواب به فاصله نیمه متناهی می‌باشد[۱و۲].

• برش دامنه نیز یکی از روش‌هایی است که برای حل مسائل در بازه نیمه متناهی به کار می‌رود. در این روش به جای حل مساله در فاصله نیمه متناهی، به حل مساله در بازه‌ی $[0, L)$ با انتخاب L به اندازه کافی بزرگ، پرداخته می‌شود. انتخاب مناسب L، در این روش بسیار مهم می‌باشد زیرا اگر L مناسب نباشد خطا افزایش می‌یابد[۳].

• روش موثر دیگر، استفاده از توابع متعامد است که خود به دو دسته تقسیم می‌شوند:

۱. استفاده از توابع متعامدی است که در بازه‌ی نیمه متناهی تعریف می‌شوند مانند توابع لاگر، هرمیت و سینک که این توابع در روش طیفی به عنوان توابع پایه‌ای به کار می‌روند[۱۱-۴].

۲. استفاده از توابع متعامد انتقال یافته از قبیل توابع گویای چبیشف و گویای لژاندر[۲۵-۱۲].
امروزه استفاده از توابع متعامد برای حل سیستم‌های دینامیکی مورد توجه قرار گرفته است. ویژگی اصلی این تکنیک آن است که معادلات مورد بحث را به معادلات جبری تبدیل می‌کند. برای این منظور سری قطع شده از توابع متعامد با ضرایب مجهول را به عنوان تقریبی از جواب مساله در نظر گرفته، سپس با استفاده از نقاط مناسب (گره‌های هم مکانی) سیستم را به یک سیستم جبری تبدیل می‌کنند.
در ادامه به بیان پیشینه‌ای از توابع متعامد گویا که بحث اصلی این پژوهش می‌باشد، می‌پردازیم.
بوید [1] در سال ۱۹۸۷ یک پایه جدید را با به کار بردن نگاشت روی چندجمله‌ای‌های چبیشف با نام توابع گویای چبیشف معرفی کرد. او در مرجع [۱۲] نشان داد که توابع گویای چبیشف بیشتر خواص عمومی چندجمله‌ای‌های چبیشف از جمله تعامد، کامل بودن و همگرائی و... را به ارث می‌برند.
بن یو گو [2] و همکارانش در مرجع [۱۳] به معرفی توابع متعامد گویای لژاندر پرداختند و خواص آن‌ها را مورد بررسی قرار دادند و یک پایه متعامد کامل برای فضای $L_w^2(\Lambda)$ معرفی کردند که در آن $\Lambda = [0, \infty)$ و $w(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ می‌باشد. همچنین در [۱۴] به بررسی خواص توابع گویای چبیشف پرداخته و یک پایه متعامد کامل برای فضای $L_w^2(\Lambda)$ معرفی نمودند که در آن $w(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$ می‌باشد.
همچنین بوید و همکارانش [۱۵] روش شبه طیفی را روی بازه نیمه متناهی برای اتم هیدروژن به کار بردند و مقایسه‌ای بین روش‌های توابع گویای چبیشف و سری لاگر و نگاشت فوریه سینوسی انجام دادند.
پرند [3] و رزاقی [4] در [۱۸-۱۶] از روش طیفی برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی روی بازه نیمه متناهی با به کار بردن توابع گویای چبیشف و گویای لژاندر استفاده کردند که ایشان برای تقریب جواب این معادلات از روش تاو بهره بردند.
پرند و همکارانش در [۲۵-۱۹] توابع متعامد گویا را برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی

[1] *Boyd*
[2] *Benyu Guo*
[3] *Parand*
[4] *Razzaghi*

روی بازه نیمه متناهی به کار بردند که در این مقالات از روش شبه طیفی برای تقریب این معادلات استفاده کردند.

این پایان نامه مشتمل بر چهار فصل می‌باشد که عبارت‌اند از:

در فصل اول به ارائه مباحثی در آنالیز حقیقی و آنالیز عددی پرداخته و برخی از خواص چندجمله‌ای-های چبیشف و لژاندر را بیان می‌کنیم و مفاهیم اولیه‌ای از سیستم‌های متعامد و انتگرال‌گیری عددی را بررسی می‌کنیم. در فصل دوم روش‌های طیفی و روش باقیمانده وزنی را بیان می‌کنیم. در فصل سوم ابتدا نگاشت‌های رایج برای تبدیل بازه $[0,\infty)$ به بازه $[-1,1]$ و بالعکس را بیان کرده و در ادامه به معرفی توابع گویای چبیشف و گویای لژاندر پرداخته و برخی از خواص این توابع را بررسی می‌کنیم. در فصل چهارم روش حلی برای معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی ارائه داده و چندین معادله را با این روش مورد ارزیابی قرار می‌دهیم و تقریب خود را با جواب واقعی مساله و یا جواب به‌دست آمده توسط روش‌های دیگر مقایسه خواهیم کرد.

فصل ۱

پیش نیازها

در این فصل به بیان برخی از مفاهیم، قضایای آنالیز حقیقی و تعاریف پایه‌ای می‌پردازیم که در فصل‌های بعد موردنیاز است .
بخش اول به بیان تعاریف و قضایایی از آنالیر حقیقی اختصاص دارد[۲۶].

۱.۱ تعاریف و قضایایی از آنالیز حقیقی

تعریف ۱.۱.۱ *مجموعه ناتهی X از عناصر را روی مجموعه اعداد حقیقی یک فضای برداری می‌گویند هرگاه تابع $+ : X \times X \longrightarrow X$ و تابع $\cdot : R \times X \longrightarrow X$ را داشته باشیم که در شرایط زیر صدق کنند:*

- $\forall x, y \in X; \qquad x + y = y + x,$
- $\forall x, y, z \in X; \qquad (x + y) + z = x + (y + z),$
- $\exists ۰ \in X,\ \forall x \in X; \qquad x + ۰ = x,$
- $\forall x, y \in X,\ \forall \lambda \in R; \qquad \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y,$
- $\forall x \in X,\ \forall \lambda, \mu \in R; \qquad (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x,$
- $\forall x \in X,\ \forall \lambda, \mu \in R; \qquad (\lambda\mu)x = \lambda(\mu x),$
- $\forall x \in X; \qquad ۰ \cdot x = ۰, \qquad ۱ \cdot x = x.$

$+$ را جمع و $\cdot$ را ضرب در اسکالر می‌نامیم . باید توجه داشت که عنصر ۰ که در بند سوم تعریف

شده، یکتاست.

عنصر $(-1)x$ را منفی x نامیده و $-x$ می‌نویسند:

$$x + (-x) = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = (1 - 1)x = 0 \cdot x = 0.$$

تعریف ۲.۱.۱ هر فضای متریک ($\langle X, \rho \rangle$) عبارت است از یک مجموعه ناتهی X از عناصر (که آنها را نقطه می‌نامند) و یک تابع حقیقی ρ که روی $X \times X$ تعریف شده است به گونه‌ای که برای هر $x, y, z \in X$ داریم:

- $\rho(x, y) \ \geq 0,$
- $x = y \ \Leftrightarrow \ \rho(x, y) = 0,$
- $\rho(x, y) = \rho(y, x),$
- $\rho(x, y) \ \leq \ \rho(x, z) + \rho(z, y).$

در این صورت تابع ρ را متریک می‌نامند .

مثال ۱.۱.۱ *مجموعه R، همه اعداد حقیقی با $\rho(x, y) = |x - y|$ یک فضای متریک است.*

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنید X یک فضای برداری روی R باشد. به تابع $\|\cdot\| : X \longrightarrow R$ یک نرم گویند هرگاه داشته باشیم:

- $\forall x \in X; \qquad \|x\| \geq 0, \qquad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$
- $\forall x \in X, \ \forall \alpha \in R; \qquad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|,$
- $\forall x \in X; \qquad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

مثال ۲.۱.۱ نرم اقلیدسی یا طول بردار x به صورت $\|x\|_2 = \left(\sum x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ تعریف می‌شود که x_i ها مولفه‌های بردار x هستند.

تعریف ۴.۱.۱ اگر فضای خطی X دارای یک نرم باشد آنگاه گویند X یک فضای خطی نرمدار است.

اگر X یک فضای خطی نرمدار باشد و برای هر $x, y \in X$ قرار دهیم $d(x, y) = \|x - y\|$ آنگاه d یک متریک روی X است. پس هر فضای برداری نرمدار یک فضای متریک است و به d متر تولید شده توسط نرم گوییم.

تعریف ۵.۱.۱ دنباله $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ را در فضای خطی نرمدار X همگرا به $x \in X$ گویند هرگاه:

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - x\| = 0.$$

تعریف۶.۱.۱ دنباله $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ را در فضای خطی نرمدار X کوشی گویند هرگاه:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m,n \ \ (m,n > N \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon).$$

تعریف۷.۱.۱ هرگاه هر دنباله کوشی در فضای متریک X به نقطه‌ای در X همگرا باشد، X را فضای کامل گویند.

تعریف۸.۱.۱ فضای نرمدار X را یک فضای باناخ گویند هرگاه X نسبت به متریک تولید شده توسط نرم، فضایی کامل باشد.

مثال۳.۱.۱ ساده‌ترین فضای باناخ، فضای اعداد مختلط روی $\mathbb{C}$ با متریک $d(x,y) = |x-y|$ می‌باشد.

تعریف۹.۱.۱ اگر $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ دنباله‌ای بر فضای نرمدار X باشد، گویند سری $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ در X همگرا به x است هرگاه $S_n = \sum\limits_{i=0}^{n} x_n$ به x همگرا باشد. در این صورت گویند $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n = x$.
سری $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ را همگرای مطلق گویند هرگاه $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|x_n\| < \infty$.

قضیه ۱.۱.۱ *فضای برداری نرمدار X باناخ است اگر و فقط اگر هر سری همگرای مطلق، همگرا باشد* [۲۶] .

تعریف۱۰.۱.۱ فضای متشکل از توابع اندازه‌پذیر f تعریف شده در بازه‌ی $[a,b]$ به طوری که

$$\int_a^b |f(t)|^p dt \ < \infty,$$

را برای $1 \leq p < \infty$ با نماد $L^p\left([a,b]\right)$ یا L^p نشان می دهند. در واقع

$$L^p\left([a,b]\right) = \{f : [a,b] \longrightarrow R\ ,\ \int_a^b |f\left(t\right)|^p dt < \infty, \text{اندازه‌پذیر}\ f\}.$$

برای هر $f \in L^p$ ، $\|f\|_p$ به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\|f\|_p = (\int_a^b |f(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}.$$

که L^p با نرم تعریف شده یک فضای باناخ است.

قضیه۲.۱.۱ L^p یک فضای برداری است به عبارت دیگر اگر $f,g \in L^p$ باشد برای هر α, β ثابت، $\alpha f + \beta g \in L^p$ [۲۶].

قضیه۳.۱.۱ (ریس-فیشر[1]) فضای $L^p(1 \leq p < \infty)$ کامل است [۲۶].

تعریف۱۱.۱.۱ فضای خطی مختلط (حقیقی) را یک فضای ضرب داخلی گویند هرگاه یک تابع مختلط (حقیقی) روی $X \times X$ که آن را با نماد $<\cdot,\cdot>$ نشان می‌دهند، وجود داشته باشد که برای هر $x, y, z \in X$ و هر $\alpha \in C$ داشته باشیم:

- $< x + y, z >=< x, z > + < y, z >,$
- $< \alpha x, y >= \alpha < x, y >,$
- $< x, y >= \overline{< y, x >},$
- $< x, x >\geq 0, \qquad < x, x >= 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0.$

عبارت $< x, y >$ را ضرب داخلی x, y نامیده می‌شود. این ضرب داخلی یک نرم به صورت زیر تعریف می‌کند که به آن نرم حاصل از ضرب داخلی گفته می‌شود :

$$\|x\| = \sqrt{< x, x >}.$$

مثال۴.۱.۱ اگر $X = R^2$ آنگاه با ضرب داخلی $< x, y >= x \cdot y; \ \forall x, y \in R^2$ ، R^2 یک فضای ضرب داخلی است.

مثال۵.۱.۱ $L^2[a, b]$ با ضرب داخلی زیر یک فضای ضرب داخلی است:

$$\forall f, g \in L^2[a, b], \qquad < f, g >= \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt. \tag{1.1}$$

تعریف۱۲.۱.۱ فرض کنید X یک فضای ضرب داخلی (حقیقی یا مختلط) باشد. آنگاه برای هر $x, y \in X$ داریم:

- $| < x, y > | \leq \|x\|\|y\|,$ نامساوی کوشی-شوارتز[2]
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,$ نامساوی مثلث
- $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$ اتحاد متوازی الاضلاع

تعریف۱۳.۱.۱ فضای ضرب داخلی Hرا یک فضای ضرب هیلبرت گویند هرگاه H نسبت به نرم تولید شده توسط ضرب داخلی $(\|x\| = \sqrt{< x, x >})$ یک فضای باناخ باشد.

مثال۶.۱.۱ فضای $L^2[a, b]$ با ضرب داخلی (۱.۱) یک فضای هیلبرت است.

[1] $Riesz - Fischer$

[2] $Cauchy - Showartz$

تعریف۱۴.۱.۱ (**تعامد**) فرض کنید X یک فضای ضرب داخلی باشد و$x, y \in X$ و $x \neq y$. x را بر y عمود گوییم هرگاه $<x, y> = 0$ و آن را با نماد $x \perp y$ نمایش می‌دهند.
زیرمجموعه A از X را متعامد گویند هرگاه

$$\forall x, y \in A, \qquad <x, y>= \begin{cases} 0 \quad ; & x \neq y, \\ \alpha > 0; & x = y. \end{cases}$$

اگر برای هر $x \in A$ داشته باشیم $\|x\| = 1$، مجموعه Aرا متعامد یکه یا نرمال نامند.

تعریف۱۵.۱.۱ فرض کنید X یک فضای ضرب داخلی و A زیر مجموعه ای از X باشد. قرار دهید:

$$A^{\perp} = \{y \in X :<x, y>= 0 \ \ \forall x \in A\}.$$

اگر $A^{\perp} = \{0\}$، گویند A کامل است.

مثال۷.۱.۱ در فضای $X = L^2[-\pi, \pi]$ با تابع ضرب داخلی (۱.۱)،
$A = \{sinx, sin2x, ...\} = \{sin\, nx\}_{n=1}^{\infty}$، زیرمجموعه‌ای متعامد است اما کامل نیست.

تعریف۱۶.۱.۱ اگر X یک فضای ضرب داخلی و A یک زیرمجموعه متعامد ازX باشد. آنگاه A را یک پایه متعامد یکه برای X گویند هرگاه به ازای هر $y \in X$ داشته باشیم:

$$y = \sum_{x \in A} <y, x> x.$$

۲.۱ سیستم های متعامد

تعریف۱.۲.۱ ρ را بر $[a, b]$ تابع وزن گویند هرگاه دارای خواص زیر باشد:

۱. ρ بر $[a, b]$ نامنفی باشد.

۲. ρ بر $[a, b]$ انتگرال‌پذیر باشد.

۳. ρ بر هیچ زیربازه $[a, b]$ صفر نباشد.

تعریف۲.۲.۱ فرض کنید $\{f_i\}_{i \geq 1}$ یک دنباله از توابع در $L^2[a, b]$ باشد، این دنباله متعامد است هرگاه

$$<f_i, f_j>= \begin{cases} 0 \quad ; & i \neq j, \\ \alpha_j > 0; & i = j. \end{cases}$$

به علاوه اگر به ازای هر i، $\|f_i\| = ۱$ آنگاه دنباله $\{f_i\}$ یک دنباله متعامد یکه (نرمال) است.
در $L^۲\,[a,b]$ ضرب داخلی را به صورت زیر تعریف کردیم:

$$\forall f,g \in L^۲[a,b], \qquad <f,g>= \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt.$$

اینک تابع ضرب داخلی را نسبت به تابع وزن $\rho(t)$ تعریف می‌کنیم:

$$<f,g>= \int_a^b \rho(t)f(t)\overline{g(t)}dt. \tag{۲.۱}$$

مثال۱.۲.۱ در فضای $L^۲\,[a,b]$، چندجمله‌ای‌های لژاندر نسبت به تابع وزن $\rho(x) = ۱$ متعامدند.
مثال۲.۲.۱ در فضای $L^۲\,[a,b]$، دنباله توابع $\{sin(nx)\}_{n=۱}^{\infty}$ و $\{cos(nx)\}_{n=۰}^{\infty}$ و $\{sin(nx)\}_{n=۱}^{\infty} \cup \{cos(mx)\}_{m=۰}^{\infty}$ نسبت به تابع وزن $\rho(x) = ۱$ متعامدند.
قضیه۱.۲.۱ دنباله توابع متعامد در هر فضای ضرب داخلی، مستقل خطی هستند.
تعریف۳.۲.۱ دستگاه متعامد نرمال $\{f_i\}$ را یک دستگاه متعامد نرمال کامل گویند، هرگاه هیچ دستگاه متعامد نرمال وسیعتر از آن وجود نداشته باشد. به عبارت دیگر اگر

$$\exists f, \quad \forall i, \qquad <f,f_i \;>= ۰ \Longrightarrow f \doteq ۰.$$

که درآن$\doteq$ به مفهوم تقریباً همه جا می‌باشد.
قضیه۲.۲.۱ اگر $f_۱, f_۲, \cdots, f_n$ دنباله‌ای از توابع متعامد نرمال در فضای $L^۲\,[a,b]$ باشند آنگاه $\alpha_۱, \alpha_۲, ..., \alpha_n$ ی هست که $\left\| f - \sum\limits_{i=۱}^{n} \alpha_i f_i \right\|$ می‌نیمم گردد و به $\sum\limits_{i=۱}^{n} \alpha_i f_i$ تقریب کمترین مربعات f گویند.
اثبات: فرض کنیم$\eta_i =< f, f_i >$. پس داریم:

$$\begin{aligned}\left\| f - \sum_{i=۱}^{n} \alpha_i f_i \right\|^۲ &=< f - \sum_{i=۱}^{n} \alpha_i f_i, f - \sum_{i=۱}^{n} \alpha_i f_i > \\ &=< f,f > - \sum_{i=۱}^{n} \alpha_i < f_i, f > - \sum_{j=۱}^{n} \overline{\alpha_j} < f, f_j > \\ &+ \sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n} \alpha_i \overline{\alpha_j} < f_i, f_j >\end{aligned}$$

$$= \|f\|^{۲} - \sum_{i=۱}^{n} \alpha_i \overline{\eta_i} - \sum_{i=۱}^{n} \overline{\alpha_i} \eta_i + \sum_{i=۱}^{n} \alpha_i \overline{\alpha_i}$$
$$= \|f\|^{۲} - \sum_{i=۱}^{n} \alpha_i \overline{\eta_i} - \sum_{i=۱}^{n} \overline{\alpha_i} \eta_i + \sum_{i=۱}^{n} \alpha_i \overline{\alpha_i} + \sum_{i=۱}^{n} \eta_i \overline{\eta_i} - \sum_{i=۱}^{n} \eta_i \overline{\eta_i}$$
$$= \|f\|^{۲} + \sum_{i=۱}^{n} (\alpha_i - \eta_i)(\overline{\alpha_i} - \overline{\eta_i}) - \sum_{i=۱}^{n} |\eta_i|^{۲},$$

در نتیجه

$$\left\| f - \sum_{i=۱}^{n} \alpha_i f_i \right\|^{۲} = \|f\|^{۲} - \sum_{i=۱}^{n} |\eta_i|^{۲} + \sum_{i=۱}^{n} |\alpha_i - \eta_i|^{۲}.$$

واضح است که $\|f - \sum \alpha_i f_i\|^{۲}$ می‌نیمم است هرگاه $\alpha_i = \eta_i$.

لذا با انتخاب $\alpha_i = \eta_i =< f, f_i >$، $\|f - \sum \alpha_i f_i\|$ حداقل است.

نتیجه: $\sum_{i=۱}^{n} |\eta_i|^{۲} \le \|f\|^{۲}$.

اثبات: با توجه به قضیه قبل بدیهی است.

۳.۱ مفاهیم پایه‌ای

در این بخش به معرفی چندجمله‌ای‌های متعامد می‌پردازیم [۳۰،۲۷،۳] که از اهمیت ویژه‌ای برخوردار می‌باشند.

۱.۳.۱ معرفی چندجمله‌ای چبیشف نوع اول

چندجمله‌ای چبیشف نوع اول از درجه n را با نماد $T_n(\xi)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_n(\xi) = cos(ncos^{-۱}\xi); \qquad -۱ \le \xi \le ۱, \qquad n = ۰, ۱, ۲, \cdots, \tag{۳.۱}$$

اگر قرار دهیم $\theta = cos^{-۱}(\xi)$، خواهیم داشت:

$$T_n(\xi) = cos(n\theta); \qquad ۰ \le \theta \le \pi, \tag{۴.۱}$$

در واقع $T_n(\xi)$ها جواب معادله دیفرانسیل چبیشف:

$$(1-\xi^2)\frac{d^2y}{d\xi^2}-\xi\frac{dy}{d\xi}+n^2y=0; \qquad -1\leq\xi\leq 1,$$

می‌باشند که این معادله حالتی خاص از معادله دیفرانسیل اشتورم-لیوویل است.
با استفاده از رابطه بازگشتی نیز می‌توان جملات $T_n(\xi)$ را به دست آورد که این رابطه عبارت است از:

$$\begin{aligned} &T_0(\xi)=1,\\ &T_1(\xi)=\xi,\\ &T_{n+1}(\xi)=2\xi T_n(\xi)-T_{n-1}(\xi); \qquad n\geq 1. \end{aligned} \tag{5.1}$$

با استفاده از این رابطه، چند جمله اول چندجمله‌ای چبیشف در زیر آورده شده است:

$$\begin{aligned} &T_0(\xi)=1,\\ &T_1(\xi)=\xi,\\ &T_2(\xi)=2\xi^2-1,\\ &T_3(\xi)=4\xi^3-3\xi. \end{aligned} \tag{6.1}$$

قضیه۱.۳.۱ اگر n یک عدد صحیح غیر منفی باشد آنگاه

$$T_n(\xi)=\frac{1}{2}[\{\xi+i\sqrt{1-\xi^2}\}^n+\{\xi-i\sqrt{1-\xi^2}\}^n]. \tag{7.1}$$

برای یافتن عبارتی کلی برای $T_n(\xi)$ برحسب توان‌های ξ، می‌توان از قضیه فوق و قضیه دوجمله‌ای به رابطه زیر دست یافت که برای تولید جملات $T_n(\xi)$ کاربرد دارد:

$$T_n(\xi)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\frac{n}{n-k}\begin{pmatrix} n-k\\ k\end{pmatrix}(-1)^k(2\xi)^{n-2k}. \tag{8.1}$$

تعریف۱.۳.۱ (فرمول رودریگز) اگر $n\geq 0$ باشد آنگاه

$$T_n(\xi)=\frac{(-2)^n n!}{(2n)!}\sqrt{1-\xi^2}\frac{d^n}{d\xi^n}(1-\xi^2)^{n-\frac{1}{2}}. \tag{9.1}$$

مقادیری خاص از چندجمله ای چبیشف:

$$T_n(-\xi) = (-1)^n T_n(\xi) = \begin{cases} T_n(\xi) \quad ; & \text{زوج } n, \\ -T_n(\xi) \quad ; & \text{فرد } n. \end{cases} \tag{۱۰.۱}$$

لذا $T_n(\xi)$ به ازای n های زوج، تابعی زوج و به ازای n های فرد، تابعی فرد می باشد. همچنین داریم:

$$\begin{aligned} &T_n(1) = 1, \\ &T_n(-1) = (-1)^n, \\ &T_{2n}(0) = (-1)^n, \\ &T_{2n+1}(0) = 0. \end{aligned}$$

خاصیت تعامد:

اگر n و m دو عدد صحیح نامنفی باشند آنگاه چندجمله‌ای‌های چبیشف نسبت به تابع وزن $\rho_T(\xi) = \dfrac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}$ در بازه $[-1, 1]$ متعامداند. که برای اثبات این رابطه می‌توان از هم ارزی‌های مثلثاتی بهره برد:

$$cos\ m\theta cos\ n\theta = \frac{1}{2}\left[cos\left(m+n\right)\theta + cos|m-n|\theta\right]. \tag{۱۱.۱}$$

لذا

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(\xi)T_m(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi = \begin{cases} 0 \quad ; & n \neq m, \\ \frac{\pi}{2} \quad ; & n = m \neq 0, \\ \pi \quad ; & n = m = 0. \end{cases} \tag{۱۲.۱}$$

صفرها و نقاط اکسترمم چندجمله‌ای چبیشف:

از آن جایی که نقطه بحرانی در نقاطی که مشتق صفر می‌شود و یا وجود ندارد، اتفاق می‌افتد. لذا نقاط بحرانی چندجمله‌ای‌های چبیشف در نقطه صفر و صفرهای تابع $sin(n\theta)$ ظاهر می‌شوند:

$$\theta_k = \frac{k\pi}{n}, \qquad \xi_k = cos(\frac{k\pi}{n}); \qquad k = 1, 2, ..., n-1.$$

در این نقاط، چندجمله‌ای‌های چبیشف دارای مقدار یک یا منفی یک می‌باشند. که مقدار یک، مقدار ماکزیمم و مقدار منفی یک، مقدار می‌نیمم این چندجمله‌ای‌ها می‌باشند. در واقع داریم:

$$T_n(\xi_k) = (-1)^k; \qquad k = 1, 2, ..., n-1,$$

صفرهای چندجمله‌ای‌های چبیشف که با نقاط بحرانی یک در میان ظاهر می‌شوند، عبارت‌اند از:

$$\theta_k = (k+\frac{1}{2})\frac{\pi}{n}, \qquad \xi_k = cos(\theta_k); \qquad k = 0, 1, ..., n-1.$$

از آن جایی که $T_n(\xi) = cos(n\theta)$، لذا چندجمله‌ای‌های چبیشف به ازای $m, n \geq 0$ در روابط زیر صدق می‌کنند:

$$T_n(\xi)T_m(\xi) = \frac{1}{2}[T_{n+m}(\xi) + T_{|m-n|}(\xi)],$$
$$T_n(T_m(\xi)) = T_m(T_n(\xi)) = T_{mn}(\xi).$$

برای بیان توان‌های ξ برحسب جملاتی از $T_n(\xi)$ با استفاده از رابطه:

$$cos\ \theta = \frac{\exp(i\theta) + \exp(-i\theta)}{2}, \qquad (۱۳.۱)$$

به عبارتی به صورت

$$\xi^n = 2^{1-n}\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{k} T_{n-2k}(\xi). \qquad (۱۴.۱)$$

می‌رسیم که اگر n زوج باشد $\frac{1}{2}$ ضریب T_0 در نظر گرفته می‌شود.
برای نمونه چهار جمله اول که با استفاده از عبارت بالا به دست آمده، در ادامه بیان شده است:

$$1 = T_0(\xi),$$
$$\xi = T_1(\xi),$$
$$\xi^2 = \frac{1}{2}[T_2(\xi) + T_0(\xi)],$$
$$\xi^3 = \frac{1}{4}[T_3(\xi) + 3T_1(\xi)]. \qquad (۱۵.۱)$$

۲.۳.۱ معرفی چندجمله‌ای لژاندر

چندجمله‌ای‌های لژاندر $\{P_n(\xi)\}_{n\geq ۰}$ روی بازه $[-۱,۱]$ یک مجموعه متعامد کامل در فضای $L^۲\,[-۱,۱]$ هستند. در واقع این چندجمله‌ای‌ها، جواب معادله لژاندر:

$$(۱-\xi^۲)\frac{d^۲y}{d\xi^۲}-۲\xi\frac{dy}{d\xi}+n\,(n+۱)\,y=۰,$$

می‌باشند که این معادله نوعی از معادله‌ی اشتورم-لیوویل است.
چندجمله‌ای‌های لژاندر روی بازه $[-۱,۱]$ را می‌توان با استفاده از رابطه بازگشتی زیر معرفی کرد:

$$\begin{aligned}&P_۰(\xi)=۱,\\&P_۱(\xi)=\xi,\\&P_{n+۱}(\xi)=\frac{۲n+۱}{n+۱}\xi P_n(\xi)-\frac{n}{n+۱}P_{n-۱}(\xi);\qquad n\geq ۱.\end{aligned}\tag{۱۶.۱}$$

که چند جمله اول این چندجمله‌ای عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned}&P_۰(\xi)=۱,\\&P_۱(\xi)=\xi,\\&P_۲(\xi)=\frac{۳}{۲}\xi^۲-\frac{۱}{۲},\\&P_۳(\xi)=\frac{۵}{۲}\xi^۳-\frac{۳}{۲}\xi.\end{aligned}\tag{۱۷.۱}$$

تعریف۲.۳.۱ (فرمول رودریگز) اگر $n\geq ۰$ باشد آنگاه

$$P_n(\xi)=\frac{۱}{۲^n n!}\frac{d^n}{d\xi^n}(\xi^۲-۱)^n.\tag{۱۸.۱}$$

تابع مولد برای چندجمله ای لژاندر:

قضیه۲.۳.۱ اگر $|t|<۱$ و $|\xi|\leq ۱$ آنگاه

$$\frac{۱}{\sqrt{۱-۲t\xi+t^۲}}=\sum_{n=۰}^{\infty}t^nP_n(\xi),\tag{۱۹.۱}$$

رابطه فوق بدین معناست که وقتی $\frac{۱}{\sqrt{۱-۲t\xi+t^۲}}$ به سری توانی نسبت به t بسط داده شود، ضریب t^n برابر $P_n(\xi)$ خواهد بود. $\frac{۱}{\sqrt{۱-۲t\xi+t^۲}}$ را تابع مولد چندجمله‌ای‌های لژاندر