دانشگاه زنجان
دانشکده علوم - گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

عنوان:

کلاسی از پیش شرطها برای دستگاه‌های خطی بزرگ- مقیاس در روش نقطه داخلی برای برنامه ریزی خطی

نگارش:
علیرضا علیزاده دیز

استاد راهنما:
دکتر محمد حسینی کولایی

آبان ۱۳۹۰

چکیده

کلاسی از پیش شرط‌ها برای جواب تکراری دستگاه‌های خطی به وجود آمده از روش‌های نقطه درونی پیشنهاد شده است. برای بیشتر این روش‌ها، دستگاه‌های خطی، متقارن و نامعین هستند. دستگاه می‌تواند به یک دستگاه معادلات نرمال که معین مثبت است کاهش یابد. نشان می‌دهیم هر پیش شرط برای دستگاه معادلات نرمال، معادلی برای دستگاه‌های افزوده دارند، در حالی که عکس آن برقرار نیست. این کلاس از پیش شرط‌ها درنزدیکی جواب مساله‌ی برنامه ریزی خطی وقتی خیلی بد حالت می‌شوند بهتر عمل می‌کند. دستگاه پیش شرط شده می‌تواند به یک دستگاه معین مثبت کاهش یابد. تکنیک‌های توسعه یافته برای یک پیاده سازی قابل رقابت نسبتا پیچیده هستند چون مجموعه ستون‌ها از قبل ناشناخته است. این پیش شرط در روش گرادیان مزدوج بکار رفته و با تجزیه‌ی چولسکی روی مسائل بزرگ ـ مقیاس به طوری که رهیافت تجزیه‌ی چولسکی شامل عناصر ناصفر زیاد است به طور مطلوب مقایسه شده است.

واژگان کلیدی: .برنامه ریزی خطی، روش نقطه درونی، پیش شرط سازی، دستگاه افزوده

مقدمه

بهینه‌سازی [۱] یکی از موضوع‌های مهم در زمینه‌های علوم کامپیوتر، تحقیق در عملیات و هوش مصنوعی به شمار می‌آید. به زبان ساده، بهینه‌سازی به معنای انجام بهتر کارها است. وقتی از بهینه‌سازی صحبت به میان می‌آید، گواهی بر این است که مسأله جواب‌های متفاوتی دارد که ارزش یکسان ندارند. فرآیند بهینه‌سازی، انتخاب بهترین جواب را امکان‌پذیر می‌کند.

برنامه ریزی خطی [۲] می‌نیمم سازی یک تابع هزینه‌ی خطی در رابطه با قیدهای معادله و نامعادله است. روش‌های زیادی برای می‌نیمم سازی این نوع مسائل به وجود آمده است که اولین آن‌ها را دانتزیک به نام روش سیمپلکس در سال ۱۹۴۷ ارائه کرد. پس از آن دوره پرکاری بر مهمترین مسائل در حمل و نقل، اقتصاد، عملیات جنگی، زمان بندی و از این دست مسائل شروع شد. از این دست مسائل که با مدل بندییی به شکل برنامه ریزی خطی ارائه شده‌اند، مساله برش الوار، مساله کوتاه‌ترین مسیر، مساله درخت فراگیر، مساله کوله پشتی، مساله فروشنده دوره گرد و زمان‌بندی مساله رژیم غذایی را می‌توان نام برد. روش سیمپلکس مسائل برنامه ریزی خطی را با عبور از نقاط راسی در امتداد مرز مجموعه شدنی در جهت بهبود هزینه در هر تکرار پیمایش می‌کند. در اواسط دهه ۱۹۸۰ الگوریتم‌هایی که با حرکت در درون مجموعه شدنی یک جواب بهینه را پیدا می‌کنند ارائه شدند. به همین دلیل به روش‌های نقطه درونی [۳] مشهورشدند. در عمل این روش‌ها اغلب برای مسائل بزرگ ـ مقیاس [۴] با روش سیمپلکس قابل مقایسه می‌باشند.

از روش‌های موفق برای حل مسائل برنامه ریزی خطی روش‌های نقطه درونی می‌باشد که با انتشار مقاله کارماکار [۱۷] در سال ۱۹۸۶ آغاز گردید و با ارائه روش‌های کارایی از نوع اولیه ـ دوگان [۳۱] ادامه یافت. در این روش‌ها پر هزینه‌ترین مرحله، محاسبه جهت جستجو از طریق حل یک یا چند دستگاه خطی می‌باشد. چنین دستگاه‌هایی نامعین هستند و می‌توانند به شکل متقارنی به نام دستگاه‌های افزوده [۵] نوشته شوند. روش متداول برای کاهش دستگاه افزوده به دستگاه معین مثبت کوچکتر، معادلات نرمال [۶] نامیده می‌شود. حل این دستگاه‌ها

[۱] Optimization
[۲] Linear Programming
[۳] Interior point
[۴] Large - scale
[۵] Augmented system
[۶] Normal equqtions

برای مسائل بزرگ مقیاس از طریق روش‌های تکراری [۷] می‌باشد[۱۳]. موفقیت پیاده سازی استفاده از روش‌های تکراری وابسته به انتخاب پیش شرط مناسب می‌باشد.

در این پایان نامه کلاسی از پیش شرطها [۸] توسط الیویرا و سورنسن [۲۴] مورد بررسی قرار می‌گیرد و نشان داده می‌شود که هر پیش شرط برای دستگاه معادلات نرمال

، معادلی برای دستگاه افزوده دارد، در حالی که عکس آن برقرار نیست. این کلاس از پیش شرطها از محاسبه معادلات نرمال اجتناب می‌کنند. پیش شرطها روی یک تجزیه‌ی LU از یک زیر مجموعه ناشناخته از قبل به جای ستون‌های ماتریس محدودیت تکیه دارند. بعضی ویژگی ماتریس پیش شرط شده و کاهش آن به ماتریس معین مثبت [۹] توسعه داده می‌شود. همچنین نتایج عددی حاصل از بکارگیری پیش شرط مذکور برای روش‌های گرادیان مزدوج [۱۰] و مقایسه آن با دیگر روش‌ها برای بررسی کلاس پیشنهاد شده از پیش شرطها توسط اولیویرا و سورنسن مدنظر می‌باشد[۱].

این رساله در چهار فصل ارائه شده است، در فصل اول به تعاریف اولیه و روش سیمپلکس برای برنامه ریزی خطی دوگان وقضایای دوگانی می‌پردازیم.

در فصل دوم به حل دستگاه و چند نوع تجزیه که برای هدفمان مناسب هستند از جمله روش گرادیان مزدوج، پیش شرط سازی گرادیان مزدوج، تجزیه‌ی چولسکی، چولسکی ناقص، پیش شرط سازی چولسکی و چولسکی ناقص [۱۱] می‌پردازیم.

در فصل سوم روش‌های نقطه درونی و الگوریتم‌های روش‌های نقطه درونی مد نظر از جمله روش تعقیب مسیر اولیه ـ دوگان و مهروترا آورده شده به طوری که برای مسائل بزرگ مقیاس مناسب هستند.

در نهایت در فصل چهار هدف این پایانامه که بررسی یک پیش شرط و جنبه‌های مختلف پیاده سازی و آزمون‌های عددی آن است آورده می‌شود.

---

[۷] Interative
[۸] Preconditioner
[۹] Positive definite matrix
[۱۰] Conjugrate gradient
[۱۱] Cholesky factorization

فهرست مطالب

فصل ۱

مفاهیم اولیه و روش سیمپلکس

این فصل به بیان تعاریف و مفاهیم اولیه‌ی مورد نیاز در این پایان‌نامه می‌پردازیم. مفاهیم و تعاریف این فصل از مراجع [۳۲] و [۳۳] برگرفته شده‌اند.

۱.۱ مفاهیم اولیه

تعریف ۱.۱.۱. *یک ماتریس $A = (a_{ij})$ از مرتبه $m \times n$ یک ماتریس قطری* [۱] *است اگر ه* $a_{ij} =$ *به ازای* $i \neq j$ *و می‌نویسیم* $A = diag(a_{11}, \cdots, a_{ss})$ *، که در آن* $s = \min(m, n)$.

تعریف ۲.۱.۱. *ترانهاده یک ماتریس A از مرتبه $m \times n$ با A^t نمایش داده می‌شود، و ماتریس از مرتبه $n \times m$ است و با تعویض سطرها و ستون‌های A بدست می‌آید.*

تعریف ۳.۱.۱. *یک ماتریس مربعی $A = (a_{ij})$ یک ماتریس بالا مثلثی* [۲] *است اگر ه* $a_{ij} =$ *به ازای هر* $i > j$.

ترانهاده یک ماتریس بالا مثلثی [۳] *، پایین مثلثی است، یعنی $A = (a_{ij})$ پایین مثلثی است اگر ه* $a_{ij} =$ *به ازای* $i < j$.

تعریف ۴.۱.۱. *یک ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ، معین مثبت* [۴] *نامیده می‌شود اگر برای هر بردار مخالف صفر $x \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم:*

---
[۱] Diagonal Matrix
[۲] Upper-triangular matrix
[۳] Lower-triangular matrix
[۴] Positive definite matrix

$$x^t A x > 0.$$

تعریف ۵.۱.۱. *$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ نیمه معین [۵] مثبت نامیده می‌شود اگر برای هر بردار مخالف صفر $x \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم:*

$$x^t A x \geqslant 0.$$

نرم‌ها [۶]: نرم‌ها سه دسته اند: برداری، ماتریس و نرم ماتریسی ناشی از نرم برداری.

نرم تعمیمی از قدر مطلق است و نرم‌ها با هم معادلند، زیرا نتیجه‌ای که در تفسیر دارند به یک شکل است.از این نرم‌ها نرم ماتریسی مد نظر ما است.

تعریف ۶.۱.۱. *نرم ماتریسی تابعی است از $\|\ .\ \|: \mathbb{R}^{m\times n} \longrightarrow \mathbb{R}.$ و دارای خواص زیر است:*

$a)\ \| A \| \geqslant 0, \| A \| = 0 \Leftrightarrow A = 0,$

$b) a \in \mathbb{R} \qquad \| aA \| = | a | \| A \|,$

$c) \forall A, B \in \mathbb{R}^{m\times n} \qquad \| A + B \| \leqslant \| A \| + \| B \| .$

برای ماتریس‌هایی که ضرب در آن‌ها تعریف شده است

$d)\ \| AB \| \leqslant \| A \| \| B \| .$

تعریف ۷.۱.۱. *حالت یک مساله: اگر d داده یک مساله P و $s(d)$ جواب مساله به ازای این داده باشد. گوییم P در نقطه d بد حالت [۷] است اگر:*

[۵] Positive semidefinite matrix
[۶] Norm
[۷] Ill-conditioned

$$\| s(d) - s(d_1) \| / \| d - d_1 \|,$$

برای برخی d_1 نزدیک به d بزرگ باشد.

مساله خوش حالت [8] است اگر بزرگترین آنها کوچک باشد.

تعریف ۸.۱.۱. اگر برای مقادیر δ_1 و ε_1 نزدیک به رند عدد یک داشته باشیم:

$$\| s_c(d) - s(d) \| \leqslant \delta_1 + \varepsilon_1 \| s(d) \| .$$

الگوریتم را پیشرو پایدار [9] می‌نامیم. در خطای پسرو مطالعه بر روی جواب بدست آمده به عنوان جواب دقیق داده کمی تغییر یافته صورت می‌پذیرد. لذا اگر $s_c(d)$ جواب واقعی d_N باشد، مقدار خطای $\| d_N - d \|$ را ملاک عمل قرار می‌دهیم، یعنی اگر برای همه مقادیر d وجود داشته باشد اعداد $\varepsilon > \| \varepsilon_2 \|$ و $\| \delta_2 \|$ به طوری که:

$$\| d_N - d \| \leqslant \delta_2 + \varepsilon_2 \| d \| .$$

گوییم الگوریتم پسرو پایدار است.

تعریف ۹.۱.۱. برای مساله دستگاه خطی [10] $Ax = b$ ، عدد وضعیت یا عدد حالت عبارت است از:

$$Cond(A) = \| A \| \| A^{-1} \| .$$

اگر مقدار فوق کوچک باشد گوییم A خوش حالت است و A حساس نیست، و اگر این مقدار بزرگ باشد گوییم A بد حالت است.

[8] Well conditioned
[9] Stable
[10] Linear system

تعریف ۱.۱.۱۰. برنامه ریزی خطی عبارت است از، مینیمم سازی یک تابع هدف [۱۱] خطی در رابطه با قیدهای معادله و نامعادله خطی که صورت استانداردی به شکل زیر دارد:

$$\begin{array}{ll} minimize & c^t x \\ subject\ to & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array} \qquad (1.1)$$

که در آن c یک n- بردار هزینه به طوری که c_i هزینه هر واحد، A یک ماتریس $m \times n$، x n- بردار متغیرها و b نیز m- بردار نشانه است. فرم استاندارد اولیه [۱۲] مساله برنامه ریزی خطی است. متناسب با مساله اولیه دوگان آن است که به فرم استاندارد زیر نشان داده شده است:

$$\begin{array}{ll} maxmize & b^t y \\ subject\ to & A^t y + z = c, \\ & z \geq 0, \end{array} \qquad (2.1)$$

به‌طوری‌که y، m- بردار متغیر آزاد [۱۳] و z، n- بردار متغیر کمکی [۱۴] است.

تعریف ۱.۱.۱۱. یک چند وجهی[۱۵] مجموعه‌ای است که می‌تواند به صورت $\{x \in \mathbb{R}^n | Ax \geq b\}$ نمایش داده شود که در آن A یک ماتریس $m \times n$ و b برداری در $\mathbb{R}^m$ می‌باشد.

تعریف ۱.۱.۱۲. فرض کنید که P یک چند وجهی باشد. بردار $x \in P$ را یک نقطه فرین P می‌گوییم هر گاه نتوان بردارهای y و z در P، هر دو متمایز از x و عدد $\lambda \in [0, 1]$ یافت به طوری که $x = \lambda y + (1 - \lambda)x$.

تعریف ۱.۱.۱۳. فرض کنید که P یک چند وجهی باشد. بردار $x \in P$ را یک راس P می‌گوییم هر گاه برداری مانند c وجود داشته باشد به طوری که $c^t x < c^t y$ به ازای هر $y \in P$ که $x \neq y$.

تعریف ۱.۱.۱۴. اگر بردار x^* در $a_i^t x = b_i$ به ازای بعضی i صدق کند، آنگاه قید متناظر را در x^* موثر یا فعال می‌گوییم.

تعریف ۱.۱.۱۵. فرض کنید که P یک چند وجهی با قیدهای معادله و نامعادله تعریف شده و x^* عضوی از $\mathbb{R}^n$ باشد.

---

[۱۱] Objective function
[۱۲] Primal
[۱۳] Free variable vector
[۱۴] Slack variable vector
[۱۵] polyhedron

الف) بردار x^* را یک جواب اساسی می‌گوییم هرگاه:

۱) همه قیدهای معادله موثر باشد.

۲) در بین قیدهایی که در x^* موثر هستند n قید مستقل خطی وجود داشته باشد.

ب) اگر x^* یک جواب اساسی باشد که در همه قیود صدق کند، آنگاه آن را یک جواب شدنی اساسی می‌گوییم.

تعریف ۱.۱.۱۶. *چند وجهی استاندارد $P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$ را در نظر بگیرید و فرض کنید x یک جواب اساسی باشد. هم‌چنین، فرض کنید تعداد سطرهای A برابر m باشد. بردار x را یک جواب اساسی تبهگن می‌گوییم هر گاه بیش از $n - m$ مولفه آن صفر باشد.*

تعریف ۱.۱.۱۷. *فرض کنید x عضوی از چند وجهی P باشد. بردار $d \in \mathbb{R}^n$ را یک جهت شدنی در x می‌گوییم هر گاه به ازای هر عدد مثبتی مانند θ داشته باشیم $x + \theta d \in P$.*

تعریف ۱.۱.۱۸. *فرض کنید x یک جواب شدنی اساسی، B یک ماتریس پایه متناظر با آن، و c_B بردار هزینه متناظر با آن باشد. به ازای هر j، هزینه تقلیل یافته $\tilde{c_j}$ به صورت*

$$\tilde{c_j} = c_j - c_B^t B^{-1} A_j,$$

تعریف می‌شود.

۱.۲ برنامه‌ریزی خطی

برنامه‌ریزی خطی (LP) یک روش ریاضی برای بهینه‌سازی یک تابع هدف خطی (از قبیل ماکزیمم نمودن سود یا می‌نیمم کردن هزینه) تحت محدودیت‌های خطی مساوی و یا نامساوی است.

مسائل LP را به طور عمده به دو شکل استاندارد و متعارفی نمایش می‌دهند.

یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی به فرم استاندارد به صورت

$$\begin{array}{ll} minimize & c^t x \\ subject\ to & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array}$$

نمایش داده می‌شود که در آن c^tx **تابع هدف**، $x \in \mathbb{R}^m$ بردار متغیرها، $c \in \mathbb{R}^m$ بردار ضرایب هزینه و $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ ماتریس ضرایب می‌باشند. معادلات $Ax = b$ نیز **محدودیت‌های خطی** نامیده می‌شوند.

شکل دیگر نمایش مسأله‌ی LP استفاده از شکل متعارفی است که به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & c^tx \\
s.t. \quad & Ax \le b, \\
& x \ge 0.
\end{aligned}
$$

در عمل بسیاری از مسائل در حوزه‌ی تحقیق در عملیات را می‌توان در قالب مسائل LP مدل‌بندی کرد. در یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی (LP)، x را یک جواب شدنی گویند هرگاه در تمام محدودیت‌های مسأله صدق کند. مجموعه‌ی جواب‌های شدنی را نیز مجموعه‌ی شدنی یا ناحیه شدنی گویند که معمولاً با مجموعه‌ی X نمایش داده می‌شود. فرض کنید $A = (B, N)$ یک افراز از ماتریس ضرایب A باشد که در آن B یک ماتریس معکوس‌پذیر $n \times n$ و N یک ماتریس $n \times (m-n)$ باشد. $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ را که در آن $x_B = B^{-1}b$ و $x_N = 0$ یک جواب پایه‌ای و اگر $x_B \ge 0$، آن را یک جواب شدنی پایه‌ای(BFS) می‌نامند. اگر $x_B > 0$، آنگاه x_B یک جواب شدنی پایه‌ای ناتباهیده است و در صورتی که یکی از مؤلفه‌های x_B صفر باشد، آنگاه x_B یک جواب شدنی پایه‌ای تباهیده نامیده می‌شود. همچنین، مؤلفه‌های x_B به عنوان متغیرهای پایه‌ای و مؤلفه‌های x_N به عنوان متغیرهای غیرپایه‌ای در نظر گرفته می‌شوند.

۱.۲.۱ دوگانی

هر مسأله‌ی LP به عنوان یک مسأله‌ی اولیه در نظر گرفته می‌شود که برای این نوع مسأله می‌توان یک مسأله‌ی متناظر تعریف کرد. مسأله‌ی متناظر با مسأله‌ی اولیه را مسأله‌ی دوگان می‌نامند. دو شکل (تعریف) مهم از دوگان وجود دارد: شکل استاندارد و شکل متعارفی. این اشکال کاملاً معادل هستند و به ترتیب از نمایش استاندارد و متعارفی مسائل برنامه‌ریزی خطی به دست می‌آیند.

در هر مسألهی دوگان، دقیقاً یک متغیر دوگان برای هر محدودیت اولیه و دقیقاً یک محدودیت دوگان برای هر متغیر اولیه وجود دارد. دوگان مسألهی (۱.۱) را میتوان به صورت

$$\begin{aligned} \max \quad & w^t b \\ s.t. \quad & w^t A \leq c, \\ & w \;\; free. \end{aligned}$$

نمایش داد که در آن w متغیر دوگان متناظر با محدودیت خطی مسألهی (۱.۱) است.

یک نتیجهی مهم از دوگانی که به قضیهی دوگانی معروف است، این است که هر جواب شدنی از دوگان یک مسألهی LP، کرانی برای مقدار بهینهی مسألهی اولیه است. همچنین در برخی موارد حل مسألهی دوگان سادهتر از حل مسألهی اولیه است. در ادامه به برخی از قضایای موجود بین مسائل اولیه و دوگان اشاره میکنیم.

قضیه ۱.۲.۱. *قضیه دوگانی ضعیف:*

اگر x جواب شدنی مسألهی اولیه و w جواب شدنی مسألهی دوگان باشد (در شکل متعارفی)، آنگاه

$$w^t b \leqslant c^t x.$$

به عبارت دیگر، مقدار تابع هدف به ازای هر جواب شدنی مسألهی مینیمم سازی همواره بزرگتر یا مساوی مقدار تابع هدف به ازای هر جواب شدنی مسألهی ماکزیمم سازی است.

قضیه ۲.۲.۱. *قضیه دوگانی قوی:*

اگر مسألهی برنامهریزی خطی جواب بهینه داشته باشد، مسألهی دوگان نیز جواب بهینه دارد و مقادیر توابع هدف بهینهی آنها مساوی هستند.

قضیه ۳.۲.۱. *قضیه مکمل زائد:*

فرض کنید x و w به ترتیب جوابهای شدنی مسائل اولیه و دوگان باشند. بردارهای x و w جوابهای بهینهی

مسائل متناظرشان هستند اگر و فقط اگر

$$w_i(a^i x - b_i) = 0 \qquad \forall i,$$

$$(c_j - w^T a_j)x_j = 0 \qquad \forall j.$$

۲.۲.۱ روش‌های حل LP

معروف‌ترین روش حل برای مسائل LP روش سیمپلکس است. این روش توسط پروفسور جرج دانتزیگ [۱۶] در سال ۱۹۴۷ ابداع شد. سیمپلکس یک روش مرحله‌ای برای حل مسائل LP است. روش سیمپلکس متکی بر این مطلب است که اگر یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی جواب بهینه داشته باشد، آنگاه یک جواب شدنی اساسی وجود دارد که بهینه است [۳۲]. در روش سیمپلکس جستجو برای یافتن یک جواب بهینه با حرکت از یک جواب شدنی پایه‌ای به جواب شدنی پایه‌ای دیگر، در امتداد یال‌های مجموعه‌ی شدنی و همواره در جهت تقلیل دادن هزینه، انجام می‌پذیرد. در نهایت، یک جواب شدنی پایه‌ای به دست می‌آید که هیچ یک از یال‌های موجود در آن نمی‌توانند باعث کاهش هزینه شوند. چنین جواب شدنی پایه‌ای بهینه است و الگوریتم خاتمه می‌یابد. رفتن از یک جواب شدنی پایه‌ای به یک جواب شدنی پایه‌ای دیگر تا زمانی که الگوریتم به یک جواب بهینه برسد، یا با این نتیجه که مسأله جواب بهینه ندارد، ادامه می‌یابد. امروزه برای حل مسائل LP با استفاده از روش سیمپلکس، نرم افزارهای مختلفی طراحی شده است که از آن جمله می‌توان به نرم افزار $CPLEX$ اشاره کرد.

یک تکرار روش سیمپلکس

۱. یک تکرار نوعی، با یک پایه شامل ستون‌های اساسی $A_{B(1)}, \cdots, A_{B(m)}$ و یک جواب شدنی اساسی متناظر، مانند x شروع می‌شود.

۲. هزینه‌های تقلیل یافته $\tilde{c_j} = c_j - c_B^t B^{-1} A_j,$ را برای همه اندیس‌های غیر اساسی محاسبه کنید. اگر آنها

[۱۶] George Dantzig

نامنفی هستند، آنگاه جواب شدنی اساسی فعلی بهینه است، الگوریتم بهینه است. در غیر این صورت، بعضی اندیس j با $\tilde{c_j} < 0$ انتخاب کنید.

۳. بردار $u = B^{-1}A_j$ را محاسبه کنید. اگر هیچ مولفه u مثبت نیست، آنگاه قرار دهید $\theta^* = -\infty$. هزینه‌ی بهینه $-\infty$ است و الگوریتم خاتمه می‌یابد.

۴. اگر بعضی مولفه‌ی u مثبت است، آنگاه قرار دهید

$$\theta^* = \min_{\{i=1,\cdots,m | u_i > 0\}} \frac{x_{B(i)}}{u_i}$$

۵. فرض کنید k چنان باشد که $\theta^* = x_{B(i)}/u_i$. پایه جدید را با تعویض $A_{B(k)}$ و A_j تشکیل دهید. اگر y جواب شدنی اساسی جدید است. آنگاه مقدار متغیرهای جدید برابر با $y_j = \theta^*$ و $y_{B(i)} = x_{B(i)} - \theta^* u_i$ ، $i \neq k$، می‌باشد.

روش‌های حل دیگری که در اواسط دهه ۱۹۸۰ برای برنامه‌ریزی خطی ارائه شدند، روش‌های نقطه درونی هستند. این روش‌ها یک جواب بهینه را با حرکت در درون مجموعه‌ی شدنی پیدا می‌کنند، به این دلیل به آنها روش‌های نقطه درونی می‌گویند. در عمل، این روش‌ها قابل مقایسه با روش سیمپلکس هستند و اغلب، بویژه برای مسائل بزرگ و تنک، بهتر از روش سیمپلکس عمل می‌کنند. از نظر تئوری، روش‌های نقطه درونی منجر به الگوریتم‌های کارا (زمان چندجمله‌ای) می‌شوند و از نظر عملی، حل مسائل بزرگ را، که در اکثر کاربردها بروز می‌کنند، ممکن می‌سازند.

در فصل سوم به تفصیل درباره‌ی روشهای نقطه درونی بحث می‌کنیم و از روشهای تکراری برای این روش خصوصا روش نیوتن برای بهینه سازی تابع هدف در این روش‌ها نیز استفاده می‌کنیم.

فصل ۲

حل دستگاه‌ها

در این فصل به بررسی چند تجزیه مهم و معرفی ساختار پیش شرط که زیربنای محاسبات و مقایسه‌ها در فصل بعد را دربر می‌گیرند می‌پردازیم. تجزیه‌هایی که در این بخش آورده شده‌اند همچون تجزیه LU، تجزیه چولسکی و چولسکی ناقص، گرادیان مزدوج و پیش‌شرط گرادیان مزدوج و چولسکی ناقص در رابطه با روش نقطه درونی در برنامه ریزی خطی برای حل دستگاه‌های خطی مورد استفاده قرار می‌گیرند. همچنین به بحث درباره حل دستگاه‌ها و الگوریتم‌های این تجزیه‌ها می‌پردازیم.

الگوریتم‌ها و قضایای این فصل از مراجع [۳۱] و [۳۲] برگزیده شده‌اند.

۱.۲ ماتریس‌های مقدماتی و تجزیه LU

در این بخش نشان می‌دهیم که چگونه یک ماتریس را با استفاده از طرح حذفی کلاسیک معروف به طرح حذفی گاوس به مثلثی تبدیل می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۲. *یک ماتریس پایین مثلثی مقدماتی مرتبه* n *یک ماتریس به شکل زیر است:*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m_{k+1,k} & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m_{n,k} & \ddots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

بنابراین یک ماتریس مقدماتی [1] یک ماتریس واحد است بجز احتمالا برای یک تعداد کمی عنصر [2] مخالف صفر که در زیر قطر تنها در یک ستون وجود دارند. اگر عناصر مخالف صفر در ستون kام به صورت نشان داده شده در فوق قرار گرفته باشد، آن‌گاه E دارای شکل

$$E = I + m_k e_k^t$$

است که در آن I ماتریس واحد از مرتبه n، $m_k = (0, 0 \cdots, m_{k+1,k}, \cdots, m_{n,k})$ و e_k بردار واحد kام می‌باشد. توجه کنید که $e_i^t m_k = 0$ برای $i = 1, 2, \cdots, k$.

لم ۲.۱.۲. *با مفروض بودن*

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \qquad a_1 \neq 0$$

یک ماتریس مقدماتی E وجود دارد به قسمی که Ea مضربی از e_1 باشد.

برهان. اثبات در [۳۲]. ■

تعریف ۳.۱.۲. *عناصر $m_{i1} = -a_i/a_1$ برای $i = 2, \cdots, n$ ضریبگرها نامیده می‌شوند.*

[1] Elementary matrix
[2] Entry

۱.۱.۲ حذفی گاوس بدون محورگیری

در این بخش خواهیم دید که فرایند حذفی گاوس هرگاه به طور کامل انجام شود یک تجزیه LU از A، به صورت $A = LU$ را نتیجه می‌دهد. نکته کلیدی این است که ماتریس $A^{(k)}$ پیش ضرب $A^{(k-1)}$ در یک ماتریس پایین مثلثی مقدماتی مناسب است.

قرار دهید $A = A^{(0)}$.

گام ۱: یک ماتریس مقدماتی E_1 پیدا کنید به طوری که $A^{(1)} = E_1 A$ در ستون اول در زیر عنصر $(1, 1)$ دارای عناصر صفر باشد.

توجه کنید که کافی است فقط E_1 را به گونه‌ای پیدا کنید که

$$E_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

بنابر این $A^{(1)} = E_1 A$ در زیر ستون اول به استثنای عنصر $(1, 1)$ دارای عناصر صفر خواهد بود.

گام ۲: یک ماتریس مقدماتی E_2 به قسمی پیدا کنید که $A^{(2)} = E_2 A^{(1)}$ در ستون دوم و در زیر عنصر $(2, 2)$ دارای عناصر صفر باشد. ماتریس می‌تواند به صورت زیر ساخته شود.

ابتدا یک ماتریس $\tilde{E}_2$ از مرتبه $(n-1)$ طوری پیدا کنید که

$$\tilde{E}_2 \begin{pmatrix} a^{(1)}_{2,2} \\ a^{(1)}_{3,2} \\ \vdots \\ a^{(1)}_{n,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{(1)}_{2,2} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

ضریبگرهای $m_{32}, \cdots, m_{n2}$؛ $m_{i2} = -a^{(1)}_{i2}/a^{(1)}_{22}$ برای $i = 3, \cdots, n$ را ثبت کنید. تعریف کنید:

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{E}_2 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{E}_2 \end{pmatrix}$$

در نتیجه $A^{(2)} = E_2 A^{(1)}$ در ستون دوم و در زیر عنصر $(2,2)$ دارای عناصر صفر خواهد بود.

توجه کنید که پیش ضرب $A^{(2)}$ در E_2 صفرهای قبلا تولید شده در $A^{(1)}$ را تغییر نمی‌دهد.

گام k: به طور کلی در گام k ام، یک ماتریس مقدماتی E_k به قسمی پیدا کنید که $A^{(k)} = E_k A^{(k-1)}$ در ستون k ام و در زیر عنصر (k,k) دارای عناصر صفر باشد. E_k در دو گام متوالی محاسبه می‌شود. ابتدا یک ماتریس مقدماتی $\tilde{E}_k$ از مرتبه $n-k+1$ ساخته می‌شود به‌طوری که:

$$\tilde{E}_k \begin{pmatrix} a_{k,k}^{(k-1)} \\ a_{k+1,k}^{(k-1)} \\ \vdots \\ a_{n,k}^{(k-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{k,k}^{(k-1)} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

و سپس E_k به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$.\, E_k = \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 \\ & \tilde{E}_k \\ 0 & \end{pmatrix}$$

در اینجا E_{k-1} ماتریس حاصل از $(k-1)$ سطر و ستون اول ماتریس واحد $n \times n$ می‌باشد.

ضربگرهای زیر را ثبت کنید:

$$m_{k+1,k}, \cdots, m_{n,k}; m_{ik} = -a_{i,k}^{(k-1)}/a_{k,k}^{(k-1)}, \quad i = k-1, \cdots, n,$$

گام $n-1$: در انتهای گام $n-1$ام، ماتریس $A^{(n-1)}$ یک ماتریس بالا مثلثی بوده و همان ماتریس در روش حذفی گاوس است.

L و U را بدست می‌آوریم:

$$A^{(n-1)} = E_{n-1}A^{(n-2)} = E_{n-1}E_{n-2}A^{(n-3)} = \cdots = E_{n-1}E_{n-2}E_{n-3}\cdots E_2E_1A.$$

قرار دهید

$$U = A^{(n-1)}, \qquad L_1 = E_{n-1}E_{n-2}E_{n-3}\cdots E_2E_1,$$

بنابراین

$$U = L_1 A$$

چون هر E_k یک ماتریس پایین مثلثی واحد (یک ماتریس پایین مثلثی دارای ۱ در امتداد قطر) است، بنابراین L_1^{-1} وجود دارد. (توجه کنید که حاصل‌ضرب دو ماتریس مثلثی از یک نوع یک ماتریس مثلثی از همان نوع است.) قرار دهید $L = L_1^{-1}$. آنگاه $U = L_1 A$ به صورت زیر در می‌آید:

$$A = LU.$$

این تجزیه A به تجزیه LU معروف است.

تعریف ۴.۱.۲. عناصر $a_{11}, a_{22}^{(1)}, ..., a_{nn}^{(n-1)}$ عناصر محوری نامیده می‌شوند که عناصر قطری ماتریس مثلثی $A^{(n-1)}$ می‌باشند و فرایند قبلی برای بدست آوردن تجزیه LU به حذفی گاوس بدون تعویض سطر معروف است. این فرایند معمولا معروف به حذفی گاوس بدون محورگیری است.

۲.۲ تجزیه چولسکی

ابتدا نشان می‌هیم که برای ماتریس معین مثبت متقارن A یک تجزیه منحصر به فرد

$$A = HH^t$$

وجود دارد که در آن H ماتریس پایین مثلثی است. که به تجزیه چولسکی معروف است. این تجزیه را می‌توان یا از روی تجزیه LU یا با پیدا کردن مستقیم ماتریس H بدست آورد. در محاسبات عملی از روش اخیر یعنی پیدا کردن مستقیم ماتریس H استفاده میشود.

برای این کار از روی تجزیه LU ، توجه می‌کنیم که A یک ماتریس معین مثبت است و در نتیجه کهاد [۳] های اصلی پیشرو مثبت است، چون تجزیه LU منحصر به فرد می‌باشد ماتریس بالا مثلثی U را می‌توان به صورت

$$U = DU_1$$

[۳] Minor