بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ی ریاضی محض گرایش جبر

گروه های وایل آفین توسیعی از نوع A_1

استادان راهنما :

دکتر سعید اعظم

دکتر ملیحه یوسف زاده

پژوهشگر :

زینب خدایی

مهر ماه ۱۳۹۰

کلیه حقوق مادی مترتب به نتایج مطالعات، ابتکارات و نو آوری های ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به دانشگاه اصفهان است.

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان
دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش جبر خانم زینب خدایی

تحت عنوان:

گروههای وایل آفین توسیعی از نوع A_1

در تاریخ ۹۰/۷/۲۳ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه عالی به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه	دکتر سعید اعظم	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۲- استاد راهنمای پایان نامه	دکتر ملیحه یوسف زاده	با مرتبه علمی استادیار	امضاء
۳- استاد داور داخل گروه	دکتر علیرضا عبدالهی	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۴- استاد داور خارج گروه	دکتر بیژن طائری	با مرتبه علمی استاد	امضاء

گروه ریاضی دانشگاه اصفهان

مهر و امضای مدیر گروه ....

سپاسگزاری

شکر و سپاس خداوند بی همتا راست که همواره این بنده ی زمینی را مورد الطاف و عطایای آسمانی خود قرار داده و لحظه ای عنایت بی کران خود را از او دریغ نفرموده است.

با تشکر و سپاس از روح دانش دوست و دستان پرتوان پدرم، نگاه پر مهر و حمایت های همیشگی مادرم و بهترین مشوقم در راه تحصیل علم، همسر مهربانم ، هم چنین برادران عزیزم که مرا در این راه یاری کردند.

و با قدردانی ویژه از گرانمایه استادم دکتر سعید اعظم که اقیانوس علم و مهربانی است و در این مدت صبورانه مرا راهنمایی نمودند. هم چنین با تشکر از استاد عزیزم خانم دکتر ملیحه یوسف زاده که رهنمودهای دقیق ایشان تاثیر بسزایی در این پایان نامه داشته است.

تقدیم به روان پاک

دانش آموز شهید محمد مهدوی

چکیده

یک نمایش شناخته شده برای گروه های وایل متناهی و آفین، نمایش مزدوجی است. اخیراً ثابت شده که این نمایش برای زیر کلاس های خاصی از گروه های وایل آفین توسیعی نیز وجود دارد. در این پایان نامه، شرایط لازم و کافی برای آن که یک گروه وایل آفین توسیعی از نوع A_1 دارای نمایش مزدوجی باشد، را به دست می آوریم. به دنبال آن نشان می دهیم که گروه های وایل آفین توسیعی وجود دارند که نمایش مزدوجی ندارند. سپس باتوجه به این که گروه های وایل آفین توسیعی زیرکلاسی از گروه های وایل توسیع یافته توسط یک گروه آبلی هستند، شرط لازم و کافی برای آن که یک گروه وایل از نوع A_1 توسیع یافته توسط یک گروه آبلی، نمایش مزدوجی داشته باشد را به دست می آوریم که این یک محک جدید و کارآمد جهت تعیین نمایش مزدوجی برای گروه های وایل آفین توسیعی نیز هست.

کلید واژه ها: گروه وایل، سیستم ریشه، نمایش مزدوجی، فضای متقارن گسسته

فهرست مطالب

فهرست نمادها ۵

۱ مفاهیم اولیه ۱۲

۱.۱ مقدماتی درمورد گروه‌ها ۱۲

۲.۱ فضاهای برداری روی میدان $\mathbb{F}_۲$ و برخی خواص آن‌ها ۱۹

۳.۱ سیستم‌های ریشه‌ی متناهی و گروه‌های وایل نظیر به آن‌ها ۲۴

۲ نمایش مزدوجی برای گروه‌های وایل آفین توسیعی از نوع $A_۱$ ۳۰

۱.۲ نیم‌شبکه‌ها ۳۰

۲.۲ گروه‌های وایل آفین توسیعی ۳۸

۳.۲ نتایج اولیه ۵۳

۴.۲ نمایش مزدوجی ۵۹

۵.۲ نمایش مزدوجی برای نوع A_1 ۷۷

۳ نمایش مزدوجی برای گروه‌های وایل آفین توسیع‌یافته توسط یک گروه آبلی از نوع A_1 ۹۳

۱.۳ فضاهای متقارن گسسته و گروه‌های بازتابی آن‌ها ۹۳

۲.۳ سیستم‌های ریشه‌ی نوع A_1، توسیع‌یافته توسط یک گروه آبلی ۱۰۱

۳.۳ حالت ۲− گروه آبلی ۱۱۵

۴.۳ حالت آبلی آزاد ۱۲۸

فهرست راهنما ۱۳۱

واژه نامه ۱۳۴

مراجع ۱۳۷

فهرست نمادها

نماد	مفهوم	اولین صفحه‌ی مراجعه
H'	زیرگروه مشتق H	۱۳
H^{ab}	آبلی شده‌ی گروه H	۱۳
$Z(G)$	مرکز گروه G	۱۳
$\ker(\varphi)$	هسته‌ی همریختی φ	۱۵
$\mathrm{im}(\varphi)$	تصویر همریختی φ	۱۵
$\rtimes$	حاصل‌ضرب نیم مستقیم	۱۶
b^{-1}	وارون b	۱۸
$\otimes$	حاصل‌ضرب تانسوری	۱۹
$\emptyset$	مجموعه‌ی تهی	۱۹
$\dim(V)$	بعد فضای برداری V	۲۰
$\|I\|$	کاردینال مجموعه‌ی I	۲۰
$C \subseteq B$	C زیرمجموعه‌ی B	۲۲
$\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{X\}$	فضای برداری تولید شده توسط X روی میدان $\mathbb{F}$	۲۳
$\mathbb{R}$	مجموعه‌ی اعداد حقیقی	۲۴

$\oplus$	مجموع مستقیم	۲۵
$\mathbb{Z}$	مجموعه‌ی اعداد صحیح	۲۶
$\mathrm{GL(V)}$	کلیه‌ی تبدیلات خطی وارون‌پذیر روی فضای برداری V	۲۶
$\langle X\rangle$	گروه تولید شده توسط زیرمجموعه‌ی X	۲۶
$\Vert\alpha\Vert$	طول ریشه α	۲۶
$\check{\alpha}$	هم‌ریشه‌ی α	۲۶
$\check{R}$	هم‌سیستم ریشه‌ی R	۲۶
A_ℓ	سیستم ریشه‌ی متناهی نوع A_ℓ	۲۹
B_ℓ	سیستم ریشه‌ی متناهی نوع B_ℓ	۲۹
C_ℓ	سیستم ریشه‌ی متناهی نوع C_ℓ	۲۹
D_ℓ	سیستم ریشه‌ی متناهی نوع D_ℓ	۲۹
$\mathrm{E}_{۶}$	سیستم ریشه‌ی نوع $\mathrm{E}_{۶}$	۲۹
$\mathrm{E}_{۷}$	سیستم ریشه‌ی نوع $\mathrm{E}_{۷}$	۲۹
$\mathrm{E}_{۸}$	سیستم ریشه‌ی نوع $\mathrm{E}_{۸}$	۲۹
$\mathrm{F}_{۴}$	سیستم ریشه‌ی نوع $\mathrm{F}_{۴}$	۲۹
$\mathrm{G}_{۲}$	سیستم ریشه‌ی نوع $\mathrm{G}_{۲}$	۲۹
$[S:H]$	تعداد هم‌مجموعه‌های H در S	۳۰
$\mathrm{rank}(S)$	رتبه S	۳۱
$\mathrm{mod}(۲۸)$	هم‌نهشت به پیمانه‌ی ۲۸	۳۲
$\mathrm{supp}_B(\sigma)$	محمل σ نسبت به پایه B	۳۲
$\mathrm{supp}_B(T)$	کلاس محمل‌های T نسبت به پایه B	۳۲
$\mathrm{ind}(S)$	شاخص S	۳۳
$\uplus$	اجتماع مجزا	۳۳
$\mathrm{Esupp}_B(S)$	محمل اساسی S نسبت به پایه B	۳۴

$\binom{\nu}{2}$	انتخاب ۲ از ν	۳۴
$\mathrm{rad}_{\mathcal{V}}(.,.)$	رادیکال فرم $(.,.)$ روی فضای برداری $\mathcal{V}$	۳۹
V^*	دوگان فضای برداری V	۴۱
δ_{ij}	دلتای کرونکر	۴۱
$\mathrm{End}(\mathcal{V})$	درونریختی‌های روی ν	۴۵
$\cong$	یکریختی	۵۹
$\overset{\psi}{\cong}$	یکریختی تحت ψ	۷۵

پیش‌گفتار

سیستم‌های ریشه‌ی آفین توسیعی در مرجع [۱]، به‌عنوان تعمیمی از سیستم‌های ریشه‌ی تحویل‌ناپذیر متناهی و آفین بر روی یک فضای برداری حقیقی از بعد متناهی مجهز به یک فرم دوخطی متقارن نیمه‌معین مثبت $(\cdot,\cdot)$، که در هشت شرط صدق می‌کند، تعریف می‌شوند (تعریف ۲.۲.۲ را ببینید). یک سیستم ریشه‌ی توسیع‌یافته توسط یک گروه آبلی G با مفهومی که در مرجع [۲۴] تعریف شده است، درواقع تعمیمی از سیستم‌های ریشه‌ی آفین توسیعی است. سیستم‌های ریشه‌ی توسیعی آفین از پوچی صفر و یک به‌ترتیب سیستم‌های ریشه‌ی متناهی و آفین هستند.

فرض کنیم R یک سیستم ریشه‌ی توسیع‌یافته توسط یک گروه آبلی G باشد، گروه وایل $\mathcal{W}$ نظیر به سیستم ریشه‌ی R لزوماً دارای نمایش کاکستر نیست، بنابراین یک نمایش کلی‌تر نیاز است که دربردارنده‌ی ساختار گروهی $\mathcal{W}$ باشد. در سال ۱۹۹۵، کریلیوک [۱] نشان داد که گروه وایل یک سیستم ریشه‌ی آفین شبکه‌ای ساده از رتبه‌ی بزرگ‌تر از ۱ نمایش مزدوجی دارد [۱۵]. در سال ۲۰۰۰، اعظم [۲] نشان داد که نمایش مزدوجی برای زیرکلاسی از گروه‌های وایل آفین توسیعی شامل گروه‌های وایل آفین توسیعی نظیر به سیستم‌های ریشه‌ی آفین توسیعی کاهش‌یافته با پوچی کمتر یا مساوی ۲، وجود دارد [۴].

در این پایان‌نامه ابتدا شرایط لازم و کافی برای این‌که گروه‌های وایل آفین توسیعی از نوع A_1 با پوچی دلخواه نمایش مزدوجی داشته باشند، را به‌دست می‌آوریم (قضیه ۸.۵.۲). این مطلب نتایج جالبی

---

[۱] Y. Krylyuk

[۲] S. Azam

را به‌دنبال دارد که در بخش پنجم از فصل دو بیان می‌کنیم. در ادامه یک شرط لازم و کافی جهت داشتن نمایش مزدوجی را برای حالت کلی‌تر یعنی گروه‌های وایل نوع A_1 توسیع‌یافته توسط یک گروه آبلی، بررسی می‌کنیم. بررسی نمایش مزدوجی برای نوع A_1، کار را برای تحقیق روی سایر انواع هموار می‌کند، به‌همین دلیل این نوع مورد توجه ویژه قرار دارد.

این پایان‌نامه در سه فصل تنظیم شده است. در فصل اول مفاهیم مورد نیاز دو فصل بعدی گنجانده شده است و در فصل دوم به بررسی دقیق مرجع [8] می‌پردازیم، به‌علاوه در فصل سوم مرجع [۱۴] را تجزیه و تحلیل می‌کنیم.

فصل اول شامل سه بخش می‌باشد که در بخش اول تعاریف و قضیه‌هایی از گروه‌ها که در بخش‌های بعدی مورد نیاز می‌باشند را قرارداده‌ایم. در بخش دوم از این فصل فضاهای برداری روی میدان $\mathbb{F}_2$ را درنظر می‌گیریم و گزاره‌ها و لم هایی را اثبات می‌کنیم که در فصل سوم بسیار کاربرد دارند. در بخش سوم از فصل اول به معرفی سیستم‌های ریشه‌ی متناهی و گروه‌های وایل نظیر می‌پردازیم.

فصل دوم دارای پنج بخش است. در بخش یک، به تعریف نیم‌شبکه را از مرجع [۱]، می‌پردازیم. به‌علاوه، مفاهیمی هم‌چون محمل، محمل اساسی و گردایه‌ی صحیح برای یک نیم‌شبکه را معرفی می‌کنیم. این مفاهیم به طور طبیعی از مطالعه‌ی گروه‌های وایل آفین و نمایش آن‌ها به‌دست آمده‌اند. در بخش ۲ و ۳ از این فصل نتایج مهمی را از مرجع [٦]، بیان می‌کنیم که برای پیش برد کار و به‌دست آوردن نتایج اولیه راجع به گروه‌های وایل آفین توسیعی نقش موثری دارند. در بخش ۴ این فصل به سیستم ریشه‌ی آفین توسیعی R گروه $\hat{\mathcal{W}}$، تعریف‌شده به‌وسیله‌ی مولدهای $\hat{\omega}_\alpha$ که $\alpha \in R^\times = \{\alpha \in R | (\alpha, \alpha) \neq 0\}$ و روابط

۱) $\hat{\omega}^2 = 1$، $\alpha \in R^\times$،

۲) $\hat{\omega}_\alpha \hat{\omega}_\beta \hat{\omega}_\alpha = \hat{\omega}_{\omega_\alpha(\beta)}$، $\alpha, \beta \in R^\times$،

را نسبت می‌دهیم. گروه وایل $\mathcal{W}$ دارای نمایش مزدوجی است، هرگاه بروریختی $\varphi : \hat{\mathcal{W}} \longrightarrow \mathcal{W}$ که توسط $\omega_\alpha \longmapsto \omega_\alpha$، $\alpha \in R^\times$ القا می‌شود، یکریختی باشد. از آن‌جا که مطالعه‌ی ما در این فصل روی سیستم‌های ریشه‌ی آفین توسیعی شبکه‌ای ساده متمرکز شده است، با استفاده از نتایج این بخش اثبات

جدید و ساده‌ای برای این‌که نشان دهیم گروه‌های وایل آفین توسیعی از نوع شبکه‌ای ساده و رتبه‌ی بزرگ‌تر از ۱ دارای نمایش مزدوجی هستند، ارائه می‌کنیم (قضیه ۱.۱۴ از مرجع [۱۵]). در بخش ۵ که مهم‌ترین قسمت از این فصل است به محاسبه‌ی هسته‌ی بروریختی $\varphi : \hat{\mathcal{W}} \longrightarrow \mathcal{W}$ می پردازیم و نشان می‌دهیم که هسته‌ی این بروریختی با جمع‌مستقیم تعداد متناهی کپی از گروه‌های دوری از رتبه‌ی ۲ یکریخت است (گزاره ۵.۵.۲). این مطلب به ما کمک می‌کند که نشان دهیم $\mathcal{W}$ دارای نمایش مزدوجی است؛ اگر و تنها اگر مرکز $\hat{\mathcal{W}}$ یک گروه آبلی آزاد باشد؛ اگر و تنها اگر تنها گردایه‌ی صحیح برای نیم شبکه‌ی مشمول در ساختار R، گردایه‌ی بدیهی باشد (به بخش یک از فصل دو مراجعه شود)؛ اگر و تنها اگر یک شرط کمین برای مجموعه‌ی خاصی از مولدهای $\mathcal{W}$ برقرار باشد (قضیه ۸.۵.۲). این قضیه بررسی وجود نمایش مزدوجی برای گروه‌های وایل آفین توسیعی را ساده‌تر می‌کند. طبق این قضیه به‌راحتی دیده می‌شود که گروه‌های وایل آفین توسیعی از نوع $A_۱$ با پوچی کوچک‌تر یا مساوی ۳ نمایش مزدوجی دارند، مگر حالتی که شاخص برابر ۷ و پوچی برابر با ۳ است (نتیجه ۱۱.۵.۲). به‌علاوه این تأکیدی است بر حدس اعظم در تذکر ۳.۱۴ از مرجع [۴] که بیان می‌کند حالت خاصی از گروه‌های وایل آفین توسیعی از نوع $A_۱$ وجود دارند که نمایش مزدوجی ندارند (تذکر ۱۳.۵.۲ را ببینید).

در فصل سوم محکی معرفی می‌کنیم که نشان می‌دهد گروه وایل نظیر به سیستم‌ریشه‌ی نوع $A_۱$ توسیع‌یافته توسط یک گروه آبلی در چه صورت نمایش مزدوجی دارد. این فصل دارای چهار بخش می‌باشد. در بخش اول فضاهای متقارن گسسته و گروه‌های بازتابی روی این فضاها را معرفی می‌نماییم. سپس فرض می‌کنیم T یک فضای متقارن گسسته و گروه $\mathcal{U}$ دارای نمایش زیر که آن را نمایش مزدوجی می‌نامیم، باشد:

$$\mathcal{U} := \Big(\ t^{\mathcal{U}} \ , \ t \in T | \ (t^{\mathcal{U}})^{۲} = ۱ \ , \ \ t^{\mathcal{U}} s^{\mathcal{U}} (t^{\mathcal{U}})^{-۱} = (t \cdot s)^{\mathcal{U}} \ , \ s, t \in T \Big).$$

در این بخش، نشان می‌دهیم $\mathcal{U}$ یک $T-$گروه بازتابی ابتدایی در رسته‌ی $T-$گروه‌های بازتابی است. در بخش دوم سیستم‌های ریشه‌ی نوع $A_۱$ توسیع‌یافته توسط گروه آبلی G را تعریف می‌کنیم. به‌علاوه، فرض می‌کنیم T زیرمجموعه‌ای از G با خواص ویژه باشد و گروه‌های وایل نظیر به این سیستم‌های ریشه را

به‌عنوان T–گروه بازتابی معرفی می‌کنیم. در بخش سوم فرض می‌کنیم G یک ۲–گروه آبلی مقدماتی باشد و به معرفی مفهوم مجموعه‌ی ۲–مستقل می‌پردازیم، در ادامه نشان می‌دهیم که اگر $\mathcal{W}$ گروه وایل نظیر به سیستم‌ریشه‌ی توسیع‌یافته توسط گروه آبلی G باشد، T–ریخت بازتابی $\mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{U}$ یک‌به‌یک است، اگر و تنها اگر $T \setminus \{0\}$ در G، ۲–مستقل باشد. سرانجام در بخش پنج، فرض می‌کنیم G یک گروه آبلی آزاد و $\mathcal{U}^{ab}$ و $\mathcal{W}^{ab}$ به‌ترتیب آبلی شده‌ی $\mathcal{U}$ و $\mathcal{W}$ باشند. هم‌چنین فرض می‌کنیم T^{ab} تصویر T تحت نگاشت $G \longrightarrow G_2 := G/2G$ باشد. سپس با استفاده از نتایج بخش ۳ مهم‌ترین نتیجه‌ی این بخش را که نشان می‌دهد T–ریخت بازتابی $\mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{U}$ یکریختی است، اگر و تنها اگر $T^{ab} \setminus \{0\}$ در G_2، ۲–مستقل باشد، اثبات می کنیم.

فصل ۱

مفاهیم اولیه

۱.۱ مقدماتی درمورد گروه‌ها

در بخش اول از این فصل، به بیان برخی تعاریف و قضایا در مورد گروه‌ها می‌پردازیم که در فصل‌های بعدی مورد نیاز است. در بخش دوم کلیه‌ی فضاهای برداری را روی میدان $\mathbb{F}_۲$ درنظر می‌گیریم و باتوجه به ویژگی‌های میدان $\mathbb{F}_۲$، به اثبات مطالبی می‌پردازیم که در فصل ۳ مورد نیاز هستند. به‌علاوه، در آخرین بخش از این فصل سیستم‌های ریشه‌ی متناهی و گروه‌های وایل نظیر به آن‌ها را معرفی می‌کنیم که آشنایی با آن‌ها در ادامه‌ی کار نقش اساسی دارد.

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم X یک گروه با عضو خنثی ۱ باشد، گوییم X از چپ روی مجموعه‌ی T عمل می‌کند، هرگاه تابع

$$\begin{aligned} X \times T &\longrightarrow T \\ (x,t) &\mapsto x \cdot t, \end{aligned}$$

موجود باشد به طوری که:

۱) برای هر $t \in T$، $۱ \cdot t = t$،

۲) برای هر $t \in T$ و $x_۱, x_۲ \in X$، $x_۱ \cdot (x_۲ \cdot t) = (x_۱ \cdot x_۲) \cdot t$.

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنیم H یک گروه باشد، زیرگروه مشتق H که آن را با H' (یا $[H,H]$) نشان می‌دهیم عبارت است از زیرگروهی از H که توسط عناصر به شکل $[a,b]=a^{-1}b^{-1}ab$ تولید می‌شود. دیده می‌شود که H'، یک زیرگروه نرمال برای H است.

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنیم H یک گروه و H' زیرگروه مشتق آن باشد، گروه خارج قسمتی H/H' را گروه آبلی شده‌ی H می‌نامیم و آن را با H^{ab} نشان می‌دهیم.

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنیم G یک گروه آبلی متناهی و مرتبه‌ی هر عضو غیر بدیهی آن عددی اول مانند p باشد، در این صورت G را یک $p-$گروه یا گروه آبلی مقدماتی می‌نامیم.

تعریف ۵.۱.۱ فرض کنیم G یک گروه باشد، مجموعه‌ی

$$\{h\in G | hg=gh \quad ,g\in G \text{ برای هر }\}$$

را مرکز گروه G می‌نامیم و آن را با $Z(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۶.۱.۱ فرض کنیم A,B,C سه گروه دلخواه و $f:A\longrightarrow B$ یک همریختی گروهی باشد، گوییم f توسط C فاکتور[۱] می‌شود، هرگاه $h:A\longrightarrow C$ و $g:C\longrightarrow B$ موجود باشد به‌طوری که دیاگرام زیر جابه‌جا شود، یعنی به‌ازای هر $a\in A$، $g(h(a))=f(a)$.

[۱] factor

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & B \\ & C \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

قضیه ۱.۱.۱ (جای‌گذاری) فرض کنیم G یک گروه تولید شده توسط مولدهای X و روابط R و H یک گروه همراه با نگاشت φ باشد، در این صورت اگر برای هر $x \in X$ و $r = x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n} \in R$ که x_iها عناصر X هستند، حاصل جای‌گذاری $\varphi(x)$ به‌جای x در r عضو همانی باشد، یعنی $(\varphi(x_1))^{m_1} \cdots (\varphi(x_n))^{m_n} = 1$، آن‌گاه یک همریختی $\psi : G \longrightarrow H$ وجود دارد که نمودار زیر جابه‌جایی است:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & G \arrow[dl, "\psi"] \\ & H & \end{tikzcd}$$

به‌علاوه، اگر H گروه تولید شده توسط $\varphi(X)$ باشد، آن‌گاه ψ برور‌یختی است. در این حالت به این قضیه، قضیه‌ی وان‌دایک[2] می‌گوییم.

اثبات. به مرجع [۲۵] مراجعه شود. □

تعریف ۷.۱.۱ فرض کنیم $M_0, \ldots, M_n$ جایی‌که $n \geq 2$، گروه‌هایی دلخواه باشند، در این صورت دنباله‌ی

$$M_0 \xrightarrow{\varphi_1} M_1 \xrightarrow{\varphi_2} M_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_{n-1} \xrightarrow{\varphi_n} M_n$$

[2] Van Dyck

را که دنباله‌ای از همریختی‌های گروهی $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ است، دنباله‌ی دقیق می‌نامیم هرگاه برای هر $2 \le i \le n$، $\mathrm{im}\varphi_{i-1} = \ker\varphi_i$.

تعریف ۸.۱.۱ فرض کنیم A, B, C گروه‌های دلخواهی باشند. هرگاه دنباله‌ی

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} C \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 1$$

دقیق باشد، آن را یک دنباله‌ی دقیق کوتاه می‌نامیم.

گزاره ۲.۱.۱ فرض کنیم

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & B \arrow[d, "\gamma"'] \\
1 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"'] & C' \arrow[r, "g'"'] & B'
\end{tikzcd}$$

نموداری جابه‌جایی از گروه‌ها باشد که سطرهای آن دقیق فرض شده‌اند، در این صورت همریختی $\alpha : A \longrightarrow A'$ موجود است که نمودار زیر را جابه‌جا می‌کند.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & B \arrow[d, "\gamma"'] \\
1 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"'] & C' \arrow[r, "g'"'] & B'
\end{tikzcd}$$