بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه ولی‌عصر(عج) رفسنجان
دانشکده‌ی ریاضی و کامپیوتر
گروه ریاضی

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی محض، گرایش آنالیز

بررسی محدب بودن انواعی از بردهای عددی

استاد راهنما:
دکتر حمیدرضا افشین

استاد مشاور:
دکتر احمد صفاپور

دانشجو:
الهام عباسی‌هفشجانی

مهرماه ۱۳۹۰

دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان

دانشکده‌ی علوم ریاضی و کامپیوتر

گروه ریاضی

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی محض خانم الهام عباسی هفشجانی

تحت عنوان:

«بررسی محدب بودن انواعی از بردهای عددی»

در تاریخ ۱۳۹۰/۷/۱۳ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ...عالی... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان‌نامه آقای دکتر حمیدرضا افشین با مرتبه‌ی علمی استادیار — امضاء

۲- استاد مشاور پایان نامه آقای دکتر احمد صفاپور با مرتبه‌ی علمی استادیار — امضاء

۳- داور داخل گروه آقای دکتر علی آرمندنژاد با مرتبه‌ی علمی دانشیار — امضاء

۴- داور خارج از گروه آقای دکتر حمید مظاهری با مرتبه‌ی علمی دانشیار — امضاء

۵- نماینده‌ی تحصیلات تکمیلی، آقای دکتر مهدی سویزی با مرتبه‌ی علمی استادیار — امضاء

هر چند کار کوچکیست،

ولی جز به تو نمی‌توانم تقدیمش کنم

یا مهدی

چکیده

از مطالب مهمی که در مبحث بردهای عددی عنوان می‌شود، محدب بودن آن‌هاست. در این پایان‌نامه، هدف بررسی محدب بودن چند نوع از بردهای عددی است.

این پایان نامه شامل مطالبی برای آشنایی با انواع بردهای عددی و خواص آن‌ها می‌باشد. مهم‌ترین بخش این نوشته، به برهانی برای محدب بودن برد عددی رتبه‌بالای عملگرهای خطی کران‌دار روی فضاهای هیلبرت[۱] اختصاص دارد. برهان‌هایی که در این زمینه آورده شده‌است، عموماً برای فهم، نیاز به دانسته‌های زیادی دارد. مهم‌ترین این برهان‌ها را وئردمن[۲] ارائه کرده‌است. سعی ما بر این بوده‌است که برهانی مستقل بر پایه‌ی برهان وئردمن بیاوریم. همچنین برهانی برای محدب بودن برد عددی نامتناهی عملگرهای خطی کران‌دار روی فضاهای هیلبرت و برهانی برای محدب بودن حالت خاصی از $C-$ برد عددی آورده شده و با آوردن مثالی نشان داده شده‌است که برد عددی توأم در حالت کلی محدب نیست.

واژگان کلیدی: برد عددی، برد عددی توأم، برد عددی رتبه‌بالا، برد عددی نامتناهی، فضای هیلبرت، محدب بودن، $C-$ برد عددی.

---

[۱] Hilbert

[۲] Woerdeman

فهرست مندرجات

★ آخرین چیزی که نویسنده کشف می‌کند این است که از کجا شروع کند. (پاسکال) ★

پیش‌گفتار

انواع بردهای عددی عملگرها از اوایل قرن بیستم میلادی مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. یکی از اولین نتایج، توسط توئپلیتز[1] و هاسدورف[2] به دست آمد که نشان می‌دهد برد عددی کلاسیک یک عملگر، زیرمجموعه‌ای محدب از صفحه‌ی مختلط است. در فصل یک، برهانی برای این نتیجه آورده‌ایم.

برد عددی موضوع بسیاری از تحقیقات بوده و دانسته‌ها درباره‌ی آن بسیار است. همچنین تعمیم‌های زیادی از آن مورد مطالعه قرار گرفته‌است. برای مثال [8] را ببینید.
در زمینه‌ی تصحیح خطای کوانتومی، چوی[3]، کریبس[4] و زیکوفسکی[5]، برد عددی رتبه‌$-k$ ی یک ماتریس مانند A را که $A \in M_n(\mathbb{C})$ به صورت زیر تعریف کردند.

$$\{\lambda \in \mathbb{C} \mid PAP = \lambda P \text{ ،}k \text{ برای یک تصویر متعامد یکه مانند } P \text{ با رتبه‌ی }\}$$

در حالت کلی، برد عددی رتبه‌$-k$ ی یک عملگر خطی کران‌دار مانند T روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ که $k \leq \dim(\mathcal{H})$ به صورت زیر تعریف می شود.

$$\Lambda_k(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid PTP = \lambda P \text{ ،}k \text{ برای یک تصویر متعامد یکه مانند } P \text{ با رتبه‌ی }\}$$

---
[1] Toeplitz
[2] Hausdorff
[3] Choi
[4] Kribs
[5] Zyczkowski

اگر $\dim \mathcal{H} = \infty$، k می‌تواند بی‌نهایت هم باشد که در این صورت به $\Lambda_\infty(T)$، برد عددی نامتناهی T گفته می‌شود. در این صورت بعد برد عملگر تصویر، بی‌نهایت بوده است. این مجموعه، مجموعه‌ی مقادیر تراکم نیز نامیده می‌شود زیرا به وسیله‌ی تراکم T به زیرفضاهای $k-$ بعدی به‌دست می آید.

در واقع λ در مجموعه‌ی برد عددی رتبه‌بالای یک ماتریس مانند A قرار می‌گیرد اگر و فقط‌اگر یک پایه‌ی یکامتعامد وجود داشته باشد به‌طوری که در نمایش A نسبت به این پایه، زیر ماتریس $k \times k$ ای که در گوشه‌ی سمت چپ بالا قرار می‌گیرد، λ برابر ماتریس همانی باشد، که در حالت $k = ۱$، همان برد عددی کلاسیک می‌باشد.

مطالعات مربوط به برد عددی رتبه$-k$، با انتشار [۷] به سرعت پیشرفت کرد. در این مقاله چوی، کریبس و زیکوفسکی، این برد عددی را برای ماتریس‌های هرمیتی محاسبه کرده و یک حدس در مورد این که برد عددی رتبه‌بالا برای ماتریس‌های نرمال چه خواهد بود ارائه کردند. تعدادی از نتایج مربوط به حدس آنان در [۵، ۶] یافت می‌شود. حدس CKZ، توسط لی[۱] و زی[۲] در [۱۷] ثابت شد. آن‌ها در میان سایر مطالب این مطلب را آوردند که برد عددی رتبه‌بالا، اشتراک چند نیم‌صفحه‌ی بسته است. این مطلب یک اثبات ابتدایی برای سؤال محدب بودن بردهای عددی رتبه‌بالا آماده کرد که توسط وئردمن به طور دقیق ثابت شده است [۲۱]. سایر نتایج جالب در این باره را می‌توان در [۹، ۱۵، ۱۶] یافت.

مقدمات اثباتی که توسط وئردمن در [۲۱] برای محدب بودن بردهای عددی رتبه‌بالا ارائه شده‌است در [۵، ۱۲] آمده است. این مقدمات برای شخصی که به تازگی در این زمینه وارد شده‌است ممکن است کمی خسته کننده باشند. به همین جهت سعی ما بر این بوده‌است که

---

[۱] Li

[۲] Sze

برهانی مستقل بر پایه‌ی برهان وئردمن بیاوریم. این برهان تمامی فصل دو را به خود اختصاص داده‌است.

در فصل سه، برهانی برای محدب بودن برد عددی نامتناهی عملگرهای خطی کران‌دار روی فضاهای هیلبرت [۱۹] و در فصل چهار برهانی برای محدب بودن حالت خاصی از $C-$ برد عددی آورده شده است [۱۴]. همچنین در فصل پنج، با آوردن مثالی نشان داده شده است که برد عددی توأم در حالت کلی محدب نیست.

لازم به ذکر است که سعی شده است تمامی ترجمه‌ها بر اساس واژه‌نامه‌ی ریاضی و آمار انجمن ریاضی ایرن، چاپ ششم، باشد.

فصل ۱

تعاریف و پیش‌نیازها

در این فصل به آشنایی با مفاهیمی مقدماتی برای شناخت و مطالعه‌ی بردهای عددی می‌پردازیم و برخی از خواص آن‌ها را که در فصل‌های بعدی به‌کار می‌آیند، بررسی می‌کنیم. مفاهیمی مانند تصویرهای متعامد، برخی از انواع بردهای عددی، محدب بودن یک زیرمجموعه از صفحه‌ی مختلط، فضای هیلبرت، نرم طیفی، عملگر مثبت معین و به‌ویژه قضیه‌ی توئپلیتز — هاسدورف و برهانی برای آن را خواهیم آورد.

تعریف ۱.۱ مجموعه‌ی $A \subseteq \mathbb{C}$ را محدب گوییم اگر برای هر دو نقطه مانند x و y در A و هر $\lambda \in (۰, ۱)$ داشته باشیم

$$\lambda x + (۱ - \lambda) y \in A.$$

تعریف ۲.۱ فضای کامل. اگر در فضای نرم‌دار X، هر دنباله‌ی کوشی هم‌گرا به یک نقطه از X باشد، X را فضای کامل نامیم.

تعریف ۳.۱ فضای باناخ [1]. فضای نرم‌دار کامل $(X, \|.\|)$ را یک فضای باناخ گوییم.

تعریف ۴.۱ عملگر خطی کران‌دار. فرض کنیم $(X, \|.\|_X)$ و $(Y, \|.\|_Y)$ دو فضای باناخ بوده و $T : X \longrightarrow Y$ یک نگاشت خطی تعریف شده روی X باشد که به آن عملگر خطی می‌گوییم. T کران‌دار است اگر $C > 0$ یافت شود به‌گونه‌ای که برای هر $x \in X$، $\|Tx\|_Y \leq C\,\|x\|_X$.

تعریف ۵.۱ فضای ضرب داخلی. فضای برداری $\mathcal{H}$ روی $\mathbb{C}$ به همراه یک تابع مختلط مقدار $\langle . \rangle$ روی $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ را یک فضای ضرب داخلی گوییم هر گاه موارد زیر برقرار باشد.

الف) برای هر $x \in \mathcal{H}$، $\langle x, x\rangle \geq 0$؛

ب) $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$؛

پ) برای هر x و y در $\mathcal{H}$، $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$؛

ت) برای هر $x_1, x_2, y \in \mathcal{H}$ و $a \in \mathbb{C}$، $\langle ax_1 + x_2, y\rangle = a\langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle$.

تعریف ۶.۱ نرم القا شده توسط ضرب داخلی. در یک فضای ضرب داخلی $\mathcal{H}$، تابع اندازه (یا نرم) را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$P : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$$x \mapsto \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

که آن‌را نرم القا شده توسط ضرب داخلی می‌نامیم و می‌نویسیم

$$\|x\| = P(x).$$

[1] Banach

تعریف ۷.۱ فضای هیلبرت. اگر فضای ضرب داخلی $\mathcal{H}$ با توجه به نرم القا شده توسط ضرب داخلی کامل باشد، یعنی هر دنباله‌ی کوشی در آن هم‌گرا باشد، آن را فضای هیلبرت نامیم.

تعریف ۸.۱ متمم متعامد. فرض کنیم V یک فضای ضرب داخلی و $E \subseteq V$ ناتهی باشد. متمم متعامد E را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$E^{\perp} = \{y \in V \mid \langle x, y\rangle = ۰, \forall x \in E\}.$$

یادآوری ۹.۱ فرض کنیم V یک فضای ضرب داخلی باشد. برای هر $E \subseteq V$، $E^{\perp}$ زیرفضایی از V است. همچنین اگر W زیرفضایی با بعد متناهی از V باشد، آن‌گاه $V = W \oplus W^{\perp}$ و اگر V هم با بعد متناهی باشد، آن‌گاه $(W^{\perp})^{\perp} = W$.

در تعاریفی که در ادامه می‌آیند، فرض می‌کنیم $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت و $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ یک عملگر خطی کران‌دار باشد ($T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$).

تعریف ۱۰.۱ عملگر الحاقی. عملگری مانند T^* را که برای هر $x, y \in \mathcal{H}$، $\langle T^*x, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$، عملگر الحاقی T می‌نامیم.

تبصره‌ی ۱۱.۱ برای هر $T, T_۱, T_۲ \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ موارد زیر برقرار است.

الف) $T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$؛

ب) $(T_۱T_۲)^* = T_۲^*T_۱^*$؛

پ) $(T^*)^* = T$؛

ت) در صورتی که $T^{-۱}$ وجود داشته باشد، $(T^*)^{-۱} = (T^{-۱})^*$.

برهان. به [۱۸] مراجعه کنید. □

یادآوری ۱۲.۱ هر ماتریس $n \times n$ مختلط مثل $A = [a_{i,j}]$ به‌عنوان یک عملگر خطی، دارای عملگر الحاقی $A^* = (\overline{A})^t = [\overline{a_{j,i}}]$ می‌باشد.

تعریف ۱۳.۱ عملگر طول‌پایی. عملگر $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{L})$ که $\mathcal{H}$ و $\mathcal{L}$ دو فضای هیلبرت هستند را یک طول‌پایی می‌نامیم اگر ضرب داخلی را حفظ کند، یعنی برای هر $x, y \in \mathcal{H}$،

$$\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle.$$

تعریف ۱۴.۱ عملگر یکانی. اگر $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ یک طول‌پایی باشد، آن‌را یک یکانی روی $\mathcal{H}$ می‌نامیم.

یادآوری ۱۵.۱ ماتریس $U \in M_n(\mathbb{C})$ یکانی است اگر $U^*U = I_n$.

تبصره‌ی ۱۶.۱ ماتریس $U \in M_n(\mathbb{C})$ را در نظر می گیریم. موارد زیر هم‌ارزند.

الف) ماتریس $U \in M_n(\mathbb{C})$ یکانی است؛

ب) U نامنفرد است و $U^{-1} = U^*$؛

پ) $UU^* = I_n$؛

ت) U^* یکانی است؛

ث) ستون‌های U تشکیل یک مجموعه‌ی یکامتعامد می دهند؛

ج) سطرهای U تشکیل یک مجموعه‌ی یکامتعامد می دهند؛

چ) برای هر $x \in \mathbb{C}^n$، طول اقلیدسی Ux همان طول اقلیدسی x است، یعنی $(Ux)^*(Ux) = x^*x$.

برهان. به [۱۰] مراجعه کنید. □

تبصره‌ی ۱۷.۱ مجموعه‌ی ماتریس‌های یکانی در $M_n(\mathbb{C})$ با ضرب ماتریس‌ها تشکیل یک گروه می‌دهند. این گروه به‌عنوان زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{C}^{n^2}$، بسته و کران‌دار و در نتیجه فشرده است. برای هر دنباله‌ی داده شده در این گروه، زیردنباله‌ای از آن وجود دارد به‌طوری که درایه‌های اعضای این زیردنباله (به‌عنوان دنباله‌ای از اعداد مختلط)، به درایه‌های یک ماتریس یکانی هم‌گراست.

برهان. به [۱۰] مراجعه کنید. □

تعریف ۱۸.۱ عملگر خودالحاق یا ارمیتی و شبه‌ارمیتی. عملگر $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ را یک عملگر ارمیتی گوییم هرگاه $T = T^*$ و شبه‌ارمیتی گوییم هرگاه $T = -T^*$.

تعریف ۱۹.۱ عملگر نرمال. عملگر $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ را یک عملگر نرمال گوییم هرگاه $TT^* = T^*T$.

تعریف ۲۰.۱ ماتریس مثبت‌معین و نیمه‌مثبت‌معین. یک ماتریس ارمیتی $n \times n$ مانند A را مثبت‌معین گوییم و می‌نویسیم $A > 0$ اگر برای هر $x \in \mathbb{C}^n$ که $x \neq 0$ داشته باشیم

$$x^*Ax > 0.$$

در صورتی‌که نامساوی بالا به $x^*Ax \geq 0$ ضعیف‌تر شود، A را نیمه‌مثبت‌معین می‌نامیم و می‌نویسیم $A \geq 0$.

قضیه‌ی ۲۱.۱ تجزیه‌ی QR. اگر $A \in M_{n,m}(\mathbb{C})$ و $n \leq m$، آن‌گاه ماتریس $Q \in M_{n,m}(\mathbb{C})$ با ستون‌های یکامتعامد و ماتریس بالامثلثی $R \in M_m(\mathbb{C})$ وجود دارند به‌طوری که $A = QR$. اگر $m = n$، Q یکانی است. اگر علاوه بر این A نامنفرد باشد، آن‌گاه می‌توانیم R را به‌گونه‌ای انتخاب کنیم که همه‌ی درایه‌های روی قطر اصلی آن مثبت باشند. در این حالت Q و R یکتا خواهند بود.

برهان. به [۱۰] مراجعه کنید. □

تعریف ۲۲.۱ برای هر $A \in M_n(\mathbb{C})$،

$$A = \tfrac{۱}{۲}(A + A^*) + \tfrac{۱}{۲}(A - A^*) = H(A) + S(A)$$

که در آن $H(A) = \tfrac{۱}{۲}(A + A^*)$ بخش ارمیتی A و $S(A) = \tfrac{۱}{۲}(A - A^*)$ بخش شبه‌ارمیتی A می‌باشد.

همانند طیف یا مجموعه‌ی مقادیر ویژه ($\sigma(.)$)، هیأت مقادیر که معمولاً برد عددی نامیده می‌شود ($F(.)$)، مجموعه‌ای از اعداد مختلط است که به یک ماتریس $n \times n$ مانند A نسبت می‌دهیم. در واقع $F(.)$ یک تابع از $M_n(\mathbb{C})$ به مجموعه‌ی زیرمجموعه‌های صفحه‌ی مختلط است.

تعریف ۲۳.۱ برد عددی. فرض کنیم $A \in M_n(\mathbb{C})$، برد عددی A به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$F(A) = W(A) = \{x^*Ax = \langle Ax, x\rangle \mid x \in \mathbb{C}^n, x^*x = \|x\| = ۱\}$$

طیف یک ماتریس یک مجموعه‌ی گسسته از نقاط صفحه است، در حالی‌که برد عددی پیوسته است. در واقع همیشه فشرده و محدب است. همانند طیف، برد عددی مجموعه‌ای است که می‌توان از آن برای پی بردن به بعضی خصوصیات ماتریس استفاده کرد و در برخی موارد اطلاعاتی را که برد عددی در این باره به ما می‌دهد، طیف به تنهایی نمی‌تواند در اختیار ما بگذارد.

در زیر خواصی از برد عددی را آورده‌ایم.

قضیه‌ی ۲۴.۱ فرض کنیم $A, B, U \in M_n(\mathbb{C})$، U یکانی و $\alpha \in \mathbb{C}$. موارد زیر برقرار است.

الف) $F(A)$ یک زیرمجموعه‌ی فشرده از $\mathbb{C}$ است؛

ب) $F(A)$ یک زیرمجموعه‌ی محدب از $\mathbb{C}$ است؛

پ) $F(A+\alpha I) = F(A) + \alpha$؛

ت) $F(\alpha A) = \alpha F(A)$؛

ث) $F(H(A)) = \Re(F(A))$؛

ج) $\sigma(A) \subseteq F(A)$؛

چ) $F(A+B) \subseteq F(A) + F(B)$؛

ح) $F(U^*AU) = F(A)$؛

خ) اگر A نرمال باشد $F(A) = Co(\sigma(A))$، که در آن $Co(\sigma(A))$ همان کوچک‌ترین مجموعه‌ی محدب شامل A یا غلاف محدب A می‌باشد؛

د) اگر $A \in M_{n_۱}(\mathbb{C})$ و $B \in M_{n_۲}(\mathbb{C})$، آن‌گاه $F(A \oplus B) = Co(F(A) \cup F(B))$؛

ذ) اگر $J \subseteq \{۱, ۲, \ldots, n\}$ و $A(J)$ نمایش زیر ماتریس اصلی با شماره ستون‌های واقع در J باشد، آن‌گاه $F(A(J)) \subseteq F(A)$؛

ر) $F(A)$ در نیمه‌ی باز سمت راست صفحه $(RHP = \{c \in \mathbb{C} \mid \Re(c) > ۰\})$ قرار می‌گیرد اگر و فقط‌اگر $A + A^*$ مثبت‌معین باشد؛

ز) $F(A)$ در نیمه‌ی بسته‌ی سمت راست صفحه $(RHP_۰ = \{c \in \mathbb{C} \mid \Re(c) \geq ۰\})$ قرار می‌گیرد اگر و فقط‌اگر $A + A^*$ نیمه‌مثبت‌معین باشد.

برهان. به غیر از مورد (ب) که در قضیه‌ی بعد ثابت می‌شود، برای دیدن برهان بقیه‌ی موارد به [۱۱] مراجعه کنید. □

قضیه‌ی ۲۵.۱ توئپلیتز – هاسدورف. اگر $A \in M_n(\mathbb{C})$، آن‌گاه

$$F(A) = \{x^*Ax \mid x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\}$$

زیرمجموعه‌ای محدب از $\mathbb{C}$ است.

برهان. اگر $F(A)$ تک‌نقطه باشد که چیزی برای اثبات نداریم، بنا بر این $a, b \in F(A)$ را در نظر گرفته و فرض می‌کنیم c نقطه‌ای روی پاره‌خط واصل a و b باشد. با توجه به موارد پ و ت در قضیه‌ی ۲۴.۱، می‌توان فرض کرد $c = 0$، $a, b \in \mathbb{R}$ و $a < 0 < b$. (زیرا در غیر این‌صورت، چون برای هر $\alpha \in \mathbb{C}$، $F(\alpha A) = \alpha F(A)$، می‌توان با ضرب یک عدد مختلط در A کاری کرد که پاره‌خط واصل a و b، موازی محور x ها شود و چون برای هر $\alpha \in \mathbb{C}$، $F(A + \alpha I) = F(A) + \alpha$، می‌توان با جمع کردن A با یک ضریب مختلط از ماتریس همانی، کاری کرد که یکی از دو مقدار ویژه‌ی مورد نظر در سمت چپ صفر و دیگری در سمت راستِ صفر قرار گیرند. به وضوح این دو عمل، یعنی دوران و انتقال، تأثیری بر محدب بودن یا نبودن $F(A)$ ندارد.)

همچنین فرض کنیم

$$\begin{cases} x^*Ax = a; \quad x^*x = 1 \text{ که } x \in \mathbb{C}^n \text{ برای ،} \\ y^*Ay = b; \quad y^*y = 1 \text{ که } y \in \mathbb{C}^n \text{ برای ،} \end{cases}$$

x و y مستقل خطی هستند، زیرا در غیر این صورت فرض کنیم برای یک $\gamma \in \mathbb{C}$، $x = \gamma y$. بنا بر این

$$\begin{cases} x^* = \overline{\gamma} y^* \\ Ax = \gamma Ay \end{cases} \Rightarrow x^*Ax = \gamma\overline{\gamma}y^*Ay \Rightarrow a = |\gamma|^۲ b.$$

پس a و b هم‌علامت هستند که تناقض است.

تعریف می‌کنیم $z(t,\theta) = e^{\imath\theta}x + ty$ که $t,\theta \in \mathbb{R}$ و همچنین

$$f((t,\theta)) = (z(t,\theta))^* Az(t,\theta).$$

داریم

$$\begin{aligned} f((t,\theta)) = \\ (z(t,\theta))^* Az(t,\theta) = \\ (e^{\imath\theta}x + ty)^* A(e^{\imath\theta}x + ty) = \\ (e^{-\imath\theta}x^* + ty^*)A(e^{\imath\theta}x + ty) = \\ x^*Ax + t(e^{-\imath\theta}x^*Ay + e^{\imath\theta}y^*Ax) + t^۲ y^*Ay. \end{aligned}$$

قرار می‌دهیم

$$\alpha(\theta) = e^{-\imath\theta}x^*Ay + e^{\imath\theta}y^*Ax.$$

بنا بر این

$$f((t,\theta)) = a + t\alpha(\theta) + t^۲ b.$$

برای این‌که t در معادله‌ی بالا، حقیقی باشد باید

$$\begin{aligned} \alpha(\theta) = \overline{\alpha(\theta)} \Leftrightarrow \\ e^{-\imath\theta}x^*Ay + e^{\imath\theta}y^*Ax = e^{\imath\theta}x^t\overline{A}\overline{y} + e^{-\imath\theta}y^t\overline{A}\overline{x} \Leftrightarrow \\ e^{\imath\theta}(y^*Ax - x^t\overline{A}\overline{y}) = e^{-\imath\theta}(y^t\overline{A}\overline{x} - x^*Ay) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{e^{\imath\theta}}{e^{-\imath\theta}} = \frac{y^t\overline{A}\overline{x} - x^*Ay}{y^*Ax - x^t\overline{A}\overline{y}}.$$

فرض می‌کنیم

$$y^*Ax - x^t\overline{A}\overline{y} = re^{\imath\varphi}$$

که $r,\varphi \in \mathbb{R}$ و $r \geq ۰$. بنا بر این $\alpha(\theta)$ برای $\theta = -\varphi$ حقیقی است، زیرا در این‌صورت

$$\frac{e^{\imath\theta}}{e^{-\imath\theta}} = \frac{e^{-\imath\varphi}}{e^{\imath\varphi}}$$

و این با حقیقی بودن $\alpha(\theta)$ معادل است.

پس در صورتی‌که در $f((t,\theta))$ قرار دهیم $\theta = -\varphi$ و $t_\circ = (-\alpha(-\varphi)+\sqrt{(\alpha(-\varphi))^۲ - ۴ab})/۲b$ داریم $f((t_\circ,-\varphi)) = ۰$ که $t_\circ \neq ۰$، زیرا $|\alpha(-\varphi)| > \sqrt{(\alpha(-\varphi))^۲ - ۴ab}$، بنا بر این $z((t_\circ,-\varphi)) \neq ۰$. زیرا اگر $z((t_\circ,-\varphi)) = ۰$، به دلیل مستقل بودن x و y خواهیم داشت

$$\begin{cases} t_\circ = ۰ & \text{تناقض است.} \\ \text{و} & \\ e^{-\imath\varphi} = ۰ & \text{غیر ممکن است.} \end{cases}$$

پس برای $z = \frac{z((t_\circ,-\varphi))}{\|z((t_\circ,-\varphi))\|_۲}$ داریم $z^*z = ۱$ و $۰ = z^*Az \in F(A)$. □

تعریف ۲۶.۱ تصویر. فرض کنیم E یک فضای خطی باشد. عملگر خطی $P : E \longrightarrow E$ را یک تصویر می‌نامیم اگر و فقط‌اگر $P^۲ = P$.

تعریف ۲۷.۱ تصویر متعامد. تصویر P را در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ یک تصویر متعامد می‌نامیم اگر $\ker P = (\mathrm{Im} P)^\perp$.

تبصره‌ی ۲۸.۱ تصویر $P : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ متعامد است اگر و فقط‌اگر ارمیتی باشد، یعنی $P = P^*$.

برهان. به [۱۲] مراجعه شود. □