دانشگاه تربیت معلم

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (شاخه‌ی جبر)

عنوان

(A)–حلقه‌ها و PIF–حلقه‌ها

و

بررسی حالت خاصی از حلقه‌های شبه—فروبنیوس

تدوین

لیلا مخالفی

استاد راهنما

دکتر عبدالجواد طاهری زاده

بهمن ۸۹

اظهارنامه

مطالب این پایان نامه بر اساس مقاله‌های زیر تدوین شده است.

[1] Charazade Bakkari, *On PIF-Rings*, International Journal of Algebra, vol. 4, 2010, no.13, 619-623.

[2] N. Mahdou and A. Rahmouni Hassani, *On strong (A)-rings*, Mediter J. Math. 2010.

[3] N. Mahdou and M. Tamekkante, *When an amalgamated duplication of a ring along an ideal is Quasi-Frobenius*, arxiv: 0911.1135v1(math. Ac) 5 Nov 2009.

چکیده

در این پایان نامه، (A)−حلقه‌ها و (A)−حلقه‌های قوی را معرفی کرده و به بررسی انتقال خاصیت قوی (A) و خاصیت (A) به توسیع بدیهی حلقه‌ها و ترکیب دوتایی یک حلقه در امتداد یک ایده‌آل می‌پردازیم و با استفاده از این نتایج، یک رده از حلقه‌ها که خاصیت (A) را دارند ولی خاصیت قوی (A) را ندارند، به دست می‌آوریم. هم‌چنین PIF−حلقه‌ها را معرفی کرده و به بررسی انتقال این خاصیت به توسیع بدیهی حلقه‌ها و حاصل‌ضرب مستقیم و موضعی سازی می‌پردازیم و مثال‌های جدیدی از PIF−حلقه‌ها را به‌دست می‌آوریم. در ادامه حلقه‌های شبه—فروبنیوس را معرفی کرده و حالت خاصی از حلقه‌های شبه—فروبنیوس را در ترکیب دوتایی یک حلقه در امتداد یک ایده‌آل، بررسی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: (A)−حلقه‌ها، (A)−حلقه‌های قوی، توسیع بدیهی حلقه‌ای، ترکیب دوتایی یک حلقه در امتداد یک ایده‌آل، PIF−حلقه‌ها، ایده‌آل تصویری، ایده‌آل آزاد، حاصل‌ضرب مستقیم، موضعی سازی.

رده بندی موضوعی ریاضی (۲۰۰۰) :

Primary 13G055, 13F05; Secondary 13G05, 13F30.

مقدمه

در این پایان نامه همه حلقه‌ها، جابجایی و یکدار و همه مدول‌ها، یکانی درنظر گرفته شده‌اند.
یکی از خاصیت‌های مهم حلقه‌های نوتری و جابجایی این است که اگر I ایده‌آلی مشمول در مجموعه‌ی مقسوم علیه‌های صفر حلقه باشد آن‌گاه I دارای پوچ‌ساز ناصفر است. هوکابا[۱] و کلر[۲]، تعریف زیر را برای (A)−حلقه‌ها ارائه دادند:

حلقه‌ی جابجایی R دارای خاصیت (A) است هرگاه هر ایده‌آل باتولید متناهی مشمول در مجموعه مقسوم علیه‌های صفر حلقه، پوچ‌ساز ناصفر داشته باشد. خاصیت (A) درابتدا توسط کوئنتل[۳]، بررسی شد. او ابتدا اصطلاح شرط C را برای خاصیت (A) به‌کار برد. کلاس حلقه‌های جابجایی با خاصیت (A) نسبتاً بزرگ است. برای مثال: حلقه‌های نوتری، حلقه‌هایی که در آنها، هر ایده‌آل اول ماکسیمال است، حلقه‌ی چند جمله‌ای $R[x]$ و حلقه‌هایی که حلقه‌ی خارج قسمتی کلی آنها منظم فون نویمان است.

هم‌چنین در این پایان‌نامه یک کلاس ویژه از حلقه‌هایی که خاصیت (A) را دارند، بررسی می‌کنیم و آنها را (A)−حلقه‌های قوی می‌نامیم.

حلقه‌ی R یک (A)−حلقه‌ی قوی نامیده می‌شود هرگاه هر ایده‌آل باتولید متناهی از R که توسط تعداد متناهی مقسوم علیه صفر تولید می‌شود، دارای پوچ‌ساز ناصفر باشد. به‌عبارت دیگر، اگر $a_i \in R$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $I = \sum\limits_{i=1}^{n} Ra_i$ و برای هر i، $a_i \in \mathrm{Z}(R)$. دراین‌صورت $0 \neq a \in R$ وجود دارد به‌طوری‌که $aI = 0$.
اگر حلقه‌ی R دارای خاصیت قوی (A) باشد آن‌گاه R به‌طور طبیعی خاصیت (A) را دارد. در این پایان‌نامه بررسی می‌کنیم که برعکس این مطلب در حالت کلی برقرار نیست.

فرض کنیم A یک حلقه و E یک A−مدول باشد، توسیع بدیهی حلقه‌ای از A توسط E، حلقه‌ی $R := A \propto E$ است که روی $A \times E$ تعریف می‌شود و اعضای آن به صورت زوج‌های مرتب (a, e) است که $a \in A$ و $e \in E$ و ضرب آن به این صورت تعریف می‌شود: $(a, e)(a', e') = (aa', ae' + a'e)$.
توسیع بدیهی حلقه‌ای به‌طور گسترده مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است که خلاصه‌ای از آن در کتابهای

[۱] Huckaba
[۲] Keller
[۳] Quentel

گلاز[۴] و هوکابا آمده است. با استفاده از این نتایج، یک کلاس از حلقه‌ها را می‌سازیم که خاصیت (A) را دارند ولی دارای خاصیت قوی (A) نیستند.

ترکیب دوتایی حلقه‌ی R درامتداد یک زیر مدول R، زیرحلقه‌ی $R \times T(R)$ است که $T(R)$ حلقه‌ی خارج قسمتی کلی R است و توسط دوآنا[۵] و فُنتانا[۶] معرفی شده و با نماد $R \bowtie E$ نشان داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R \bowtie E = \{(r, r+e) \quad | \quad r \in R,\ e \in E\}$$

بدیهی است هرگاه در R−مدول $R \oplus E$، ساختار ضربی به‌صورت زیر

$$(r,e)(s,f) := (rs, rf + se + ef) \qquad r,s \in R \qquad e,f \in E$$

تعریف کنیم، یکریختی حلقه‌ای $R \bowtie E = R \oplus E$ را به‌دست می‌آوریم. وقتی $E^{۲} = ۰$، این ساختار جدید با ایده‌آل سازی $R \propto E$ منطبق می‌شود و اگر $E = I$ ایده‌آلی از R باشد آن‌گاه حلقه‌ی $R \bowtie I$ زیرحلقه‌ی از $R \times R$ است.

در بخش سوم فصل دو به بررسی انتقال خاصیت (A) و خاصیت قوی (A) به ترکیب دوتایی یک حلقه در امتداد یک ایده‌آل می‌پردازیم و با استفاده از این نتایج، یک کلاس از حلقه‌ها را که خاصیت (A) دارند ولی خاصیت قوی (A) ندارند را به‌دست می‌آوریم.

حلقه‌ی R یک PIF−حلقه نامیده می‌شود هرگاه هر ایده‌آل تصویری آن آزاد باشد. حلقه‌های موضعی و دامنه‌ی بیزو، مثال‌هایی از حلقه‌های PIF هستند.

در این پایان نامه، انتقال خاصیت PIF به توسیع بدیهی حلقه‌ای و حاصل ضرب مستقیم و موضعی سازی را مورد مطالعه قرار داده و مثال‌های جدیدی از PIF−حلقه‌ها را به دست می‌آوریم و در ادامه حلقه‌های شبه—فروبنیوس را معرفی کرده و به اثبات قضیه‌ی زیر می‌پردازیم:

قضیه: فرض کنیم R یک حلقه و I ایده‌آل سره‌ی R باشد. دراین صورت $R \bowtie I$ شبه—فروبنیوس است اگروتنها اگر R، شبه—فروبنیوس باشد و $I = Ra$ که a یک عضو خودتوان R است.

---

[۴] Glaz

[۵] D'Anna

[۶] Fontana

فهرست مندرجات

فصل ۱

مفاهیم و مقدمات اولیه

این فصل به ارائه‌ی تعاریف و قضایای مورد نیاز در فصل‌های بعدی اختصاص یافته است. توجه می‌کنیم همهٔ حلقه‌ها، جابه‌جایی و یکدار و همهٔ مدول‌ها یکانی در نظر گرفته شده‌اند.

۱.۱ **تعریف.** عضو a از حلقه‌ی R را یک مقسوم علیه صفر گوییم درصورتی که $0 \neq b \in R$ باشد به‌طوری که $ab = 0$. مجموعه‌ی تمام مقسوم علیه‌های صفر حلقه‌ی R را با نماد $\mathrm{Z}(R)$ نشان می‌دهیم.

۲.۱ **تعریف.** عضو x از R را منظم گوییم درصورتی که برای هر $0 \neq r \in R$ داشته باشیم $rx \neq 0$.

۳.۱ **تعریف.** ایده‌آل I از حلقه‌ی R را منظم گوییم هرگاه I توسط عناصر منظم تولید شود.

۴.۱ **تعریف.** فرض کنیم S یک زیر مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از R باشد به‌طوری‌که $S = R - \mathrm{Z}(R)$. قرار می‌دهیم: $Q(R) = S^{-1}R$ و $Q(R)$ را حلقه‌ی خارج قسمتی کلی R می‌نامیم.

۵.۱ **تعریف.** حلقه‌ی یکدار R را یک حلقه‌ی موضعی گوییم هرگاه مجموعه‌ی همه‌ی غیریکال‌های R، یک ایده‌آل باشد.

بنابراین حلقه‌ی جابجایی R موضعی است اگروتنها اگر R یک ایده‌آل ماکسیمال منحصربه‌فرد مانند m داشته باشد. دراین صورت حلقه‌ی خارج قسمتی $K = R/\mathrm{m}$ یک میدان است.

۶.۱ تعریف. فرض کنیم M یک $R-$مدول و X زیرمجموعه‌ای از M باشد. پوچ‌ساز X را با $\mathrm{Ann}X$ و یا با علامت $(\circ :_R X)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{Ann}_R(X) = \{r \in R \quad | \; rx = \circ \text{ برای هر } x \in X\}$$

توجه شود $\mathrm{Ann}_R(X)$ ایده‌آلی از R است.

۷.۱ تعریف. فرض کنیم M یک $R-$مدول باشد. ایده‌ال اول $\mathfrak{p}$ از R را ایده‌ال اول وابسته‌ی M نامیم هرگاه $\circ \neq m \in M$ موجود باشد به‌طوری که $\mathfrak{p} = (\circ :_R m)$.
مجموعه‌ی ایده‌الهای اول وابسته‌ی M را با $\mathrm{Ass}M$ نشان می‌دهیم.

۸.۱ تعریف. فرض کنیم R یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر باشد. منظور از $R-$جبر، حلقه‌ای چون S مجهز به یک هم‌ریختی حلقه‌ای چون $f : R \to S$ است. گوییم $R-$جبر S متناهی مولد است اگر به‌ازای زیرمجموعه‌ای متناهی چون Δ از S داشته باشیم $S = R[\Delta]$، یعنی $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in S$ وجود داشته باشند که: $S = R[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$.

۹.۱ تعریف. فرض کنیم R زیرحلقه‌ای از حلقه‌ی تعویض پذیرS باشد. فرض کنیم $s \in S$. گوییم s روی R صحیح است اگر $h \in \mathbb{N}$ و $r_\circ, r_1, \ldots r_{h-1} \in R$ موجود باشند به‌طوری که $s^h + r_{h-1}s^{h-1} + \cdots + r_1 s + r_\circ = \circ$. یعنی s ریشه‌ی یک چندجمله‌ای تکین متعلق به $R[x]$ باشد. گوییم S روی R صحیح است هرگاه هر عضو S روی R صحیح باشد.

۱۰.۱ قضیه. [[۳۵],۲۱.۱۳] فرض کنیم R زیرحلقه‌ای از حلقه‌ی تعویض‌پذیر S باشد و عضوهای $u_1, \ldots, u_n$ روی R صحیح باشند. دراین صورت زیرحلقه‌ی $R[u_1, u_2, \ldots, u_n]$ از S یک $R-$مدول متناهی مولد است.

۱۱.۱ قضیه. [[۳۵],۱۴.۳] فرض کنیم R و S زیرحلقه‌هایی از حلقه‌ی تعویض پذیر T باشند و $R \leq S \leq T$. فرض کنیم R حلقه‌ای نوتری و T به‌عنوان $R-$جبر، متناهی مولد و T روی S صحیح باشد. دراین صورت S به‌عنوان $R-$جبر متناهی مولد است.

۱.۱۲ قضیه. [[۳۵],۲۳.۱۳] فرض کنیم $R \subseteq S \subseteq T$ که R و S زیرحلقه‌هایی از حلقه‌ی تعویض‌پذیر Tاند. فرض کنیم S روی R و T روی S صحیح باشند. دراین صورت T روی R صحیح است.

۱.۱۳ لم. [[۳۵],۳۸.۹] فرض کنیم R یک حلقه و S یک زیر مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از R باشد. فرض کنیم M یک $R-$مدول باشد. دراین صورت؛

$$\mathrm{Ass}_{S^{-1}R}(S^{-1}M) = \{S^{-1}\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset,\ \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)\}$$

۱.۱۴ قضیه. [[۳۵],۳٦.۹] فرض کنیم R یک حلقه‌ی نوتری باشد. دراین صورت:

$$\mathrm{Z}(R) = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass} R} \mathfrak{p}$$

۱.۱۵ قضیه (قضیه اجتناب از ایده‌آل‌های اول[۱]). فرض کنیم $n \geq 2$ و $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ ایده‌آل‌هایی از حلقه‌ی R باشند که حداکثر دو تا از آنها اول نباشد. فرض کنیم S زیرگروهی از گروه جمعی R باشد که نسبت به ضرب بسته است. (مثلاً ممکن است ایده‌آل یا زیر حلقه‌ای از R باشد.) اگر

$$S \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i,$$

آنگاه jای موجود است که $1 \leq j \leq n$ و $S \subseteq \mathfrak{p}_j$.

۱.۱٦ قضیه. [[۳۵],۱۵.۵] فرض کنیم S یک زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از حلقه‌ی تعویض پذیر A باشد و B یک $A-$جبر مجهز به همریختی ساختاری حلقه‌ای $g : A \to B$ باشد. فرض کنیم:

۱) برای هر s از S، $g(s)$ در B یکال است.

۲) برای هر a از A، اگر $g(a) = 0$ آنگاه $t \in S$ایی باشد که $ta = 0$.

۳) هر عضو B نمایشی به صورت $g(a)(g(s))^{-1}$ دارد که در آن $a \in A$ و $s \in S$.

[۱] Prime Avoidance

دراین صورت یکریختی یکتایی مانند $h : S^{-1}A \to B$ موجود است به‌طوری که $ho\varphi = g$ که در آن $\varphi : A \to S^{-1}A$ همریختی حلقه‌ای طبیعی است.

۱.۱۷ **تعریف.** فرض کنیم $\{R_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ خانواده‌ای از زیرگره‌های جمعی حلقه‌ی R بوده به‌طوری که $R = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}} R_n$ و برای هر $m, n \in \mathbb{Z}$، داشته باشیم $R_mR_n \subseteq R_{m+n}$. دراین صورت گوییم R یک حلقه‌ی مدرج است.

واضح است اگر $R = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}} R_n$ یک حلقه‌ی مدرج باشد آنگاه $R_\circ$ زیرحلقه‌ی R بوده و برای هر $n \in \mathbb{Z}$، R_n یک $R_\circ$–مدول است.

۱.۱۸ **تعریف.** فرض $R = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}} R_n$ یک حلقه‌ی مدرج باشد و $M = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}} M_n$ و به‌علاوه برای هر $m, n \in \mathbb{Z}$ رابطه‌ی $R_mM_n \subseteq M_{m+n}$ برقرار باشد. دراین‌صورت M یک R–مدول مدرج گوییم.

۱.۱۹ **تعریف.** فرض کنیم $R = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}} R_n$ یک حلقه‌ی مدرج باشد و M یک R–مدول باشد. فرض کنیم $\{M_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ خانواده‌ای از زیرگروه‌های جمعی M باشد به‌طوری که $M = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}} M_n$ یک $R = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}} R_n$–مدول مدرج باشد. عضوی از M مانند x را عضو همگن M نامیم هرگاه عدد طبیعی مانند $n_\circ$ باشد به‌طوری که $x \in M_{n_\circ}$. دراین صورت $n_\circ$ را درجه‌ی x نامیم. با مفروضات بالا هر $y \in M$ را می‌توان به طور منحصربه فرد به صورت $y = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} y_n$ نوشت که در آن برای هر $n \in \mathbb{Z}$، $y_n \in M_n$ و به‌جز تعداد متناهی از y_nها، همگی صفراند. عناصر غیرصفر y_nها را مولفه‌های همگن y می‌نامیم.

۱.۲۰ **قضیه.** [[۲],۳.۵] فرض کنیم R حلقه‌ای باشد که هر ایده‌آل اول آن ماکسیمال است. اگر I ایده‌آل با تولید متناهی از R باشد که $I \subseteq \mathrm{Z}(R)$. آنگاه توانی از ایده‌آل I اصلی است و توسط یک عضو خودتوان تولید می‌شود.

۱.۲۱ **تعریف.** دنباله‌ی دقیق کوتاه $\circ \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow \circ$ را شکافته شده گوییم هرگاه نگاشت $g' : M'' \longrightarrow M$ موجود باشد به‌طوری که $gg' = id_{M''}$ و یا نگاشت $f' : M \longrightarrow M'$ موجود باشد به‌طوری که $f'f = id_{M'}$.

۲۲.۱ **تعریف.** R–مدول P را تصویری گوییم، در صورتی که برای هر نمودار

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \\ N & \xrightarrow{g} & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

از R–مدول‌ها و R–همریختی‌ها که سطر آن دقیق است، یک همریختی R–مدول‌ها مانند $h : P \longrightarrow N$ وجود داشته باشد به طوری که دیاگرام تکمیل شده جابه‌جایی باشد (یعنی، $f = gh$). R–مدول‌های انژکتیو نیز به طور دوگان تعریف می‌شوند.

۲۳.۱ **تعریف.** R–مدول F را آزاد گوییم درصورتی که F با مجموع مستقیم نسخه‌هایی از R–مدول R یکریخت باشد.

۲۴.۱ **قضیه.** [[۳۴],۳.۹] اگر F یک مدول آزاد باشد آن‌گاه تابعگون $\mathrm{Hom}_R(F,-)$ دقیق است، یعنی اگر $0 \to N \to M \to L \to 0$ یک دنباله‌ی دقیق از R– مدول‌ها باشد آن‌گاه $0 \to \mathrm{Hom}_R(F,N) \to \mathrm{Hom}_R(F,M) \to \mathrm{Hom}_R(F,L) \to 0$ یک دنباله‌ی دقیق از گروه‌های آبلی است.

۲۵.۱ **قضیه.** [[۳۴],۳.۱۰] فرض کنیم R یک حلقه‌ی موضعی باشد. دراین‌صورت هر R–مدول با تولید متناهی تصویری، آزاد است.

۲۶.۱ **توجه.** [[۳۴],۳.۲] P یک R–مدول تصویری است اگروتنها اگر $\mathrm{Hom}_R(P,-)$ یک تابعگون دقیق باشد.

۲۷.۱ **قضیه.** [[۳۴],۳.۵] P یک R–مدول تصویری است اگروتنها اگر P جمعوند مستقیم یک R–مدول آزاد باشد.

۲۸.۱ **نتیجه.** [[۳۴],۳.۶]

۱) جمعوند مستقیم هر مدول تصویری، تصویری است.

۲) جمع مستقیم مدول‌های تصویری، تصویری است.

۲۹.۱ تعریف. R–مدول F را یکدست گوییم هرگاه تابعگون $-\otimes_R F$ دقیق باشد.

۳۰.۱ قضیه. [[۳۴],۳.۴۵] هر R–مدول تصویری، یکدست است.

۳۱.۱ توجه. [[۳۴],۳.۴٦] فرض کنیم R یک حلقه‌ی دلخواه باشد. دراین‌صورت:

۱) R–مدول R یک R–مدول یکدست است.

۲) جمع مستقیم $\bigoplus\limits_j M_j$ از R–مدول‌ها یکدست است اگروتنها اگر هر M_j یکدست باشد.

۳۲.۱ توجه. [[۳۴],۳.۴۸] اگر هر زیرمدول باتولید متناهی از R–مدول M، یکدست باشد آن‌گاه M یکدست است.

۳۳.۱ نتیجه. [[۳۴],۳.۵۹] اگر A یک R–مدول یکدست و I ایده‌آلی از R باشد، آن‌گاه $\mathbb{Z}$–هم‌ریختی $\theta_A : A\otimes_R I \to AI$ تعریف شده با ضابطه‌ی $a\otimes i \mapsto ai$ یک یکریختی است.

۳۴.۱ توجه. [[۳۴],۳.٦۰] فرض کنیم $\circ \to K \to F \overset{\varphi}{\to} A \to \circ$ دنباله‌ی دقیقی از R–مدول‌ها باشد به‌طوری‌که F یکدست است. دراین‌صورت A یک R–مدول یکدست است اگروتنها اگر برای هر ایده‌آل I از R داشته باشیم: $K\cap FI = KI$.

۳۵.۱ قضیه. [[۳٦],۹.۹] فرض کنیم $\circ \to M' \to M \to M'' \to \circ$ یک رشته‌ی دقیق از R–مدول‌ها و R–هم‌ریختی‌ها و S یک زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از R باشد. دراین‌صورت رشته‌ی $\circ \to S^{-۱}M' \to S^{-۱}M \to S^{-۱}M'' \to \circ$ دقیق است. (به‌عبارت دیگر تابعگون $S^{-۱}(-)$ یک تابعگون دقیق است.)

یادآوری: یک همبافت مانند A، دنباله‌ای از R–مدول‌ها و R–همریختی‌ها به شکل

$$A = \ldots \to A_{n+۱} \overset{d_{n+۱}}{\to} A_n \overset{d_n}{\to} A_{n-۱} \to \cdots$$

است که در آن برای هر $n\in\mathbb{Z}$، $d_n d_{n+۱} = \circ$.

هم‌چنین برای همبافت‌های A و A'، خانواده‌ی $f = (f_n), \{f_n : A_n \to A'_n\}$ از R–همریختی‌ها را نگاشتی

زنجیری از همبافت A به همبافت A' گوییم هرگاه دیاگرام زیر جابجایی باشد

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \to & A_{n+1} & \to & A_n & \to & A_{n-1} & \to \cdots \\ & {\scriptstyle f_{n+1}}\downarrow & & {\scriptstyle f_n}\downarrow & & {\scriptstyle f_{n-1}}\downarrow & \\ \cdots \to & A'_{n+1} & \to & A'_n & \to & A'_{n-1} & \to \cdots \end{array}$$

اگر F تابعگون جمعی باشد آن‌گاه

$$FA = \cdots \to FA_{n+1} \xrightarrow{Fd_{n+1}} FA_n \xrightarrow{Fd_n} FA_{n-1} \to \cdots$$

نیز همبافت است.

خارج قسمت $\ker(d_n)/\mathrm{Im}(d_{n+1})$ را n–اُمین همولوژی مدول همبافت A می‌نامیم و با نماد $H_n(A)$ نشان می‌دهیم.

حال اثر H_n را بر نگاشت زنجیری $f : A \to A'$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$H_n(f) : \quad H_n(A) \to H_n(A')$$

$$z_n + \mathrm{Im} d_{n+1} \mapsto f_n z_n + \mathrm{Im} d'_{n+1}$$

به راحتی می‌توان نشان داد که H_n یک تابعگون از رسته‌ی همبافت‌ها به رسته‌ی گروه‌های آبلی است.

۳۶.۱ قضیه ((دنباله‌ی دقیق طولانی)). [[۳۴],۳.۶] فرض کنیم $0 \to A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A'' \to 0$ یک دنباله‌ی دقیق از همبافت‌ها باشد. دراین صورت دنباله‌ی دقیق زیر از R–مدول‌ها وجود دارد

$$\cdots \to H_n(A') \xrightarrow{i_*} H_n(A) \xrightarrow{p_*} H_n(A'') \xrightarrow{\sigma} H_{n-1}(A) \to \cdots$$

یادآوری: فرض کنیم R یک حلقه و M یک R–مدول باشد. دنباله‌ی دقیق $\cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$ که در آن P_iها، R–مدول تصویری‌اند را یک تحلیل تصویری برای M نامیم. اگر P_iها آزاد باشند آن‌گاه این دنباله‌ی دقیق، یک تحلیل آزاد برای M نامیده می‌شود. بر اساس قضیه‌ی ۸.۳ از[۳۴]، هر R–مدول M دارای یک تحلیل آزاد است از طرفی بنابر قضیه‌ی ۲.۳ از[۳۴]، هر R–مدول آزاد تصویری است. پس هر R–مدول M دارای یک تحلیل تصویری است.

دنباله‌ی دقیق $0 \to M \to E^0 \to E^1 \to \cdots$ که در آن E^iها، R–مدول انژکتیو هستند را یک تحلیل انژکتیو برای M نامیم. بنابر قضیه‌ی ۱۸.۳ از[۳۴]، هر R–مدول دارای یک تحلیل انژکتیو است. اگر در هریک از

تحلیل‌های فوق M را حذف کنیم، همبافت حاصل را یک همبافت تصویری یا انژکتیو حذفی نامیم.

یادآوری: بر اساس قضیه‌های ۹.۲ و ۱۰.۲ از[۳۴]، تابعگون پادورد $\mathrm{Hom}(-,M)$ و تابعگون همورد $\mathrm{Hom}(M,-)$ دقیق چپ‌اند و تابعگون‌های $-\otimes M$ و $M\otimes -$ دقیق راست‌اند. اکنون مطابق با نمادگذاری‌های مرجع [۳۴]، مفاهیم مربوط به n–اُمین تابعگون مشتق شده‌ی راست و چپ را یادآوری می‌کنیم:

فرض کنیم N یک R–مدول راست باشد. برای هر مدول M، یکی از همبافت‌های تصویری حذفی‌اش مانند $\cdots \to P_n \overset{d_n}{\to} P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \overset{d_1}{\to} P_0 \overset{d_0}{\to} 0$ را در نظر می‌گیریم. با اثر دادن تابعگون $N\otimes -$ بر دنباله‌ی فوق، دنباله‌ی $\cdots \to N\otimes P_1 \to N\otimes P_0 \to 0$ را به‌دست می‌آوریم. اکنون برای هر $n\geq 0$، خارج‌قسمت $\ker(id_N\otimes d_n)/\mathrm{Im}(id_N\otimes d_{n+1})$ را که درواقع n–اُمین همولوژی مدول این دنباله است را با $\mathrm{tor}_R^n(N,M)$ نشان می‌دهیم. بنابر قضیه‌ی ۱۱.۶ از[۳۴]، این مدول مستقل از انتخاب تحلیل تصویری برای M است.

به‌طور مشابه با درنظر گرفتن یکی از همبافت‌های تصویری حذفی N، می‌توان $\mathrm{Tor}_R^n(N,M)$ را تعریف نمود.

هم‌چنین برای مدول‌های A و C، با درنظر گرفتن یکی از همبافت‌های انژکتیو حذفی مدول A و اثر دادن تابعگون $\mathrm{Hom}(C,-)$ بر روی آن، می‌توان $\mathrm{Ext}_R^n(C,A)$ را تعریف نمود.

حال اگر یکی از همبافت‌های تصویری حذفی C را درنظر بگیریم و تابعگون پادورد $\mathrm{Hom}(-,A)$ را بر آن اثر دهیم، می‌توان $\mathrm{ext}^n(C,A)$ را تعریف نمود. بر اساس قضیه‌ی ۸.۷ و نتیجه‌ی ۹.۷ از[۳۴]، یکریختی‌های $\mathrm{Tor}(N,M)\cong \mathrm{tor}(N,M)$ و $\mathrm{Ext}(C,A)\cong \mathrm{ext}(C,A)$ برقرار است ازاین رو دیگر تمایزی بین $\mathrm{Tor}(N,M)$ و $\mathrm{tor}(N,M)$ و هم‌چنین بین $\mathrm{Ext}(C,A)$ و $\mathrm{ext}(C,A)$ قائل نمی‌شویم.

۳۷.۱ قضیه. [[۱۵],۳.۴.۸] شرایط زیر بر R–مدول P باهم معادلند:

۱) P تصویری است.

۲) هر دنباله‌ی دقیق کوتاه $0\to N\to M\to P\to 0$ شکافته شده است (یعنی $M\cong N\oplus P$).

۳) P جمعوند مستقیم یک مدول آزاد است (یعنی، مدول آزاد F و R–مدول K وجود دارند به‌طوری که $F\cong K\oplus P$).

۴) تابعگون $\mathrm{Hom}(P,-)$ دقیق است.

۵) برای هر R–مدول M، $\mathrm{Ext}_R^1(P,M)=0$.

۶) برای هر R–مدول M و هر $n > 0$، $\mathrm{Ext}_R^n(P, M) = 0$.

۳۸.۱ قضیه. [[۱۵],۲.۱.۲] شرایط زیر برای R–مدول E باهم معادلند:

۱) E انژکتیو است.

۲) هر دنباله‌ی دقیق کوتاه $0 \to E \to M \to L \to 0$ شکافته شده است.

۳) E جمعوند مستقیم هر مدول M است که E زیرمدولی از آن باشد.

۴) تابعگون پادورد $\mathrm{Hom}(-, E)$ دقیق است.

۵) برای هر R–مدول N، $\mathrm{Ext}_R^1(N, E) = 0$.

۶) برای هر R–مدول N و هر $n > 0$، $\mathrm{Ext}_R^n(N, E) = 0$.

۳۹.۱ تعریف. فرض کنیم M یک R–مدول باشد. M را بی‌تاب گوییم اگر برای $m \in M$ عضو ناصفری مانند $r \in R$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که اگر $rm = 0$ آن‌گاه $m = 0$. $r = 0$.

۴۰.۱ تعریف. فرض کنیم R و S دو حلقه باشند. M را یک $(R - S)$ دو مدول گوییم هرگاه هم R–مدول و هم S–مدول باشد و برای هر $r \in R$ و $m \in M$ و $s \in S$ داشته باشیم: $r(bs) = (rb)s$.

۴۱.۱ قضیه. [[۱۵],۴۴.۳] فرض کنیم M یک $R - S$ دو مدول و به‌عنوان R–مدول یکدست باشد و N یک S–مدول انژکتیو باشد. دراین صورت $\mathrm{Hom}_S(M, N)$ یک R–مدول انژکتیو است.

۴۲.۱ قضیه. [[۳۴],۱۰.۳] فرض کنیم R و S دو حلقه و S یک R–مدول باشد. اگر P یک R–مدول تصویری باشد آن‌گاه $S \otimes_R P$ یک S–مدول تصویری است.

۴۳.۱ توجه. [[۳۴],۲۱.۷] اگر $(A_k)_{k \in I}$ خانواده‌ای از R–مدول‌ها باشد آن‌گاه یکریختی طبیعی زیر را برای هر $n \geq 0$ داریم:

$$\mathrm{Ext}_R^n\Big(\bigoplus_{k \in I} A_k, B\Big) \cong \prod_{k \in I} \mathrm{Ext}_R^n(A_k, B)$$

۴۴.۱ **تعریف.** R-مدول M را با نمایش متناهی گوییم درصورتی که R-مدول‌های آزاد و متناهی مولد $F_\circ$ و $F_\backslash$ موجود باشند به‌طوری که دنباله‌ی $F_\backslash \to F_\circ \to M \to \circ$ دقیق باشد.

۴۵.۱ **قضیه.** [[۲۱],۱.۲.۴] فرض کنیم R یک حلقه باشد. دراین صورت

۱) اگر R نوتری باشد آن‌گاه هر R-مدول با تولید متناهی، با نمایش متناهی است.

۲) هر R-مدول با تولید متناهی تصویری، با نمایش متناهی است.

۳) هر R-مدول با نمایش متناهی یکدست، تصویری است.

۴۶.۱ **تعریف.** R-مدول M را کوهرنت گوییم در صورتی که باتولید متناهی باشد و زیر مدول‌های با تولید متناهی‌اش، با نمایش متناهی باشند. حلقه‌ی R را کوهرنت گوییم هرگاه به‌عنوان R-مدول روی خودش کوهرنت باشد.

۴۷.۱ **تذکر.** هر حلقه‌ی نوتری، کوهرنت است.

۴۸.۱ **قضیه.** [[۲۱],۲.۴.۳] فرض کنیم برای یک عدد طبیعی n، $\{R_i\}_{i=\backslash}^{n}$ خانواده‌ی حلقه‌های کوهرنت باشد. دراین صورت $R = \prod\limits_{i=\backslash}^{n} R_i$ کوهرنت است.

۴۹.۱ **قضیه.** [[۲۱],۱.۴.۲] فرض کنیم R یک حلقه و I ایده‌آل سره‌ی آن باشد. دراین صورت:

۱) اگر حلقه‌ی R کوهرنت و I یک ایده‌آل با تولید متناهی از R باشد آن‌گاه حلقه‌ی R/I کوهرنت است.

۲) اگر حلقه‌ی R/I کوهرنت و I به‌عنوان R-مدول، کوهرنت باشد آن‌گاه R کوهرنت خواهد بود.

۵۰.۱ **قضیه.** [[۳۴],۲.۳.۲] عبارات زیر برای حلقه‌ی R معادلند:

۱) R یک حلقه کوهرنت است؛

۲) هر زیرمدول باتولید متناهی از یک R-مدول آزاد بانمایش متناهی است؛

۳) هر حاصل‌ضرب مستقیم از R−مدول‌های یکدست یک R−مدول یکدست است؛

۴) برای‌هر $a \in R$ و هر دو ایده‌آل باتولید متناهی I و J از R پوچساز a و $I \cap J$ ایده‌آل‌های باتولید متناهی R هستند.

۵۱.۱ **تعریف (منظم فون نویمان[۲]).** حلقه‌ی R را حلقه‌ی مطلقاً یکدست یا منظم فون نویمان گوییم هرگاه برای هر $a \in R$، عضو $b \in R$ باشد به‌طوری که $a^2 b = a$.

۵۲.۱ **قضیه.** [[۲],۳.۱] فرض کنیم R حلقه‌ی جابجایی باشد. دراین صورت گزاره‌های زیر معادلند:

۱) R حلقه‌ی مطلقاً یکدست است.

۲) هر ایده‌آل با تولید متناهی R، اصلی است و با عضو خودتوان تولید می‌شود.

۳) هر R−مدول یکدست است.

۴) برای هر ایده‌آل I و J از R داریم: $I \cap J = IJ$.

۵) هر زیر مدول با تولید متناهی از R−مدول آزاد F، جمعوند مستقیم F است.

۵۳.۱ **تعریف.** دامنه‌ای که هر ایده‌آل با تولید متناهی آن اصلی باشد، دامنه‌ی بیزو نامیده می‌شود.

۵۴.۱ **تعریف.** فرض کنیم R یک دامنه‌ی صحیح با میدان خارج‌قسمتی K باشد. زیرمدول I از K یک ایده‌آل کسری R است، اگر عضو ناصفری مانند x از R وجود داشته باشد به‌طوری‌که $xI \subseteq R$.

۵۵.۱ **تعریف.** فرض کنیم R یک دامنه باشد و Q میدان کسرهای R باشد، ایده‌آل I از R را وارون‌پذیر می‌نامیم هرگاه $a_1, \dots, a_n \in I$ و $q_1, \dots, q_n \in Q$ وجود داشته باشند به‌طوری که:

۱) برای هر $i = 1, \dots, n$، $q_i I \subseteq R$.

۲) $\sum_{i=1}^{n} q_i a_i = 1$.

---

[۲] Von Neumann regular

۱.۵۶ توجه. از تعریف فوق معلوم می‌شود که یک ایده‌آل وارون‌پذیر، باتولید متناهی است.

۱.۵۷ توجه. [[۳۴],۲۱.۴] فرض کنیم R یک دامنه باشد. I ایده‌آل تصویری R است اگروتنها اگر I وارون‌پذیر باشد.

فصل ۲

(A)−حلقه‌ها

۱.۲ معرفی حلقه‌هایی با خاصیت (A)

هوکابا[۱] و کِلر[۲] تعریف زیر را برای خاصیت (A) معرفی کردند:

۱.۱.۲ تعریف. حلقه‌ی جابجایی R دارای خاصیت (A) است اگر هر ایده‌آل با تولید متناهی R که مشمول در مقسوم علیه‌های صفر است، پوچ ساز ناصفر داشته باشد.

خاصیت (A) در ابتدا توسط کوئنتل[۳] بررسی شد. او اصطلاح شرط C را برای خاصیت (A) به کار برد.
توجه شود که کلاس حلقه‌های جابجایی با خاصیت (A) نسبتاً بزرگ است. برای مثال: حلقه‌های نوتری، حلقه‌هایی که در آنها هر ایده‌آل اول، ماکسیمال است، حلقه چندجمله‌ای $R[x]$ و حلقه‌هایی که حلقه‌ی خارج قسمتی کلی آنها منظم فون نویمان[۴] است.
در این فصل به بررسی چند نمونه از این مثال‌ها می پردازیم.

۲.۱.۲ قضیه حلقه‌های نوتری، (A)−حلقه‌اند.

---

[۱] Huckaba
[۲] Keller
[۳] Quentel
[۴] Von Neumann regular