دانشگاه فردوسی مشهد

دانشکده علوم ریاضی

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض

گرایش هندسه– توپولوژی جبری

عنوان:

گروه‌های هموتوپی و همولوژی گوشواره‌های هاوایی و گروه‌های هاوایی

استاد راهنما:

جناب آقای دکتر بهروز مشایخی‌فرد

استاد مشاور:

سرکار خانم دکتر هانیه میرابراهیمی

توسط:

آمنه بابایی

شهریور ۱۳۹۰

فهرست مندرجات

مقدمه

پیدایش توپولوژی جبری آن‌گونه بود که جبر در خدمت توپولوژی برای کشف دنیای هندسه باشد، گرچه با ادامه‌ی این راه هندسه و توپولوژی نیز به یاری جبر شتافتند.
اکنون دو شاخه‌ی جبر و توپولوژی در کنار هم شاخه‌ای مستقل در علم ریاضیات با نام توپولوژی جبری پدید آورده‌اند.
یکی از مهم‌ترین مفاهیم جبری که در شناخت فضاهای توپولوژیک به کار می‌روند، گروه‌ها هستند.
تابعگون هموتوپی، همولوژی و هاوایی به هر فضای توپولوژیک یک گروه یکتا نسبت می‌دهند که این گروه‌ها در شناخت و خصوصا تفکیک فضاهای توپولوژیک نقشی پررنگ دارند.
گروه بنیادین، مقدماتی‌ترین تابعگون در توپولوژی جبری، برای اولین بار در سال ۱۹۸۵ توسط ریاضیدان فرانسوی پوآنکاره[1] معرفی شد. هرویچ [2] در سال‌های ۱۹۳۵ و ۱۹۳۶ این مفهوم را به مراتب بالاتر با نام گروه‌های هموتوپی گسترش داد.

گوشواره‌ی هاوایی $\mathbb{H}^1$ زیرفضایی از صفحه است که از اجتماع تعداد شمارایی دایره‌ی تودرتوی مماس برمبدأ تشکیل شده است. این فضا آشناترین مثال الحاق ضعیف است که گاه در نگاه اول با فضای $Y_\infty = \bigvee_{i\in\mathbb{N}} S^1$ که از الحاق تعداد شمارایی دایره به دست می‌آید، تفاوتی ندارد. اما با کمی دقت، تفاوت‌ها و شگفتی‌های گوشواره‌ی هاوایی رخ می‌نماید.

---

[1] Poincare

[2] Hurewicz

یکی از تفاوت‌های این دو فضا در ساختار گروه بنیادین آن‌ها آشکار می‌شود. گروه بنیادین فضای Y_∞ به طور طبیعی یکریخت با گروه $*_{i\in\mathbb{N}}\mathbb{Z}$ است، حال آن که گروه بنیادین گوشواره‌ی هاوایی منجر به تعریف مفهوم جدیدی در نظریه‌ی گروه‌ها [۴]، با نام $\sigma-$حاصل‌ضرب آزاد گروه‌ها شد.
گوشواره‌ی هاوایی در سال ۲۰۰۰ [۶]، توسط ادا[۳] و کاوامورا [۴] به ابعاد بالاتر گسترش یافت و گروه‌های هموتوپی آن‌ها شناسایی شد. با بهره‌گیری از این تعمیم، کریمف [۵] و ریپووز[۶] [۱۶]، در سال ۲۰۰۶، مفهومی جدید با نام گروه هاوایی $n-$بعدی، $n \geq 1$، ارایه دادند.

این پژوهش پیرامون گوشواره‌های هاوایی است. مشخصات گوشواره‌های هاوایی و برخی کاربردهای آن‌ها موضوع بحث پیش رو است.
مطالب این پایان‌نامه در پنج فصل به شرح زیر گردآوری شده است.

فصل اول به بیان مقدمات، تعاریف و قضایای مورد نیاز چهار فصل پایانی می‌پردازد. در این فصل از تفصیل و توضیح بیش از حد نیاز خودداری شده است و علاقه‌مندان با رجوع به منبع هر مفهوم، می‌توانند به تفصیل آن را مطالعه‌کنند.
تعاریف این فصل عبارت هستند از:
گوشواره هاوایی $n-$بعدی، الحاق و الحاق ضعیف، فضای پیوستار و پیوستار پئانو، کلاف بدیهی موضعی، حد مستقیم و حد معکوس، $\sigma-$حاصل‌ضرب آزاد، تتمیم گروه $\mathbb{Z}$ و $p-$تتمیم گروه $\mathbb{Z}$، زیرگروه اولم، زیرگروه صحیح و گروه فشرده‌ی جبری، همبافت سادکی و همبافت CW، گروه‌های هموتوپی و گروه‌های کوهمولوژی، توکشیده‌ی مطلق و توکشیده‌ی همسایگی مطلق، فضای دندانه‌ای و دندانه‌ای موضعی.
همچنین قضایای مربوط به این تعاریف فقط تا حد نیاز این پایان‌نامه بیان شده است.

[۳] Eda
[۴] Kawamura
[۵] U.H. Karimov
[۶] D. Repovš

در فصل دوم مقاله‌ای [۷] با عنوان همولوژی منفرد گوشواره‌ی هاوایی بررسی می‌شود.
دراین مقاله ساختار گروه‌های همولوژی منفرد رده‌ای از فضاها شامل گوشواره‌ی هاوایی یک‌بعدی مورد تحقیق قرار گرفته است و برخی خواص آن شناسایی شده است.
در نهایت ساختار تمام گروه‌های همولوژی منفرد گوشواره‌ی هاوایی یک‌بعدی دقیقا مشخص شده است.

فصل سوم به بررسی بخش دوم از مقاله‌ی [٦] با عنوان گروه‌های هموتوپی و همولوژی گوشواره‌ی هاوایی n−بعدی، $n \geq ۲$، می‌پردازد.
در این مقاله برای اولین بار مفهوم گوشواره‌ی هاوایی n−بعدی، $n \geq ۲$، توسط ادا و کاوامورا در سال ۲۰۰۰ تعریف شد.
بخش دوم این مقاله ساختار گروه هموتوپی گوشواره ی هاوایی n−بعدی را، $n \geq ۲$، مشخص می‌کند.

در فصل چهارم که اصلی‌ترین مبحث این پایان‌نامه است، به مقاله‌ای [۱٦] با عنوان گروه‌های هاوایی فضاهای توپولوژیک می‌پردازیم.
دراین مقاله ابزار نوینی در توپولوژی جبری با استفاده از گروه‌های هموتوپی، با عنوان گروه‌های هاوایی تعریف می‌شود. همچنین برخی ویژگی‌ها، کاربردها و مزایای این تابعگون‌ها نسبت به سایر تابعگون‌های شناخته‌شده نظیر تابعگون هموتوپی، همولوژی و کوهمولوژی ذکر می‌شود.

در فصل پایانی نتایج جدید به دست‌آمده در این پایان‌نامه بیان و اثبات می‌شود.
از جمله مهم‌ترین نتایج این فصل، یافتن ساختار دقیق گروه‌های هاوایی گوشواره‌های هاوایی است.
همچنین در این فصل ساختار گروه هاوایی مخروط یک فضا بر حسب گروه هاوایی و گروه هموتوپی آن فضا ارایه می‌شود.

در ادامه‌ی این فصل گوشواره‌ی هاوایی نامتناهی—بعد و گروه هاوایی نامتناهی—بعد که در مرجع [۱۷] در سال ۲۰۱۰ توسط کریمف و ریپووز معرفی شده است، یادآوری می‌شود و برخی نتایج که در گروه‌های هاوایی متناهی—بعد به دست آمده است، در مورد این گروه نیز اثبات می‌شود.

مقصود عاشـــقان دو عالم لـقای تو است
مطلوب طالـــبان حقیـقت رضای تو است
هرجا که پادشاهی‌و صدری‌و سروری‌است
موقوف آســـــتان در کبـــریای تو است
کس را بـــقای دایم و عهد قدیـــم نیست
جاویـــد پادشاهی و دایم بـــقای تو است
گر می‌کشی به لطف و گر می‌کشی به قهر
ما راضییـــم هر چه بود رای، رای تو است
امیـــد هر کسی به نـیازی و حاجتی است
امیـــــد ما به رحـــمت بی‌منتهای تو است
هر کس امیـــدوار به اعـــمال خویشـتن
سعـدی امیدوار به لطف و عطای تو است.

شهریور ۱۳۹۰

فصل ۱

پیشنیازها

۱.۱ توپولوژی

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم $n \geq 0$، **گوشواره‌ی هاوایی nـبعدی**، زیرفضایی از فضای اقلیدسی $(n+1)$ـبعدی به صورت زیر است :

$$\mathbb{H}^n = \{(r_0, r_1, ..., r_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (r_0 - 1/k)^2 + \sum_{i=1}^{n} (r_i)^2 = (1/k)^2,\ k \in \mathbb{N}\}$$

نقطه‌ی $\theta = (0, ..., 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ نقطه‌ی پایه‌ی $\mathbb{H}^n$ در نظر گرفته می شود.

در این فضا مجموعه‌ی

$$\{\ (r_0, r_1, ..., r_n) \in \mathbb{R}^{n+1}\ \mid (r_0 - 1/k)^2 + \sum_{i=1}^{n} (r_i)^2 = (1/k)^2\}$$

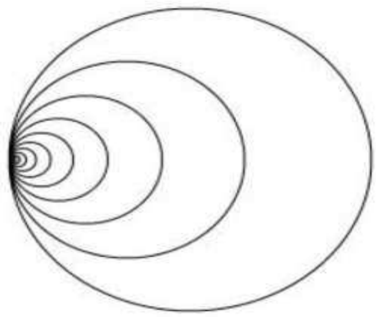
با S_k^n نمایش داده می‌شود که کره‌ی nـبعدی به مرکز $(1/k, 0, ..., 0)$ و شعاع $1/k$ در $\mathbb{R}^{n+1}$ است. بنابراین $\mathbb{H}^n = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} S_k^n$.

مثال ۲.۱.۱ گوشواره‌ی هاوایی صفربعدی، $\mathbb{H}^0$ در فضای $\mathbb{R}$، خط اعداد حقیقی، برابر یک دنباله‌ی همگرا به صفر است.

$$\mathbb{H}^0 = \{r \in \mathbb{R} \mid\ (r - 1/k)^2 = (1/k)^2,\ k \in \mathbb{N}\} = \{r \in \mathbb{R}\ | r - 1/k = \pm(1/k),\ k \in \mathbb{N}\}$$

$$= \{۲/k | k \in \mathbb{N}\} \cup \{۰\}$$

مثال ۳.۱.۱ گوشواره‌ی هاوایی یک‌بعدی $\mathbb{H}^۱$ همان گوشواره‌ی هاوایی شناخته شده است که شکل آن در صفحه‌ی $\mathbb{R}^۲$ به صورت زیر است:



تعریف ۴.۱.۱ فرض کنید $\{A_j\}_{j\in J}$ یک خانواده از زیرمجموعه‌های فضای X باشند به طوری که

۱– $X = \bigcup_{j\in J} A_j$،

۲– مجموعه‌ی A_j، برای هر $j \in J$، یک فضای توپولوژیک باشد،

۳– توپولوژی نسبی القایی روی $A_j \cap A_k$ توسط هر دو فضای A_j و A_k، برای هر $j, k \in J$، منطبق باشد،

۴– مجموعه‌ی $A_j \cap A_k$ در هر دو فضای A_j و A_k، برای هر $j, k \in J$، بسته باشد.

در این صورت گوییم فضای X دارای **توپولوژی ضعیف** نسبت به $\{A_j\}_{j\in J}$ است، هرگاه هر مجموعه‌ی F در X بسته باشد اگر و تنها اگر $F \cap A_j$، برای هر $j \in J$، در A_j بسته باشد.

تعریف ۵.۱.۱ فرض کنید $\{(X_i, x_i)\}_{i\in I}$ یک خانواده از فضاهای توپولوژیک نقطه‌دار دوبه‌دو مجزا باشد. مجموعه‌ی $X = \frac{\bigcup_{i\in I} X_i}{\{x_i : i\in I\}}$ را همراه با نگاشت خارج‌قسمتی $p : \bigcup_{i\in I} X_i \to X$ در نظر بگیرید و نقطه‌ی همسانی x_iها را x_* بنامید. در این صورت توپولوژی زیر روی X قابل تعریف است.

هر زیرمجموعه‌ی X مانند U باز است اگر و تنها اگر مجموعه‌ی $p^{-1}(U) \cap X_i$ در فضای X_i، برای هر $i \in I$، باز باشد.
فضای نقطه‌دار (X, x_*) با توپولوژی فوق را **الحاق** خانواده‌ی فضاهای $\{(X_i, x_i)\}_{i\in I}$ می‌نامند و با نماد $\bigvee_{i\in I}(X_i, x_i)$ و فضای X را به اختصار با نماد $\bigvee_{i\in I} X_i$ نشان می‌دهند. برای هر $i \in I$، فضای X_i توسط نگاشت p با $p(X_i)$ همسانریخت است و به اختصار $p(X_i)$ را با X_i نشان می‌دهیم و منظور از x_i در X همان نقطه‌ی مشترک x_* است.

لم ۶.۱.۱ فرض کنید $\{(X_i, x_i)\}_{i\in I}$ یک خانواده از فضاهای توپولوژیک نقطه‌دار دوبه‌دو مجزا و X فضای تعریف ۵.۱.۱ باشد. در این صورت فضای X نسبت به خانواده‌ی $\{X_i\}_{i\in I}$ توپولوژی ضعیف دارد. به ویژه فضای $Y_\infty = \bigvee_{i\in\mathbb{N}} S^1$ بر خلاف گوشواره‌ی هاوایی، نسبت به خانواده‌ی شمارای نسخه‌های همسانریخت با S^1 توپولوژی ضعیف دارد.

برهان . ر. ک. به [۳۰]، مثال ۹.۸. □

لم ۷.۱.۱ فرض کنید فضای X نسبت به خانواده‌ی $\{A_j\}_{j\in J}$ توپولوژی ضعیف داشته باشد. در این صورت برای هر فضای دلخواه Y، نگاشت $f : X \to Y$ پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر $j \in J$، نگاشت $f|_{A_j}$ پیوسته باشد.

برهان . ر. ک. به [۳۰]، لم ۱۴.۸. □

تعریف ۸.۱.۱ فرض کنید I یک مجموعه‌ی نامتناهی و $\{(X_i, x_i)\}_{i\in I}$ یک خانواده از فضاهای توپولوژیک نقطه‌دار دوبه‌دو مجزا باشد. مجموعه‌ی $X = \frac{\bigcup_{i\in I} X_i}{\{x_i : i\in I\}}$ را همراه با نگاشت خارج‌قسمتی $p : \bigcup_{i\in I} X_i \to X$ در نظر بگیرید و نقطه‌ی همسانی x_iها را x_* بنامید. در این صورت توپولوژی زیر روی X قابل تعریف است.
۱− هر زیرمجموعه‌ی X مانند U که شامل عنصر x_* نباشد باز است اگر و تنها اگر برای هر $i \in I$، مجموعه‌ی $p^{-1}(U) \cap X_i$ در فضای X_i باز باشد.
۲− هر زیرمجموعه‌ی X مانند V که شامل عنصر x_* باشد باز است اگر و تنها اگر برای هر

$i \in I$، مجموعه‌ی $p^{-1}(V) \cap X_i$ در فضای X_i باز باشد و مجموعه‌ی $\{i \in I : X_i \nsubseteq p^{-1}(V)\}$ متناهی باشد.
فضای نقطه‌دار (X, x_*) با توپولوژی فوق را **الحاق ضعیف** خانواده‌ی فضاهای نقطه‌دار $\{(X_i, x_i)\}_{i\in I}$ می‌نامند و با نماد $\widetilde{\bigvee}_{i\in I}(X_i, x_i)$ و فضای X را به اختصار با نماد $\widetilde{\bigvee}_{i\in I}X_i$ نشان می‌دهند. برای هر $i \in I$، فضای X_i توسط نگاشت p با $p(X_i)$ همسانریخت است و به اختصار $p(X_i)$ را با X_i نشان می‌دهیم و منظور از x_i در X همان نقطه‌ی مشترک x_* است.

توپولوژی فضای تعریف بالا و فضای تعریف ۵.۱.۱ بسیار به هم شبیه‌اند و تنها در نقطه‌ی x_* تفاوت دارند. این تفاوت باعث می‌شود توپولوژی القایی الحاق از توپولوژی الحاق ضعیف، ظریف‌تر باشد. از این رو، در این دو فضا نقطه‌ی x_* دارای اهمیت فراوانی است.

مثال ۹.۱.۱ گوشواره‌ی هاوایی n—بعدی، $n \geq ۰$، با فضای حاصل از الحاق ضعیف تعداد شمارایی نسخه‌ی همسانریخت با کره‌ی n—بعدی S^n، همسانریخت است، یعنی $\mathbb{H}^n \approx \widetilde{\bigvee}_{i\in\mathbb{N}}S^n$. در حالت $n = ۰$، فضای S^n دو نقطه است که باعث می‌شود الحاق ضعیف به یک دنباله‌ی همگرا بیانجامد.

تعریف ۱۰.۱.۱ نگاشت پیوسته‌ی $g : (X, A) \to (Y, B)$ را **همسانریختی نسبی** می‌نامیم، هرگاه $g|_{(X-A)} : (X - A) \to (Y - B)$ یک همسانریختی باشد.

مثال ۱۱.۱.۱ فرض کنید $\mathbb{I}$ بازه‌ی واحد $[۰, ۱]$، $n \in \mathbb{N}$ و $\mathbb{I}^n$ مکعب n—بعدی واحد باشد. در این صورت نگاشت $g : (\mathbb{I}^n, \partial\mathbb{I}^n) \to (S^n, a)$ با ضابطه‌ی نگاشت تصویر گنج‌نگاری روی مجموعه‌ی $\mathbb{I}^n - \partial\mathbb{I}^n$، یک همسانریختی نسبی است.

قضیه ۱۲.۱.۱ یک دوسویی از یک فضای فشرده به روی یک فضای هاسدورف، همسانریختی است.

برهان . ر. ک. به [۲۸]، قضیه‌ی ۴.۴.۱. □

تعریف ۱۳.۱.۱ یک n—**حجره**، حجره‌ی n—بعدی، مانند e^n، یک نسخه‌ی همسانریخت با گوی باز $D^n - S^{n-1}$ است.

مثال ۱۴.۱.۱ فضای $int(\mathbb{I}^n)$ که در آن $\mathbb{I}^n$ مکعب n—بعدی واحد است یک n—حجره است.

تعریف ۱۵.۱.۱ فضای X را با **بعد متناهی** گوییم هرگاه عدد صحیحی مانند m موجود باشد به طوریکه برای هر پوشش باز X مانند $\mathcal{A}$ پوشش بازی برای X مانند $\mathcal{B}$ موجود باشد که تظریفی از $\mathcal{A}$ با مرتبه‌ی حداکثر $m + 1$ باشد. این عدد با نماد $dimX$ نمایش داده می شود.

قضیه ۱۶.۱.۱ هر فضای متریک و تفکیک‌پذیر مانند X که در شرط $0 \leq dim(X) \leq n$ صدق کند در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^{2n+1}$ می‌نشیند.

برهان . ر. ک. به [۸]، قضیه‌ی ۴.۱۱.۱. □

قضیه ۱۷.۱.۱ فرض کنید $f : X \to Y$ نگاشتی بسته، فضای X نرمال و فضای Y متریک باشد. در این صورت داریم

$$dim(X) \leq sup\{dim(f^{-1}(y))|\ y \in Y\} + \ dim(Y)$$

برهان . ر. ک. به [۲۹]، نتیجه‌ی ۲.۲۱. □

تعریف ۱۸.۱.۱ هر فضای متریک، فشرده و همبند، **پیوستار** و هر پیوستارِ همبند موضعی **پیوستار پئانو** خوانده می‌شود.

مثال ۱۹.۱.۱ گوشواره‌ی هاوایی n—بعدی، $n \geq 1$، یک پیوستار پئانو است.

قضیه ۲۰.۱.۱ هر فضای هاسدورف، تصویر پیوسته‌ی بازه‌ی واحد است اگر و تنها اگر پیوستار پئانو، یعنی متریک، فشرده، همبند و همبند موضعی باشد.

برهان . ر. ک. به [۱۳]، بخش ۵.۳. □

تعریف ۲۱.۱.۱ نگاشت f از پیوستار X به پیوستار Y **یکنوا** خوانده می‌شود، اگر هر تار آن همبند باشد. منظور از تار نقطه‌ی $y \in Y$، مجموعه‌ی تصویر وارون $f^{-1}(y)$ است.

تعریف ۲۲.۱.۱ نگاشت f از پیوستار X به پیوستار Y **ملایم** خوانده می‌شود، اگر هر تار آن صفربعدی باشد.

قضیه ۲۳.۱.۱ (**تجزیه‌ی یکنوا– ملایم**) برای هر نگاشت بین فضاهای پیوستار مانند $f : X \to Y$، یک فضای پیوستار مانند Z، یک نگاشت یکنوا و برو مانند $m : X \to Z$ و یک نگاشت ملایم مانند $l : Z \to Y$ وجود دارد که $f = l \circ m$.

برهان . ر.ک. به[۳۳]، صفحه‌ی ۱۴. □

تعریف ۲۴.۱.۱ فرض کنید B و E دو فضای هاسدورف باشند، Y یک فضای ثابت و $p : E \to B$ یک نگاشت پیوسته و برو باشد. همچنین فرض کنید برای هر $x \in B$ همسایگی V و همسانریختی $\sigma_x : V \times Y \to p^{-1}(V)$ موجود است که برای هر $(x, y) \in V \times Y$ تساوی $p \circ \sigma_x(x, y) = x$ برقرار باشد. در این صورت $p : E \to B$ را یک **کلاف بدیهی موضعی** می‌نامیم.

قضیه ۲۵.۱.۱ (**خاصیت بالابر هموتوپی**) فرض کنید $p : E \to B$ یک کلاف بدیهی موضعی باشد و نگاشت $F_0 : \mathbb{I}^n \to B$ همراه با بالابر $g : \mathbb{I}^n \to E$ و هموتوپی $F : \mathbb{I}^n \times \mathbb{I} \to B$ مفروض باشد که $F(-, 0) = F_0$. در این صورت هموتوپی $G : \mathbb{I}^n \times \mathbb{I} \to E$ وجود دارد به طوری که $p \circ G = F$ و $G(-, 0) = g$. به‌علاوه اگر نگاشت F هموتوپی نقطه‌ای باشد، هموتوپی G نیز نقطه‌ای است.

برهان . ر.ک. به[۲۸]، قضیه‌ی ۱.۴.۲. □

۲.۱ جبر

تعریف‌های نظریه‌ی گروه‌ها در این بخش از مرجع [۹] برگرفته شده است.

لم ۱.۲.۱ فرض کنید I یک مجموعه‌ی شبه مرتب (یک مجموعه با رابطه‌ی ترتیب بازتابی و ترایایی) باشد. در این صورت $\mathcal{I}$ با ساختار زیر یک رسته است.

۱− هر عنصر I یک شئ در $\mathcal{I}$ است.

۲− برای هر دو عنصر $i, j \in I$، اگر $i \leq j$ مجموعه‌ی $Hom(i,j)$ را برابر با مجموعه‌ی تک‌عضوی $\{p_j^i\}$ در نظر می‌گیریم که به معنای وجود رابطه‌ی $i \leq j$ است. در غیر این صورت $Hom(i,j)$ را برابر با مجموعه‌ی تهی تعریف می‌کنیم که به معنای نبود رابطه‌ی $i \leq j$ است.

۳− اگر $i \leq k \leq j$، آن‌گاه ترکیب $p_j^k \circ p_k^i$ برابر با p_j^i است. در این حالت منظور از نماد p_k^i وجود رابطه‌ی $i \leq k$ و منظور از نماد p_j^k وجود رابطه‌ی $k \leq j$ است، ترکیب آن‌ها به معنای ترایایی در رابطه‌ی ترتیب است و تساوی آن با p_j^i نمادی از حصول رابطه‌ی $i \leq j$ از دو رابطه‌ی قبل است.

برهان . ر. ک. به [۳۰]، تمرین ۹.۰. □

تعریف ۲.۲.۱ فرض کنید I یک مجموعه‌ی شبه مرتب، $\mathcal{I}$ رسته‌ی لم ۱.۲.۱ و $\mathcal{C}$ یک رسته‌ی دلخواه باشد. در این صورت یک **دستگاه مستقیم** در $\mathcal{C}$، یک تابعگون هموردا مانند $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ است.

به بیان دقیق‌تر برای هر $i \in I$، شیئی از $\mathcal{C}$ مانند F_i موجود است و برای هر $i, j \in I$، اگر $i \leq j$، ریخت $\varphi_j^i : F_i \to F_j$ وجود دارد به طوری که؛

۱− ریخت φ_i^i، برای هر $i \in I$، ریخت همانی است و

۲− اگر $i \leq k \leq j$، آن‌گاه $\varphi_j^k \circ \varphi_k^i = \varphi_j^i$.

تعریف ۳.۲.۱ فرض کنید $F = \{F_i, \varphi_j^i\}$ یک دستگاه مستقیم در رسته‌ی $\mathcal{C}$ باشد. **حد مستقیم** این دستگاه یک شئ مانند A در $\mathcal{C}$ همراه با خانواده‌ای از ریخت‌ها مانند $\{\varphi^i : F_i \to A\}$ است به طوری که:

۱– برای هر $i, j \in I$، اگر $i \leq j$، آن‌گاه $\varphi^i = \varphi^j \circ \varphi^i_j$،

۲– برای هر شیئ مانند X در $\mathcal{C}$ همراه با خانواده‌ی ریخت‌های $\{f^i : F_i \to X\}$ با شرط $f^j \circ \varphi^i_j = f^i$، وقتی $i \leq j$، ریخت یکتای $f : A \to X$ موجود باشد که برای هر $i \in I$، تساوی $f \circ \varphi^i = f^i$ برقرار باشد.

حد مستقیم دستگاه مستقیم $F = \{F_i, \varphi^i_j\}$ را با نماد $\varinjlim F_i$ نشان می‌دهند.

مثال ۴.۲.۱ فرض کنید $\{(X_k, x_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ یک خانواده از فضاهای توپولوژیک نقطه‌دار باشد و برای هر $m, m' \in \mathbb{N}$، نگاشت شمول $i^m_{m'} : \bigvee_{k\leq m} X_k \to \bigvee_{k\leq m'} X_k$ وقتی $m \leq m'$ مفروض باشد. در این صورت دستگاه $\{\bigvee_{k\leq m} X_k, i^{m'}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ یک دستگاه مستقیم است، به علاوه فضای $X = \bigvee_{k\in\mathbb{N}} X_k$ همراه با خانواده‌ی نگاشت‌های شمول $\{i^m : \bigvee_{k\leq m} X_k \to X\}_{m\in\mathbb{N}}$ حد مستقیم این دستگاه است.

برای اثبات این مطلب فرض کنید Y یک فضای دلخواه باشد و نظیر هر $m \in \mathbb{N}$، نگاشت پیوسته‌ی $f^m : \bigvee_{k\leq m} X_k \to Y$ موجود باشد که برای هر $m, m' \in \mathbb{N}$، با شرط $m \leq m'$، تساوی زیر برقرار است

$$f^{m'} \circ i^m_{m'} = f^m.$$

نگاشت $f : X \to Y$ را با ضابطه‌ی $f|_{X_k} = f^k|_{X_k}$، برای هر $k \in \mathbb{N}$ تعریف می‌کنیم. بنابر لم ۶.۱.۱، فضای X نسبت به خانواده‌ی $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ توپولوژی ضعیف دارد. چون برای هر $k \in \mathbb{N}$، $f|_{X_k} = f^k|_{X_k}$ و نگاشت f^k پیوسته است، نگاشت $f|_{X_k}$ پیوسته است. حال با استفاده از لم ۷.۱.۱ نگاشت f پیوسته خواهد بود.

اکنون نشان می‌دهیم برای هر $m \in \mathbb{N}$، نگاشت f در تساوی $f \circ i^m = f^m$ صدق می‌کند. با توجه به تعریف f، برای هر $m \in \mathbb{N}$ داریم $f|_{X_m} = f^m|_{X_m}$. بنابراین روی نقاط X_m، تساوی برقرار است. حال فرض کنید $k < m$ باشد، داریم $f|_{X_k} = f^k|_{X_k}$. حال با استفاده از گزاره‌ی $f^m \circ i^k_m = f^k$، تساوی $f^m|_{X_k} = f^k|_{X_k}$ به دست می‌آید. بنابراین برای هر $k \leq m$ تساوی $f|_{X_k} = f^m|_{X_k}$ برقرار است. در نتیجه گزاره‌ی $f|_{\bigvee_{k\leq m} X_k} = f^m$ درست است و هم‌ارز با آن گزاره‌ی $f \circ i^m = f^m$ نیز درست است.

قضیه ۵.۲.۱ حد مستقیم هر دستگاه مستقیم از گروه‌های آبلی به عنوان $\mathbb{Z}-$مدول وجود دارد.

برهان . ر. ک. به [۳۱]، قضیه‌ی ۱۶.۲. $\square$

تعریف ۶.۲.۱ فرض کنید I یک مجموعه‌ی شبه مرتب، $\mathcal{I}$ رسته‌ی لم ۱.۲.۱ و $\mathcal{C}$ یک رسته‌ی دلخواه باشد. در این صورت یک **دستگاه معکوس** در $\mathcal{C}$، یک تابعگون پادورد مانند $G : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ است.

به بیان دقیق‌تر برای هر $i \in I$، شیئی از $\mathcal{C}$ مانند G_i موجود است و برای هر $i, j \in I$، اگر $j \geq i$، ریخت $\psi_i^j : G_j \to G_i$ وجود دارد به طوری که؛

۱$-$ ریخت ψ_i^i، برای هر $i \in I$، ریخت همانی است و

۲$-$ اگر $j \geq k \geq i$، آن‌گاه $\psi_i^k \circ \psi_k^j = \psi_i^j$.

تعریف ۷.۲.۱ فرض کنید $G = \{G_i, \psi_i^j\}$ یک دستگاه معکوس در رسته‌ی $\mathcal{C}$ باشد. **حد معکوس** این دستگاه یک شئ مانند B در $\mathcal{C}$ همراه با خانواده‌ای از ریخت‌ها مانند $\{\psi_i : B \to G_i\}$ است، به طوری که:

۱$-$ برای هر $i, j \in I$، اگر $j \geq i$، آن‌گاه $\psi_i^j \circ \psi_j = \psi_i$،

۲$-$ برای هر شئ مانند X در $\mathcal{C}$ همراه با خانواده‌ی ریخت‌های $\{g_i : X \to G_i\}$ با شرط $\psi_i^j \circ g_j = g_i$، وقتی $j \geq i$، ریخت یکتای $g : X \to B$ موجود باشد که $\psi_i \circ g = g_i$.

حد معکوس دستگاه معکوس $G = \{G_i, \psi_i^j\}$ را با نماد $\varprojlim G_i$ نشان می‌دهند.

مثال ۸.۲.۱ فرض کنید $\{(X_k, x_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ یک خانواده از فضاهای توپولوژیک نقطه‌دار باشد و برای هر $m, m' \in \mathbb{N}$، نگاشت انقباضی $r_m^{m'} : \bigvee_{k \leq m'} X_k \to \bigvee_{k \leq m} X_k$ وقتی $m' \geq m$ مفروض باشد. در این صورت دستگاه $\{\bigvee_{k \leq m} X_k, r_m^{m'}\}_{m \in \mathbb{N}}$ یک دستگاه معکوس است. به علاوه فضای $X = \widetilde{\bigvee}_{k \in \mathbb{N}} X_k$ همراه با خانواده‌ی نگاشت‌های انقباضی $\{r_m : X \to \bigvee_{k \leq m} X_k\}_{m \in \mathbb{N}}$ حد معکوس این دستگاه است.

برای اثبات این مطلب فرض کنید Y یک فضای دلخواه باشد و نظیر هر $m \in \mathbb{N}$، نگاشت

پیوسته‌ی $g_m : Y \to \bigvee_{k\leq m} X_k$ موجود باشد که برای هر $m, m' \in \mathbb{N}$، با شرط $m' \geq m$، تساوی زیر برقرار است.

$$r_m^{m'} \circ g_{m'} = g_m$$

نگاشت $g : Y \to X$ را به صورت زیر در نظر بگیرید، برای هر $k \in \mathbb{N}$،

$$g|_{g_k^{-1}(X_k - \{x_k\})} = g_k|_{g_k^{-1}(X_k - \{x_k\})}$$

و در سایر نقاط برابر با x_* تعریف می‌کنیم. نشان می‌دهیم g خوش‌تعریف است، برای این منظور فرض کنید برای $k' > k$ داریم

$$g_k^{-1}(X_k - \{x_k\}) \cap g_{k'}^{-1}(X_{k'} - \{x_{k'}\}) \neq \emptyset$$

در این صورت $y \in Y$ موجود است که $g_k(y) \in X_k - \{x_k\}$ و $g_{k'}(y) \in X_{k'} - \{x_{k'}\}$. با توجه به این که داریم $r_k^{k'} \circ g_{k'} = g_k$، می‌توان نتیجه گرفت که $g_k(y) = x_*$. این نتیجه با این که $g_k(y) \in X_k - \{x_k\}$ متناقض است. بنابراین برای هر نقطه از فضای Y، نگاشت g به طور یکتا تعریف شده است.

اینک نشان می‌دهیم نگاشت g پیوسته است. فرض کنید $U \subseteq X$ مجموعه‌ی باز دلخواهی باشد که شامل نقطه‌ی x_* نیست. بنابراین به صورت اجتماع زیر است،

$$U = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} U \cap (X_k - \{x_k\}).$$

تساوی بالا برای تصویر وارون این مجموعه‌ها منجر به تساوی زیر می‌شود،

$$g^{-1}(U) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} g^{-1}(U \cap (X_k - \{x_k\})).$$

با رجوع به تعریف نگاشت g روی مجموعه‌ی $g_k^{-1}(X_k - \{x_k\})$، درمی‌یابیم که دو مجموعه‌ی $g_k^{-1}(X_k - \{x_k\})$ و $g^{-1}(X_k - \{x_k\})$ برابر هستند و در نتیجه

$$g^{-1}(U) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} g_k^{-1}(U \cap (X_k - \{x_k\})).$$

برای هر $k \in \mathbb{N}$، مجموعه‌ی $U \cap X_k$ در فضای X_k باز است. چون U شامل نقطه‌ی x_* نیست، توپولوژی فضای X ایجاب می‌کند، مجموعه‌ی $U \cap X_k$ در فضای X باز باشد. مجموعه‌ی $g_k^{-1}(U \cap X_k)$ تصویر وارون یک مجموعه‌ی باز توسط یک نگاشت پیوسته است و بنابراین در فضای Y باز است. در نتیجه مجموعه‌ی $g^{-1}(U)$ که اجتماع این مجموعه‌های باز است، نیز باز باشد.

برای ادامه‌ی اثبات ابتدا نشان می‌دهیم، برای هر نقطه‌ی $y \in Y$، داریم $g(y) = x_*$ اگر و تنها اگر برای هر $k \in \mathbb{N}$، $g_k(y) = x_*$. برای این منظور فرض کنید y نقطه‌ی دلخواه و ثابتی در فضای Y باشد که $g(y) = x_*$، در این صورت با توجه به تعریف نگاشت g، برای هر $k \in \mathbb{N}$، خواهیم دید $y \notin g_k^{-1}(X_k - \{x_k\})$. اکنون با استفاده از این نتیجه به استقرا نشان می‌دهیم برای هر $k \in \mathbb{N}$، تساوی $g_k(y) = x_*$ برقرار است.

اگر $k = 1$، آن‌گاه بنا بر این که $y \notin g_1^{-1}(X_1 - \{x_1\})$ و $Im(g_1) = X_1$ داریم $g_1(y) = x_*$. حال فرض کنید برای عدد طبیعی $k = m$ حکم برقرار باشد، یعنی $g_m(y) = x_*$. می‌خواهیم نشان دهیم $g_{m+1}(y) = x_*$، به برهان خلف فرض کنید چنین نباشد. در این صورت چون $g_m(y) = x_*$، عضویت $g_{m+1}(y) \in X_{m+1} - \{x_{m+1}\}$ برقرار است که با نتیجه‌ی ذکرشده تناقض دارد. بنابراین حکم استقرا برقرار است.

بالعکس فرض کنید برای هر $k \in \mathbb{N}$، تساوی $g_k(y) = x_*$ برقرار باشد، در این صورت روشن است که $y \notin g_k^{-1}(X_k - \{x_k\})$. نگاشت g به گونه ای است که در این حالت در نقطه‌ی y برابر با x_* تعریف می‌شود. اکنون ادعای دوشرطی مذکور ثابت شد.

اینک فرض کنید U مجموعه‌ی بازی در فضای X باشد که شامل نقطه‌ی x_* نیز هست. نشان می‌دهیم در این صورت تساوی $g^{-1}(U) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} g_k^{-1}(U)$ برقرار است.

فرض کنید y نقطه‌ی دلخواهی از مجموعه‌ی $g^{-1}(U)$ در فضای Y باشد. اگر $g(y) = x_*$، آن‌گاه برای هر $k \in \mathbb{N}$، $g_k(y) = x_*$. در نتیجه برای هر $k \in \mathbb{N}$، داریم $y \in g_k^{-1}(U)$. اگر $g(y) \neq x_*$، آن‌گاه عددی طبیعی مانند m موجود است که $g_m(y) \neq x_*$. پس عددی طبیعی مانند k می‌توان یافت که $g_k(y) \in X_k - \{x_k\}$. بنابر تعریف g، در این صورت $g(y) = g_k(y)$ و چون $g(y) \in U$ نتیجه می‌شود که $y \in g_k^{-1}(U)$.

حال فرض کنید $k \in \mathbb{N}$ دلخواه و ثابت و y نقطه‌ی دلخواهی از مجموعه‌ی $g_k^{-1}(U)$ در فضای Y باشد. مشابه روند بالا ثابت می‌شود $y \in g^{-1}(U)$ که نتیجه می‌دهد $g^{-1}(U) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} g_k^{-1}(U)$. مؤلفه‌های این اجتماع باز هستند، بنابراین مجموعه‌ی $g^{-1}(U)$ در فضای Y باز است.

در نتیجه g پیوسته است.

در پایان نشان می‌دهیم نگاشت g در شرط حد معکوس صدق می‌کند.