دانشکده‌ی ریاضی

گروه ریاضی محض

**پایان نامه**
**برای دریافت درجه کارشناسی ارشد**
**ریاضی محض/آنالیز**

عنوان:

# خاصیت نقطه ثابت ضعیف نیم گروههایی از نگاشتهای ناانبساطی

استاد راهنما:

**دکتر سید محمد مشتاقیون**

استاد مشاور:

**سید محمد صادق مدرس مصدق**

پژوهش‌گر:

**فاطمه هنزایی نژاد**

**مهر ۱۳۹۰**

# قدردانی و تشکر

پس از حمد و سپاس از قادر بی‌همتا بر خود لازم می‌دانم از تمام کسانی که در راه علم و دانش مرا یاری نموده‌اند کمال تشکر را داشته باشم. بخصوص از جناب آقای دکتر سید محمد مشتاقیون، برترین استاد دوران تحصیلم، که راهنمایی پایان‌نامه مرا متقبل شدند و در این راه دلسوزانه مرا یار و یاور بودند، بی‌نهایت سپاس‌گزارم و خدا را شاکرم که افتخار شاگردی ایشان را به من عطا نمود.

از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر سید محمد صادق مدرس مصدق که مشاوره این پایان‌نامه را عهده‌دار شدند و از راهنمائیهای ارزنده خود مرا بهره‌مند نمودند، نهایت سپاس را دارم. از جناب آقای دکتر اکبر دهقان‌نژاد و جناب آقای دکتر علی دلاور خلفی که داوری این پایان‌نامه را قبول کردند کمال تشکر را دارم. همچنین از دوستان عزیزم که خاطرات دوران تحصیل با ایشان بودن را به شیرین‌ترین و جاودانه‌ترین لحظات تبدیل کرد، سپاس‌گزارم.

از خانواده و همسر عزیزم که همیشه طی طریق تحصیل را برایم سهل نمودند، کمال تشکر را دارم. در پایان از خالق یکتا توفیق روزافزون همه این عزیزان را خواهانم.

# چکیده

در این پژوهش به بررسی خواص نقطه ثابت برای نیم‌گروههای چپ معکوس پذیر در $L^1$–فضاهای وابسته به جبرهای وان–نیومن می‌پردازیم. به‌خصوص کلاس همه عملگرهای کلاس اثر، همچنین جبرهای باناخ وابسته به گروه‌های به‌طور موضعی فشرده مورد توجه قرار می‌گیرند. برای رسیدن به این منظور ابتدا در فصل اول خاصیت نقطه ثابت و ساختارهای نرمال و نرمال ضعیف در فضاهای باناخ و در نیم‌گروه‌های چپ معکوس‌پذیر را مطرح کرده و به‌اختصار به مبحث عملگرهای کلاس–اثر و جبرهای وان–نیومن می‌پردازیم. در فصل دوم به اثبات چند قضیه مهم مربوط به دنباله‌های به‌طور مجزا محمل‌دار می‌پردازیم و با استفاده از آن‌ها ثابت می‌کنیم که عملگرهای کلاس–اثر خاصیت نقطه ثابت ضعیف ستاره برای نیم‌گروه‌های چپ معکوس‌پذیر دارد. در فصل سوم ابتدا تعاریف و قضایای مربوط به جبرهای فوریه وفوریه اشتیلیس رابیان می‌کنیم و سپس شرایط لازم وکافی برای این‌که جبرهای فوریه و فوریه اشتیلیس خاصیت نقطه ثابت ضعیف برای نیم‌گروه‌های چپ معکوس‌پذیر داشته باشند را به‌دست می‌آوریم. در فصل چهارم مفهوم توپولوژی اندازه برای عملگرهای اندازه‌پذیر را معرفی کرده و در پایان خواهیم دید که یک زیر مجموعه محدب و کراندار از $L^1$– فضاهای وابسته به جبرهای وان–نیومن که نسبت به توپولوژی اندازه فشرده است، خاصیت نقطه ثابت برای نیم‌گروههای چپ معکوس‌پذیر را دارد.

# فهرست مطالب

# فصل ۱

# مفاهیم مقدماتی و پیش‌نیازها

# مقدمه

در این فصل سعی بر آن است که با آوردن تعاریف وبعضی قضایای مورد استفاده در این پژوهش، خواننده رابا موضوع مورد نظر آشناتر می‌کنیم. برای رسیدن به این منظور در بخش اول خواص نقطه ثابت در فضاهای باناخ را مطرح نموده، سپس در بخش دوم ساختار نرمال و خاصیت کادک-کلی یکنواخت را مطرح کرده و ارتباط آن‌ها را با خاصیت نقطه ثابت بیان می‌کنیم. در بخش سوم و چهارم از این فصل به معرفی عملگرهای کلاس-اثر و جبرهای وان-نیومن می‌پردازیم. در پایان در بخش پنجم اشاره مختصری به خاصیت نقطه ثابت برای نیم‌گروه‌های چپ معکوس‌پذیر می‌نماییم. قابل ذکر است که در سراسر این متن فضای باناخ را با $X$، اعداد حقیقی رابا $\mathbb{R}$، اعداد مختلط را با $\mathbb{C}$، اعداد طبیعی را با $\mathbb{N}$ ،فضای هیلبرت را با $H$، عملگرهای کراندار را با $B(H)$ و عملگرهای فشرده را با $K(H)$ نمایش می‌دهیم. همچنین فرض بر آن است که خواننده با مفاهیم اولیه آنالیز حقیقی و تابعی آشناست.

## ۱.۱ مقدمه‌ای بر خواص نقطه ثابت در فضاهای باناخ

در این بخش ابتدا مفاهیم مقدماتی نگاشت لیپشیتسی[۱] ، نگاشت انقباض و نگاشت ناانبساطی را تعریف کرده و سپس قضایای نقطه ثابت نسبت به این نگاشتها را بیان می‌کنیم.

**تعریف ۱.۱.۱.**
فرض کنید $T$ نگاشتی از مجموعه $X$ به توی خودش است. نگاشت $T$ دارای نقطه ثابت است اگر $x_\circ \in X$ وجود داشته باشد به‌طوری که $Tx_\circ = x_\circ$ باشد. به نقطه $x_\circ$ با این خاصیت، نقطه ثابت نگاشت $T$ گوییم. مجموعه همه نقاط ثابت $T$ را با $Fix(T)$ نمایش می‌دهیم.

**مثال ۲.۱.۱.**
فرض کنید $X = c_\circ$ نمایش فضای باناخ همه دنباله‌های اسکالری همگرا به صفر است و تعریف کنید:

[۱] Lipschitzian

$$T : c_\circ \longrightarrow c_\circ$$

$$Tx = T(x_1, x_2, ...) = (x_1, 1 - |x_1|, x_2, ...)$$

در این‌صورت $\{Fix(T) = \{(1, \circ, ...), (-1, \circ, ...)\}\}$.

درحقیقت اگر $(x_n)$ عضوی از $c_\circ$ باشد، $\lim_{n\to\infty} x_n = \circ$. لذا

$$T(x_1, x_2, ...) = (x_1, x_2, ...) \Longleftrightarrow (x_1, 1 - |x_1|, x_2, ...) = (x_1, x_2, ...)$$

$$\Longleftrightarrow x_2 = x_3 = ... = \circ, \quad |x_1| = 1$$

بنابراین $Fix(T) = \{(1, \circ, ...), (-1, \circ, ...)\}$.

**تعریف ۳.۱.۱.**

فرض کنید $(M, d)$ یک فضای متریک است. نگاشت $T : M \longrightarrow M$ لیپشیتسی است اگر ثابت $\alpha \geq \circ$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای همه $x, y \in M$،

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y).$$

کوچکترین $\alpha$ ای که به‌ازای آن رابطه بالا برقرار باشد، ثابت لیپشیتس نگاشت $T$ نامیده می‌شود و با $L$ نمایش می‌دهیم. نگاشت $T : M \longrightarrow M$ را انقباض گوییم، هرگاه $\circ \leq \alpha < 1$ موجود باشد که برای هر $x, y \in M$،

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y).$$

نگاشت $T : M \longrightarrow M$ را ناانبساطی گوییم، هرگاه برای هر $x, y \in M$،

$$d(T(x), T(y)) \leq d(x, y).$$

مشهورترین قضیه نقطه ثابت در فضاهای متریک، قضیه نگاشت انقباض باناخ است که به‌صورت زیر مطرح می‌شود.

**قضیه ۴.۱.۱.**

*اگر $(M, d)$ یک فضای متریک تام و $T : M \longrightarrow M$ نگاشت انقباض باشد، آن‌گاه $T$ یک نقطه ثابت منحصربه‌فرد $x_\circ$ دارد. به‌علاوه برای هر $x \in M$، دنباله تکراری پیکارد[2] $\{T^n(x)\}$ به $x_\circ$ همگرا است. به‌عبارت دیگر*

$$lim_{n\to\infty} T^n(x) = x_\circ.$$

[2] Picard

***اثبات.*** به مرجع [۳] رجوع کنید. □

نظریه نگاشت‌های ناانبساطی به‌طور اساسی متفاوت از نگاشت‌های انقباض است و قضیه بالا برای نگاشت‌های ناانبساطی لزوماً برقرار نیست. برای مثال حتی اگر یک نگاشت ناانبساطی $T$ مجموعه نقطه ثابت ناتهی $Fix(T)$ داشته باشد روش تکرار پیکارد ممکن است همگرا نباشد. همچنین $Fix(T)$ لازم نیست دقیقاً شامل یک نقطه باشد. به‌عنوان مثال نگاشت $T$ روی $\mathbb{R}$ به‌صورت $T(x) = x + ۱$ در نظر بگیریم، $T$ نگاشت ناانبساطی در فضای متریک تام $\mathbb{R}$ است، در حالی‌که دارای نقطه ثابت نمی‌باشد.
قبل از این‌که خاصیت نقطه ثابت در فضاهای باناخ را مطرح کنیم قضیه براور[۳] را بیان می‌کنیم.

**قضیه ۵.۱.۱.** (*براور*)
*اگر $K$ زیر مجموعه بسته، محدب و کراندار از $\mathbb{R}^k$ و $T : K \longrightarrow K$ نگاشت پیوسته باشد. آن‌گاه $T$ دارای نقطه ثابت است.*

***اثبات.*** به مرجع [۳] رجوع کنید. □

**نتیجه ۶.۱.۱.**
*اگر $K$ یک زیرمجموعه ناتهی، محدب و فشرده از فضای نرمدار با بعد متناهی $X$ باشد و $T : K \longrightarrow K$ یک تابع پیوسته باشد، آن‌گاه $T$ یک نقطه ثابت در $K$ دارد.*

شودر[۴] قضیه براور را گسترش داد تا نتیجه را برای هر مجموعه محدب و فشرده در هر فضای باناخ به‌دست آورد:

**قضیه ۷.۱.۱.** (*شودر*)
*برای هر زیر مجموعه ناتهی، محدب و فشرده $K$ از یک فضای باناخ هر نگاشت ناانبساطی $T : K \longrightarrow K$ دارای نقطه ثابت است.*

***اثبات.*** به مرجع [۱] رجوع کنید. □

حال یک سؤال مطرح می‌شود که آیا هر نگاشت ناانبساطی $T$ روی هر زیر مجموعه ناتهی، محدب، بسته وکراندار (یا فشرده ضعیف) از یک فضای باناخ نقطه ثابت دارد؟
در سال ۱۹۶۵ براودر[۵] ثابت کرد که این حدس زمانی که $X$ فضای هیلبرت باشد درست است [۵]. اما مثال زیر نشان می‌دهد که قضیه براور در حالت کلی در فضاهای باناخ درست نیست:

---
[۳] Brouwer
[۴] Schauder
[۵] Browder

**مثال ۸.۱.۱.**
اگر $B_x$، گوی یکه فضای باناخ همه دنباله‌های اسکالری همگرا به صفر $c_0$ باشد و نگاشت $T : B_x \longrightarrow B_x$ با رابطه زیر تعریف شود:

$$T(x_1, x_2, ...) = (1, x_1, x_2, ...)$$

در این صورت نگاشت $T$ گوی یکه را به مرزش می‌برد و یک نگاشت ناانبساطی است زیرا برای هر $x, y \in B_x$، $\|Tx\|_\infty = 1$ و

$$\|Tx - Ty\| = \|x - y\|$$

همچنین نگاشت $T$ نقطه ثابت ندارد. زیرا اگر فرض کنیم نگاشت $T$ دارای نقطه ثابت باشد آن‌گاه $(x_1, x_2, x_3, \cdots) \in c_0$ وجود دارد به قسمی‌که

$$T(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (1, x_1, x_2, \cdots)$$

درنتیجه

$$(1, x_1, x_2, \cdots) = (x_1, x_2, x_3, \cdots)$$

بنابراین

$$(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (1, 1, \cdots)$$

عضوی از مجموعه $c_0$ نیست پس $T$ فاقد نقطه ثابت است.

در سال ۱۹۸۰ آلسپاخ[۶]یک مثال از یک زیر مجموعه محدب وفشرده ضعیف $K$ از $L^1[0, 1]$ و یک یکریختی طولپا $T : K \longrightarrow K$ ارائه داد به‌طوری‌که نقطه ثابت ندارد **[۲]**.
بحث بالا منجر به تعریف زیر می‌شود.

**تعریف ۹.۱.۱.**
فرض کنیم $X$ یک فضای باناخ و $K \subseteq X$ زیر مجموعه ناتهی، محدب، بسته و کراندار از$X$ است. گوییم $K$ خاصیت نقطه ثابت دارد هرگاه هر نگاشت ناانبساطی $T : K \longrightarrow K$ نقطه ثابت داشته باشد.

**تعریف ۱۰.۱.۱.**
فضای باناخ $X$ خاصیت نقطه ثابت دارد هرگاه هر زیر مجموعه ناتهی، محدب، بسته و کراندار $K$ از $X$ خاصیت نقطه ثابت داشته باشد و اگر هر زیر مجموعه ناتهی، محدب و فشرده ضعیف $K$ از $X$ خاصیت نقطه ثابت داشته باشد، گوییم $X$ دارای خاصیت نقطه ثابت ضعیف است.

[۶] Alspach

به‌عنوان مثال بنا به نتیجه (۶.۱.۱) فضاهای باناخ با بعد متناهی خاصیت نقطه ثابت دارند. همچنین فضای $c_\circ$ خاصیت نقطه ثابت ضعیف را دارد [۲۳]، اما آن خاصیت نقطه ثابت را ندارد زیرا اگر در مثال (۸.۱.۱)، مجموعه $K$ را به صورت

$$K = B_{c_\circ} = \{(x_n) \in c_\circ \quad : \quad \circ \leq x_n \leq \text{۱}\}$$

و نگاشت $T$ را همان نگاشت مثال در نظر بگیریم دراین صورت $T$ نگاشت ناانبساطی است که نقطه ثابت ندارد.
به‌عنوان مثالی دیگر، فضای $l^{\text{۱}}$ نیز خاصیت نقطه ثابت ضعیف را دارد [۲۷]، ولی خاصیت نقطه ثابت ندارد [۱۸].
قضیه زیر نشان می‌دهد که فضاهای باناخ به‌طور یکنواخت محدب حاوی خاصیت نقطه ثابت هستند.

**قضیه ۱۱.۱.۱.** (*براودر و گود*)
*هر فضای باناخ به‌طور یکنواخت محدب، خاصیت نقطه ثابت دارد.*

***اثبات***. به مرجع [۱] رجوع کنید. □

یادآور می‌شویم که فضای باناخ $X$ به‌طور یکنواخت محدب است هرگاه برای هر $\varepsilon > \circ$، $\delta(\varepsilon) > \circ$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $x, y \in X$ که $\|x\| \leqslant \text{۱}$، $\|y\| \leqslant \text{۱}$ و $\|x - y\| > \varepsilon$ باشند، آن‌گاه $\|\frac{x+y}{\text{۲}}\| < \text{۱} - \delta(\varepsilon) < \text{۱}$.

**مثال ۱۲.۱.۱.**
هر فضای هیلبرت $H$، یک فضای به‌طور یکنواخت محدب است.

***اثبات***. رابطه متوازی‌الاضلاع در فضای هیلبرت را برای هر $x, y \in H$ در نظر می‌گیریم:

$$\|x + y\|^{\text{۲}} = \text{۲}(\|x\|^{\text{۲}} + \|y\|^{\text{۲}}) - \|x - y\|^{\text{۲}}.$$

حال اگر $x, y \in H$ درنظر بگیریم به‌طوری‌که $\|x\| \leqslant \text{۱}$، $\|y\| \leqslant \text{۱}$ و $\|x - y\| > \varepsilon$، آن‌گاه

$$\|x + y\|^{\text{۲}} \leq \text{۴} - \varepsilon^{\text{۲}}$$

بنابراین نتیجه می‌شود،

$$\|\frac{x+y}{\text{۲}}\| \leq \text{۱} - \delta(\varepsilon) < \text{۱}$$

که $\delta(\varepsilon) = \text{۱} - \sqrt{\text{۱} - \frac{\varepsilon^{\text{۲}}}{\text{۴}}}$.
بنابراین $H$ به‌طور یکنواخت محدب است. □

**مثال ۱.۱.۱۳.**
فضای $l^p$ (با فرض $1 < p < \infty$)، یک فضای باناخ به‌طور یکنواخت محدب است. بنابراین آن دارای خاصیت نقطه ثابت هست.

***اثبات.*** به مرجع [۱] رجوع کنید. □

## ۲.۱ ساختار نرمال و ساختار نرمال ضعیف در فضاهای باناخ

در این بخش مفهوم ساختار نرمال ضعیف و ساختار نرمال ضعیف ستاره را معرفی کرده و مثالها و قضیه‌هایی را در مورد آن‌ها بیان می‌کنیم.

**تعریف ۱.۲.۱.**
اگر $K$ یک زیر مجموعه‌ی محدب وکراندار از فضای باناخ $X$ باشد آن‌گاه نقطه $x$ از $K$ را یک نقطه قطری گوییم هرگاه:

$$sup\{\|x-y\| : y \in K\} = diam(K),$$

که در آن $diam(K)$ نمایش قطر مجموعه $K$ است. هر نقطه $x \in K$ که قطری نباشد را غیر قطری گوییم.

**مثال ۲.۲.۱.**
هر نقطه از مرز گوی یکه بسته از صفحه $\mathbb{R}^2$ یک نقطه قطری آن و هر نقطه از درون آن، نقطه غیر قطری است.

**تعریف ۳.۲.۱.**
زیرمجموعه ناتهی و محدب $K$ از فضای باناخ $X$ ساختار نرمال دارد اگر هر زیر مجموعه محدب و کران‌دار $F$ از $K$ با حداقل دو نقطه، شامل یک نقطه غیر قطری باشد.

به تعبیر هندسی، $K$ دارای ساختار نرمال است اگر برای هر زیر مجموعه محدب و کراندار $F$ از$K$ با $diam(F) > 0$، نقطه $x_0 \in F$ و $r < diam(F)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $F \subset B_r(x_0)$. (در اینجا $B_r(x_0)$ گوی به مرکز $x_0$ و شعاع $r$ می‌باشد.)

**تعریف ۴.۲.۱.**
فضای باناخ $X$ ساختار نرمال دارد اگر هر زیر مجموعه محدب، بسته و کراندار $K$ از $X$ حداقل دو عضو ساختار نرمال داشته باشد. همچنین فضای باناخ $X$ ساختار نرمال ضعیف دارد اگر هر زیر مجموعه محدب و فشرده ضعیف از $X$ با حداقل دو عضو ساختار نرمال داشته باشد.

**تعریف ۵.۲.۱.**
فضای باناخ دوگان $X$ ساختار نرمال ضعیف ستاره دارد هرگاه هر زیر مجموعه محدب و $w^*$-فشرده از $X$ با حداقل دو عضو ساختار نرمال داشته باشد.

**مثال ۶.۲.۱.**
فضاهای با خاصیت شور، یعنی فضاهای باناخی که همگرایی دنباله‌ای ضعیف بر همگرایی نرمی

منطبق است، با بعد نامتناهی، ساختار نرمال ندارند [۱۴].
در حالت خاص فضای دنباله‌ای $l^{1}$ متشکل از همه دنباله‌های اسکالری مطلقاً جمع‌پذیر، ساختار نرمال ندارد. اما فضای $l^{1}$ ساختار نرمال ضعیف ستاره دارد[۲۷].

**قضیه ۱.۲.۷.**
*اگر $X$ یک فضای باناخ و $K$ یک زیر مجموعه محدب و فشرده از $X$ باشد آن‌گاه $K$ ساختار نرمال دارد.*

به عنوان مثال فضاهای باناخ با بعد متناهی ساختار نرمال دارند [۱].

**قضیه ۱.۲.۸.** (*کرک*[۷])
*اگر $X$ فضای باناخ و $K$ یک زیر مجموعه ناتهی، محدب و فشرده ضعیف از $X$ با ساختار نرمال باشد، آن‌گاه $K$ خاصیت نقطه ثابت دارد.*

***اثبات***. به مرجع [۱] رجوع کنید. □

**نتیجه ۱.۲.۹.**
*بنا به قضیه (کرک) هر فضای باناخ که ساختار نرمال ضعیف داشته باشد، خاصیت نقطه ثابت دارد [۱۴]. و همچنین هر فضای باناخ که ساختار نرمال ضعیف ستاره داشته باشد، خاصیت نقطه ثابت ضعیف ستاره نیز دارد [۱۴].*

در پایان این بخش خاصیت کادک-کلی[۸] یکنواخت و کادک-کلی یکنواخت ضعیف ستاره را معرفی کرده و ارتباط آن را با ساختارهای نرمال و خواص نقطه ثابت بیان می‌کنیم.

**تعریف ۱.۲.۱۰.**
فضای باناخ $X$ خاصیت کادک-کلی یکنواخت (به‌اختصار $UKK$) دارد هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$، یک $0 < \delta < 1$ موجود باشد به‌طوری‌که اگر $(x_n)$ یک دنباله دلخواه در گوی یکه $X$ باشد که به‌طور ضعیف به $x$ همگرا شود و $\inf\{\|x_n - x_m\| : n \neq m\} \geq \varepsilon$، آن‌گاه $\|x\| \leqslant 1 - \delta$.

**مثال ۱.۲.۱۱.**
فضای $l^{1}$ خاصیت کادک-کلی یکنواخت دارد زیرا هر دنباله همگرای ضعیف $(x_n)$ در $l^{1}$ نرم همگراست. لذا کشی است و $\inf\{\|x_n - x_m\| : n \neq m\} = 0$. در حالت کلی‌تر فضاهای با خاصیت شور خاصیت کادک-کلی یکنواخت دارند.

---

[۷] Kirk

[۸] Kadec-Klee

**قضیه ۱.۲.۱۲.**
*اگر فضای باناخ $X$ خاصیت کادک-کلی یکنواخت داشته باشد، آن‌گاه $X$ ساختار نرمال ضعیف دارد و بنابراین خاصیت نقطه ثابت دارد.*

***اثبات.*** به مرجع [۴۱] رجوع کنید. □

**مثال ۱.۲.۱۳.**
چون فضای $l_1$ خاصیت کادک-کلی یکنواخت دارد درنتیجه ساختار نرمال ضعیف دارد.

**تعریف ۱.۲.۱۴.**
فضای باناخ دوگان $X^*$ از $X$ خاصیت کادک-کلی یکنواخت ضعیف ستاره دارد (به‌اختصار $UKK^*$) . هرگاه برای $\varepsilon > 0$، یک $0 < \delta < 1$ موجود باشد به‌طوری‌که اگر $(x_n)$ یک دنباله در گوی یکه $X^*$ باشد که به‌طور ضعیف ستاره به $x$ همگرا شود و $\inf\{\|x_n - x_m\| : n \neq m\} \geq \varepsilon$ باشد، آن‌گاه $\|x\| \leqslant 1 - \delta$.

**مثال ۱.۲.۱۵.**
فضای $\mathcal{T}(H)$ متشکل از فضای همه عملگرهای کلاس-اثر روی فضای هیلبرت $H$، خاصیت کادک-کلی یکنواخت ضعیف ستاره دارد. این فضا در بخش ۳.۱ به تفضیل معرفی خواهد شد [۲۴].

**قضیه ۱.۲.۱۶.**
*اگر فضای باناخ $X$ خاصیت کادک-کلی یکنواخت ضعیف ستاره داشته باشد، آن‌گاه $X$ ساختار نرمال ضعیف ستاره دارد و در نتیجه خاصیت نقطه ثابت ضعیف ستاره دارد. بنابراین $\mathcal{T}(H)$، خاصیت نقطه ثابت ضعیف ستاره دارد.*

***اثبات.*** به مرجع [۲۴] رجوع کنید. □

## ۳.۱ عملگرهای کلاس-اثر

در ابتدای این بخش عملگر مثبت و همچنین اثر روی عملگر $T$ راتعریف کرده و سپس عملگرهای کلاس-اثر را معرفی نموده و قضایای مربوط به آن را بیان می‌کنیم.
در سراسر این متن متناظر به هر فضای هیلبرت $H$، نمادهای $B(H)$ و $K(H)$ به‌ترتیب نمایش فضای باناخ همه عملگرهای کراندار و همه عملگرهای فشرده روی $H$ است.

**تعریف ۱.۳.۱.**
عملگر $T$ روی فضای هیلبرت را خودالحاق گوییم، هرگاه $T^* = T$ که در آن $T^*$ نمایش الحاقی عملگر $T$ است و عملگر خودالحاق $T$ را مثبت گوییم، هرگاه برای هر $x \in H$،

$$\langle Tx, x\rangle \geqslant 0$$

و با نماد $T \geq 0$ نمایش می‌دهیم. اگر $S,T \in B(H)$ باشد، گوییم $S \leq T$ هرگاه $T - S \geq 0$.

**قضیه ۲.۳.۱.**
*فرض کنید $H$ یک فضای هیلبرت است. در این صورت:*

*الف) برای هر عملگر دلخواه $T \in B(H)$، $T^*T \geq 0$*

*ب) برای هر عملگر مثبت $T \in B(H)$،عملگر مثبت $S \in B(H)$ موجود است به‌طوری‌که $S^2 = T$.*

*به عملگر $S$ مذکور، جذر عملگر $T$ گفته و با نماد $S = T^{1/2}$ نمایش می‌دهیم. همچنین اگر $T \in B(H)$ عملگر دلخواهی باشد، عملگر مثبت $|T|$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

$$|T| = (T^*T)^{1/2}.$$

**تعریف ۳.۳.۱.**
فرض کنید $H$ یک فضای هیلبرت و $T \in B(H)$ و $T \geq 0$ ، اثر $T$ رابه صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$tr(T) = \Sigma_i \langle Te_i, e_i\rangle.$$

که در آن $\{e_i\}_{i\in I}$ یک پایه متعامد یکه برای $H$ است. همچنین برای هر عملگر دلخواه $T \in B(H)$، تعریف می‌کنیم:

$$\|T\|_1 = tr(|T|).$$

اگر $\|T\|_1 < \infty$ باشد،$T$ را یک عملگر کلاس-اثر گوییم و رده همه عملگرهای کلاس اثر روی فضای هیلبرت $H$ را با $\mathcal{T}(H)$نمایش می دهیم.

**قضیه ۱.۳.۴.**
*اگر $H$ یک فضای هیلبرت باشد آن‌گاه:*

۱ . *برای هر عملگر $T \in B(H)$، $tr(T)$ مستقل از انتخاب پایه است.*

۲ . *برای هر $S \in B(H)$،*

$$tr(SS^*) = tr(S^*S).$$

۳ . *برای هر $S, T \geq \circ$ و هر $\lambda \geq \circ$،*

$$tr(S + \lambda T) = tr(S) + \lambda tr(T).$$

۴ . *به ازای هر $S, T \in B(H)$ اگر $\circ \leq S \leq T$، آن‌گاه $\circ \leq tr(S) \leq tr(T)$.*

***اثبات.*** به مرجع [۴] رجوع کنید. □

**قضیه ۱.۳.۵.**
*اگر $H$ یک فضای هیلبرت و $\phi$ یک تابعک خطی کراندار روی فضای باناخ $K(H)$ متشکل از همه عملگرهای فشرده روی $H$ باشد، آن‌گاه عملگر منحصر بفردی مانند $S \in \mathcal{T}(H)$ موجود است به‌طوری‌که به ازای هر $T \in K(H)$، $\phi(T) = tr(ST)$. به‌علاوه $\|\phi\| = \|S\|_\text{۱}$. به عبارت دیگر فضای باناخ دوگان $K(H)$ به صورت طولپا با $\mathcal{T}(H)$ یکریخت است.*

***اثبات.*** به مرجع [۴] رجوع کنید. □

**قضیه ۱.۳.۶.**
*اگر $H$ یک فضای هیلبرت و $\phi$ یک تابعک خطی کراندار روی فضای باناخ $\mathcal{T}(H)$ باشد، آن‌گاه یک عملگر منحصر به‌فرد $S \in B(H)$ وجود دارد، به‌طوری‌که به ازای هر $T \in \mathcal{T}(H)$، $\phi(T) = tr(ST)$ و به‌علاوه $\|\phi\| = \|S\|$. به‌عبارت دیگر دوگان $\mathcal{T}(H)$ به‌طور طولپا با $B(H)$ یکریخت است.*

***اثبات.*** به مرجع [۴] رجوع کنید. □

## ۴.۱ جبرهای وان-نیومن

در این بخش با تعریف جبر باناخ و $C^*$-جبر به معرفی جبر وان-نیومن[۹] می‌پردازیم و سپس اثر روی جبر وان-نیومن را بیان کرده و $L^1$-فضای تعویض‌ناپذیر مربوط به $(M,\tau)$ را تعریف می‌کنیم.

**تعریف ۱.۴.۱.**
یک جبر باناخ $A$، جبری است که تحت نرمی با خاصیت زیر ضربی $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$، برای هر $x,y \in A$ یک فضای باناخ نیز است.

**تعریف ۲.۴.۱.**
یک برگشت در جبر باناخ $A$، یک خودریختی مزدوج خطی از مرتبه دو است که با $x \longmapsto x^*$ نمایش می‌دهیم. به عبارت دیگر برای $x,y \in A$ و هر اسکالر $\lambda \in \mathbb{C}$،

الف) $(x+y)^* = x^* + y^*$

ب) $(xy)^* = y^*x^*$

ج) $(\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*$

د) $(x^*)^* = x$

**تعریف ۳.۴.۱.**
یک $*$- جبر باناخ، یک جبر باناخ است که مجهز به یک برگشت باشد. و یک $*$- جبر باناخ $A$ که برای هر $x \in A$، در شرط $\|x^*x\| = \|x\|^2$ صدق کند، یک $C^*$ -جبر نامیده می‌شود.

**مثال ۴.۴.۱.**
برای هر فضای هیلبرت $H$، هر یک از دو فضای باناخ $B(H)$ و $K(H)$ همراه با برگشت الحاقی عملگری، یک $C^*$-جبر است. همچنین اگر $H$ یک فضای $n$-بعدی باشد، فضای همه ماتریسهای $n \times n$، $M_n = B(\mathbb{C}^n)$، یک $C^*$-جبر با برگشت معمولی (مزوج ترانهاده) و نرم عملگری است.

***اثبات.*** به مرجع [۴] رجوع کنید. □

قبل از این‌که قضیه بعدی را بیان کنیم، یادآور می‌شویم که توپولوژی عملگر ضعیف $WOT$، کوچکترین توپولوژی روی $B(H)$ است که تحت آن همه نگاشتهای $T \longmapsto \langle Tx, y\rangle$ برای هر $x,y \in H$ پیوسته‌اند. و توپولوژی عملگری قوی $SOT$ کوچکترین توپولوژی روی $B(H)$ است

[۹] Von Neumann

که تحت آن همه نگاشتهای
$\|Tx\| \longmapsto T$ برای هر $x \in H$ پیوسته باشند. همچنین

$$A^{'} = \{S \in B(H);\ ST = TS,\ \forall\, T \in A\}.$$

**قضیه ۱.۴.۵.** (*جابجاگر مضاعف*)
*اگر $A$، $C^*$- زیر جبر یکداری از $B(H)$ باشد آن‌گاه،*

$$SOT - clA = WOT - clA = A''.$$

*که در آن $A'' = (A')'$ جابجاگر مضاعف است.*

***اثبات.*** به مرجع [۹] رجوع کنید. □

**تعریف ۱.۴.۶.**
یک جبر وان-نیومن $M$، $C^*$-زیرجبریکداری از $B(H)$ است که نسبت به توپولوژی عملگری ضعیف بسته باشد.

**قضیه ۱.۴.۷.**
*$C^*$-زیر جبر $M$ از $B(H)$ یک جبر وان-نیومن است اگر و فقط اگر دارای پیش‌دوگان منحصر به‌فرد باشد. یعنی فضای باناخ $M_*$ موجود باشد که $(M_*)^* = M$.*

**تعریف ۱.۴.۸.**
اگر $M$ یک جبر وان-نیومن و $M'$ جابجاگر آن باشد و همچنین $M = M'$، آن‌گاه $M$ را جبر وان-نیومن آبلی گوییم.

**مثال ۱.۴.۹.**
میدان اعداد مختلط ساده‌ترین مثال از جبر وان-نیومن است.

**مثال ۱.۴.۱۰.**
اگر $(X, \Omega, \mu)$ یک فضای اندازه $\sigma$-متناهی و $\Phi \in L^\infty(\mu)$ باشد، عملگر ضربی $M_\phi$ روی $H = L^2(\mu)$ را به صورت $M_\Phi f = \Phi f$ تعریف می‌کنیم. اگر

$$A_\mu = \{M_\Phi\ :\ \Phi \in L^\infty(\mu)\}$$

فضای همه عملگرهای ضربی روی $H = L^2(\mu)$ باشد، آن‌گاه $A'_\mu = A_\mu = A''_\mu$.
بنابراین $A_\mu \subseteq B(L^2(\mu))$ یک جبر وان-نیومن آبلی است که پیش‌دوگان آن $L^1(\mu)$ است.

**مثال ۱۱.۴.۱.**
$B(H)$ یک جبر وان-نیومن است و پیش‌دوگان آن فضای باناخ $\mathcal{T}(H)$ متشکل از همه عملگرهای کلاس-اثر با نرم $\|A\|_{۱} = tr(|A|)$ می‌باشد. همچنین$\mathcal{T}(H)$ فضای همه عملگرهای کلاس- اثر، یک جبر وان-نیومن است و پیش دوگان آن فضای $K(H)$ می‌باشد.

**تعریف ۱۲.۴.۱.**
اگر $M$ یک جبر وان-نیومن و $M_+$ نمایش فضای همه عناصر مثبت $M$ باشد، یک اثر روی $M$ به‌صورت نگاشت $\tau : M_+ \longrightarrow [۰,\infty]$ است که در شرایط زیر صدق کند

الف) برای هر $x, y \in M_+$ و هر اسکالر نامنفی $\lambda \in \mathbb{R}_+$، $\tau(x+\lambda y) = \tau(x) + \lambda\tau(Y)$.

ب) برای هر $x \in M$، $\tau(x^*x) = \tau(xx^*)$.

**تعریف ۱۳.۴.۱.**
اثر $\tau$ روی جبر وان-نیومن $M$ را نرمال گوییم، هرگاه برای هر تور صعودی کراندار $(x_i)$ در $M_+$ داشته باشیم

$$\sup \tau(x_i) = \tau(\sup_i x_i).$$

**تعریف ۱۴.۴.۱.**
اثر $\tau$ را صادق گوییم هرگاه $\tau(x) = ۰$ ایجاب کند که $x = ۰$.

**تعریف ۱۵.۴.۱.**
اثر $\tau$ را نیم‌متناهی گوییم، هرگاه برای هر$x \in M_+$ ناصفر، یک $y \in M_+$ ناصفر وجود داشته باشد، به‌طوری‌که $y \leq x$ و $\tau(y) < \infty$.

**تعریف ۱۶.۴.۱.**
فرض کنید $M$ یک جبر وان-نیومن و $\tau$ یک اثر نرمال نیم‌متناهی روی $M$ باشد. عملگر $s(\tau)$ روی $M$ را یک تصویر مرکزی گوییم هرگاه با هر عضو $M$ جابجا شود. همچنین $s(\tau)$ را یک تصویر محمل‌دار از $\tau$ گوییم، هرگاه $s(\tau)$ یک تصویر مرکزی در $M$ باشد، به‌طوری‌که $\tau$ روی $(I - s(\tau))M^+$ صفر شود و همچنین $\tau$ روی $s(\tau)M$ صادق باشد.

**قضیه ۱۷.۴.۱.**
*فرض کنیم $\tau$ یک اثر نرمال نیم متناهی روی $M$ و $s(\tau)$ تصویر محمل‌داری از $\tau$ است. اگر $J_\tau$ و $M_\tau$ را به صورت زیر تعریف کنیم:*

$$J_\tau = \{A \in s(\tau)M;\ \tau(A^*A) < \infty\}$$