

Handwritten Arabic calligraphy in black ink on a white background. The text is written in a cursive style, likely representing the name 'Abdullah' (عبدالله). The main body of the text is a thick, dark stroke that curves from the left towards the right. Above this main stroke, there are several smaller, more intricate strokes that form the letters 'Abdullah'. Below the main stroke, there are several small, dark, teardrop-shaped marks that appear to be decorative or part of the calligraphic style. The overall composition is centered horizontally and vertically.



دانشگاه صنعتی (نوشروانی) بابل

دانشکده علوم پایه

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد در رشته فیزیک

موضوع:

جفت شدگی امواج لانگمیر و یون صوتی در پلاسما

استاد راهنما:

دکتر حسن علی نژاد

استاد راهنما :

دکتر علی بنی جمالی

نام دانشجو:

محبوبه مهدوی

بهمن ماه ۹۲

تقدیم به مهربان فرشتگانی که:

لحظات ناب باور بودن، لذت و غرور دانستن، جسارت خواستن، عظمت رسیدن و تمام تجربه‌های یکتا و زیبای زندگی، مدیون حضور سبز آنهاست.

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

سپاس

پروردگار یکتا را که هستی مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمونمان شد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت.

با تشکر از

استاد صبور و با تقوا جناب آقای دکتر حسن علی نژاد که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند.

و با تشکر از جناب آقای دکتر علی بنی جمالی که کمک شایانی در این تحقیق داشته اند.

چکیده

یک اثر غیرخطی معروف که بر انتشار امواج در محیط‌های پاشنده غیرخطی حاکم است، ناپایداری مدولاسیونی است. در این پژوهش، ناپایداری مدولاسیون امواج غبار صوتی که ناشی از خود مدولاسیون موج حامل غبار صوتی می‌باشد را در یک پلاسمای غبارآلود گرم غیرمغناطیسی با حضور یون‌های غیرحرارتی مورد مطالعه قرار دادیم. روش استاندارد اختلال مقیاس زمانی چندگانه برای مطالعه این مکانیسم به کار برده شد و با استفاده از این تکنیک یک نوع معادله شرودینگر را که تحول کند دامنه موج را در فضا و زمان نشان می‌دهد بدست آوردیم. که در آن ضرائب پاشندگی و غیرخطی به پارامترهای فیزیکی α (غیرحرارتی)، σ_d (دمای ذرات غبار)، β (نسبت چگالی تعادلی الکترون به یون) و σ (نسبت دمای یون به الکترون) بستگی دارند. با استفاده از رابطه بدست آمده پایداری مدولاسیون موج را تعیین و محدوده‌ی وقوع هر دو پوش جایگزیده تاریک و روشن را نشان دادیم. دمای ذرات غبار، چگالی الکترون‌های آزاد تعادلی و یون‌های غیرحرارتی تغییرات قابل توجهی را بر روی ناحیه پایداری مدولاسیون این پوش موج داشته‌اند. با حضور یون‌های غیرحرارتی در پلاسمای انتشار امواج سالیتون پایدار باقی می‌ماند. همچنین نشان داده شد که الکترون‌های آزاد تعادلی ناحیه پایداری مدولاسیون را محدود می‌کند. در نتیجه تخلیه الکترون‌های آزاد پس زمینه در طول فرایند باردار شدن می‌تواند ناحیه پایداری مدولاسیون را پهن‌تر کند. اثر دمای ذرات غبار موجب محدود شدن ناحیه پایداری مدولاسیون می‌شود و بر شکل‌گیری پوش سالیتون جایگزیده اثر مخرب دارد. نتایج بدست آمده در این مطالعه می‌تواند در هر سیستم پلاسمای فضایی و آزمایشگاهی که در آنها یونها از توزیع غیرحرارتی پیروی می‌کنند بکار برده شوند.

واژه‌های کلیدی

ناپایداری مدولاسیون، روش اختلال مقیاس زمانی چندگانه، امواج غبار صوتی، یون‌های غیرحرارتی.

فهرست مطالب

عنوان

صفحه

فصل اول- مقدمه

- ۱-۱- تعریف پلاسما..... ۱
- ۱-۱-۱- تعریف پلاسماهای تعادلی و غیر تعادلی ۲
- ۲-۱- امواج خطی و غیرخطی ۵
- ۳-۱- امواج در پلاسما ۹
- ۱-۳-۱- امواج لانگمیر ۱۰
- ۲-۳-۱- امواج یون صوتی ۱۲
- ۳-۳-۱- امواج غبار صوتی ۱۴
- ۴-۱- معادلات غیرخطی حاکم بر انتشار امواج ۱۶
- ۱-۴-۱- معادله کورتوگ-دوریز ۱۷
- ۲-۴-۱- معادله شرودینگر غیرخطی ۲۰

فصل دوم- جفت شدگی امواج و ناپایداری مدولاسیون

- ۱-۲- ناپایداری مدولاسیون ۲۳
- ۲-۲- پوش سالیتون لانگمیر ۲۷
- ۳-۲- سالیتون لانگمیر در سرعت‌های نزدیک به سرعت صوت ۳۳
- ۴-۲- خود مدوله شدن یک موج حامل ۳۸
- ۱-۴-۲- روش اختلال مقیاس زمانی چندگانه ۴۰
- ۲-۴-۲- بررسی دقت جواب روش اختلال مقیاس زمانی چندگانه ۴۲

فصل سوم- تحول امواج مدوله شده غبار صوتی

- ۱-۳- معادلات حاکم بر انتشار امواج غبار صوتی ۴۵
- ۲-۳- تعیین رابطه پاشندگی با استفاده از روش اختلال مقیاس زمانی چندگانه ۵۱
- ۳-۳- تعیین معادله شرودینگر غیرخطی ۵۵
- ۴-۳- ناپایداری مدولاسیون و تعیین آهنگ رشد ۶۰

۶۲..... ۳-۵- پوش سالیتون.....

۶۳..... ۳-۵-۱- پوش سالیتون روشن.....

۶۴..... ۳-۵-۲- پوش سالیتون تاریک.....

۶۵..... ۳-۵-۱- پوش سالیتون خاکستری.....

فصل چهارم- بحث و نتیجه گیری

۶۸..... ۴-۱- نتایج.....

۷۵..... ۴-۲- نتیجه گیری کلی.....

۷۷..... مراجع.....

فهرست شکل ها

عنوان	صفحه
شکل ۱-۱ نمایش توزیع سرعت ماکسولی	۳
شکل ۲-۱ تغییرات تابع توزیع غیرحرارتی بر حسب سرعت برای مقادیرهای مختلف α	۵
شکل ۳-۱ نمایش داستی پلاسما	۱۴
شکل ۴-۱ انتشار سالیتون ها بعد از گذشت زمان	۱۸
شکل ۵-۱ برهم کنش دو سالیتون	۱۸
شکل ۱-۲ نمایش ناپایداری مدولاسیونی	۲۵
شکل ۲-۲ نمایش یک پوش سالیتون	۲۶
شکل ۳-۲ فرایند کولاپس	۲۸
شکل ۴-۲ سالیتون لانگمیر	۳۸
شکل ۵-۲ نمایش مدولاسیون موج یون صوتی	۳۸
شکل ۶-۲ تحول زمانی ناپایداری مدولاسیون یک موج یونی سیکلوترونی	۳۹
شکل ۷-۲ مقایسه جواب اختلال مقیاس زمانی چندگانه (u) و u_2 (مربوط به بسط تا مرتبه دوم ϵ) با جواب دقیق u_{exact} برای $\epsilon = 0.4$	۴۳
شکل ۱-۳ تغییرات فرکانس بر حسب عدد موج برای α های مختلف	۵۵
شکل ۲-۳ نمایش پوش سالیتون روشن (جواب های دقیق معادله شرودینگر غیر خطی برای $PQ > 0$)	۶۴
شکل ۳-۳ نمایش پوش سالیتون تاریک (جواب های دقیق معادله شرودینگر غیر خطی برای $PQ < 0$)	۶۵
شکل ۴-۳ نمایش پوش سالیتون خاکستری	۶۷
شکل ۱-۴ نمودار نسبت P/Q بر حسب عدد موج برای α های مختلف	۷۰
شکل ۲-۴ تغییرات میزان ناپایداری مدولاسیون بر حسب عدد موج برای α های مختلف	۷۱
شکل ۳-۴ نمودار نسبت P/Q بر حسب عدد موج برای β های مختلف	۷۲
شکل ۴-۴ تغییرات میزان ناپایداری مدولاسیون بر حسب عدد موج برای β های مختلف	۷۳
شکل ۵-۴ نمودار نسبت P/Q بر حسب عدد موج برای σ_r های مختلف	۷۴

شکل ۴-۶ تغییرات میزان ناپایداری مدولاسیون بر حسب عدد موج برای σ_h های مختلف.....۷۵

فصل اول

مقدمه

در این فصل، ابتدا به معرفی پلاسما می‌پردازیم سپس توصیف نسبتاً کاملی از امواج خطی، غیرخطی و نیز انتشار امواج در پلاسما ارائه می‌دهیم و در پایان به معرفی معادلات حاکم بر انتشار امواج غیرخطی خواهیم پرداخت.

۱-۱ تعریف پلاسما

پلاسما به گاز یونیده شده‌ای گفته می‌شود که همه یا بخش قابل توجهی از اتم‌های آن یک یا چند الکترون از دست داده و به یون‌های مثبت تبدیل شده است. در سال ۱۸۷۹ فیزیکدان انگلیسی سر ویلیام کروکس^۱، هنگام بررسی ویژگی‌های ماده در تخلیه الکتریکی پیشنهاد کرد که این گازها حالت چهارم ماده هستند.

در حالت‌های جامد، مایع و گاز، دما را می‌توان از روی دامنه‌ی حرکت (سرعت نوسان) ذرات سازنده ماده تعریف کرد اما در حالت پلاسما، دما از روی میزان جدایی یون‌های مثبت از الکترون‌ها تعریف می‌شود. اغلب گفته می‌شود در حدود ۹۹٪ ماده موجود در طبیعت در حالت پلاسماست، یعنی به شکل گاز بارداری که اتم‌هایش به یون‌های مثبت و الکترون منفی تجزیه شده باشد. این تخمین هر چند ممکن است خیلی دقیق نباشد ولی تخمین معقولی از این واقعیت است که درون ستارگان و جو آن‌ها، ابرهای گازی و اغلب هیدروژن فضای بین ستارگان به صورت پلاسماست. در نزدیکی ما، هنگامی که جو زمین را ترک می‌کنیم بلافاصله با پلاسمایی مواجه می‌شویم که شامل کمربندهای تشعشعی وان آلن^۲ و بادهای خورشیدی است.

پلاسماها که مشتمل بر ذرات باردار هستند، رفتار جمعی از خود نشان می‌دهند. حرکت بارها، توده‌های متمرکزی از بارهای مثبت یا منفی را به طور موضعی به وجود می‌آورند و بدین ترتیب موجب پیدایش میدان

¹Sir William Crookes

²Van Allen

الکتریکی می‌شود. با حرکت بارها جریان و در نتیجه میدان مغناطیسی هم تولید می‌شود. این میدان‌ها بر حرکت سایر ذرات باردار که دورتر واقع شده‌اند اثر می‌گذارند. جالب‌ترین نتایج، در عمل مربوط به پلاسمای به اصطلاح بی برخورد است. در این پلاسمای، نیروهای مغناطیسی به قدری از نیروهای ناشی از برخوردهای موضعی بزرگترند که می‌توان کلاً از نیروهای برخوردی چشم‌پوشی کرد [۱].

۱-۱-۱ پلاسمای تعادلی و غیرتعادلی

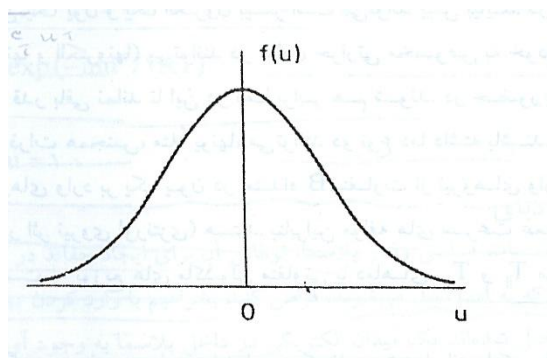
پلاسمای حرارتی با یک تعادل ترمودینامیکی موضعی بین الکترون‌ها و یون‌ها مشخص می‌شوند. تعادل ترمودینامیکی به این معناست که یون‌ها و الکترون‌ها هر کدام توسط یک توزیع ماکسولی و پارامتر یکسان دما توصیف می‌شوند. در این شرایط ماده در تعادل با محیط است و انرژی را با سرعت یکسان تابش و جذب می‌کند. تابع توزیع ماکسولی به شکل زیر می‌باشد [۱]

$$f(u) = A \exp\left(-\frac{u^2}{u_{th}^2}\right) \quad (1-1)$$

که در آن u , u_{th} و f به ترتیب سرعت ذرات، سرعت حرارتی و تعداد ذرات در واحد حجم است که سرعت‌های بین u و $u + du$ دارند. با انتگرال‌گیری تابع توزیع روی فضای سرعت، چگالی ذرات بصورت زیر بدست می‌آید

$$n = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) du \quad (2-1)$$

شکل (۱-۱) نمایش توزیع ماکسولی در فضای سرعت را نشان می‌دهد.



شکل (۱-۱): نمایش توزیع سرعت ماکسولی [۱]

بسیاری از مشاهدات فضایی در دو دهه اخیر، حضور الکترون‌ها و یون‌هایی را نشان می‌دهند که دور از تعادل حرارتی هستند [۵-۲]. این ذرات به علت نیروهای خارجی که بر روی محیط پلاسما اعمال می‌شود و یا بر اثر برهمکنش میان موج و ذره به وجود می‌آیند [۶]. یکی از لایه‌های محافظ زمین موسوم به لایه مگنتوسفر است که اطراف زمین را در زمان گردش به دور خورشید فرا می‌گیرد و باعث می‌شود جریان ذرات خورشیدی منعکس شده و به زمین نرسد. همانطور که مگنتوسفر به سختی در طول فضا حرکت می‌کند یک سری امواج ضربه^۱ ایجاد می‌کند مانند حرکت آب در جلوی کشتی در حال حرکت. جبهه جلویی شاک^۲ در قسمت جلوی این امواج ضربه قرار می‌گیرد. حضور الکترون‌های غیرحرارتی به وسیله ماهواره فرجا^۳ و ویکینگ^۴ [۷ و ۸] و هم چنین حضور یون‌های غیرحرارتی در امواج خمیده^۵ و در محدوده جبهه‌ی جلویی شاک زمین^۶ از طریق ماهواره ولا^۷ [۹] مشاهده شده است. مشاهدات آسپرا^۸ نیز به کمک ماهواره فوبوس^۹ [۱۰]، حضور یون‌های

¹Bow shock

² Foreshock

³Freja

⁴Viking

⁵Earth's bow shock

⁶Earth's foreshock

⁷Vela

⁸Aspera

⁹Phobos

غیرحرارتی را در بالای یونوسفر^۱ سیاره مریخ نشان داده است. چنین یون‌هایی سرعت‌های بالایی دارند و تحت تأثیر نیروی الکتریکی حرکت می‌کنند [۳].

کرنس^۲ و همکارانش نشان دادند که حضور الکترون‌های غیرحرارتی می‌تواند ساختار درونی امواج سالیتون گونه یون صوتی را تغییر دهند [۱۱]. بنابراین در نظر گرفتن اثر تابع توزیع مؤلفه‌های پلاسما بر روی امواج و ناپایداری‌هایی که حالت‌های پلاسمایی دور از تعادل ترمودینامیکی را بیان می‌کنند، از اهمیت زیادی برخوردار می‌باشد. معادله زیر تابع توزیع سرعت یون‌های غیرحرارتی بهنجار شده را در فضای سرعت نشان می‌دهد [۱۱]

$$f(v) = \frac{1}{(1+3\alpha)\sqrt{2\pi}} (1+\alpha v^4) e^{-\frac{v^2}{2}} \quad (3-1)$$

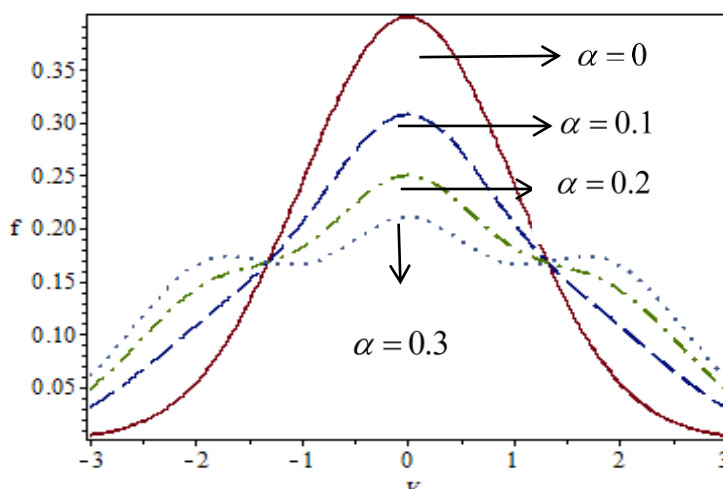
که در آن سرعت v سرعت حرارتی یون بهنجار شده است و α پارامتری است که میزان انحراف از حالت توزیع ماکسولی را نشان می‌دهد. با انتگرال‌گیری از تابع توزیع فوق روی فضای سرعت، چگالی یون‌های غیرحرارتی در حضور پتانسیل الکترواستاتیک ϕ بصورت زیر حاصل می‌شود

$$n_i = (1 + \beta_1 + \beta_1\phi + \beta_1\phi^2 + \dots) e^{-\phi} \quad (4-1)$$

که در آن $\beta_1 = 4\alpha/1+3\alpha$ است و میزان انحراف از حالت ماکسولی را نشان می‌دهد. برای مقادیر خیلی بزرگ α ، β_1 تقریباً $4/3$ می‌باشد و به ازای $\alpha \rightarrow 0$ تابع توزیع غیرحرارتی به سمت تابع توزیع ماکسولی میل می‌کند. شکل (۲-۱) مقایسه توزیع سرعت غیرحرارتی برای مقدارهای مختلف α را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشخص است با افزایش α انحراف از حالت ماکسولی نیز افزایش پیدا می‌کند.

¹ Ionosphere

² Cairns



شکل (۱-۲): تغییرات تابع توزیع غیرحرارتی بر حسب سرعت برای مقادیر مختلف α

۲-۱- امواج خطی و غیر خطی

موج آشفتگی است که نسبت به زمان در محیط با سرعت مشخص انتشار پیدا می‌کند. یک آشفتگی وابسته به زمان اغلب شکل هندسی ناپایداری دارد. برای مثال: انتشار یک پالس صوتی در یک جامد و یا امواج روی سطح آب. انتشار امواج را می‌توان به وسیله‌ی معادلات دیفرانسیل پاره‌ای مدل‌سازی نمود که می‌توانند خطی یا غیرخطی باشند. انواع دیگری از معادلات نیز می‌توانند نشان دهنده انتشار امواج باشند مثل معادلات سهموی که شامل جمله‌های غیرخطی هستند و نقش آنها در مطالعه امواج مهم است. دانستن حل این معادلات، از لحاظ کیفی و کمی بسیار قابل توجه است. اغلب این معادلات از رفتار حدی معادلات مرتبه بالا یا سیستمی از معادلات پیچیده، ناشی می‌شوند [۱۰]. دیدگاه‌های متفاوتی برای بررسی امواج وجود دارد که مهمترین آنها تئوری امواج خطی بر پایه تقریب دامنه کوچک اختلالات می‌باشد، که در آن همه‌ی جمله‌های غیرخطی (یعنی توان‌های درجه دوم یا بالاتر کمیت‌ها و مشتقات آن نادیده گرفته می‌شود). مهم‌ترین مشخصه انتشار امواج در محیط رابطه پاشندگی است که در آن رابطه بین فرکانس و عدد موج بیان می‌شود.

امواج را می‌توان به دو گروه عمده تقسیم کرد. نخستین حالت مربوط به امواج هایپرپولیک است که با معادله دیفرانسیل پاره‌ای هایپرپولیک شناخته می‌شوند. و از طرف دیگر امواجی وجود دارند که به آسانی امواج هایپرپولیک قابل شناسایی نیستند و امواج پاشنده نامیده می‌شوند. امواجی هم وجود دارند که هر دو رفتار در آنها دیده می‌شود. فرمول بندی اصلی امواج هایپرپولیک به صورت زیر نمایش داده می‌شود [۱۲]

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \varphi \quad (5-1)$$

که در اینجا $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ عملگر لاپلاس، t زمان، φ دامنه موج و c ضریبی ثابت برابر سرعت موج است. تعریف دقیقی که برای امواج هایپرپولیک وجود دارد این است که این امواج فقط به شکل معادلات بستگی دارند و مستقل از این موضوع هستند که جواب دقیقی می‌تواند بدست بیاید یا خیر [۱۲]. جواب عمومی

معادله (۵-۱) بصورت زیر نمایش داده می‌شود

$$\varphi = f(\alpha) + g(\beta) = f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t) \quad (6-1)$$

که در اینجا f و g توابع دلخواهی هستند. همانطور که دیده می‌شود، جواب ترکیبی از دو موج است. تابع f که به سمت راست با سرعت c_0 حرکت می‌کند و دیگری تابع g که به سمت چپ حرکت می‌کند. با حفظ تنها یک مؤلفه از معادله (۵-۱) خواهیم داشت

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad (7-1)$$

که c_0 یک مقدار ثابت می‌باشد. با شرایط اولیه $u(x,0) = u_0(x)$ جواب معادله فوق بصورت زیر می‌باشد

$$\varphi(x,t) = f(x - c_0 t) \quad (8-1)$$

x و t به ترتیب مختصات فضائی و زمانی می‌باشند و c_0 بعد سرعت دارد. موجی که بدون تغییر شکل با

سرعت ثابت c انتشار پیدا می کند موج رونده نامیده می شود. $L(\varphi) = 0$ ساده ترین رابطه عملگری برای تابع

$\varphi(x, t)$ در فضای یک بعدی x و t است [۱۰]. با استفاده از مجموعه مفاهیم، هر موج هایپرپولیک در حالت

یک بعد با دامنه A و عدد موج k که با سرعت c حرکت می کند بصورت زیر نمایش داده می شود

$$\varphi = \text{Re}\{A \exp[i(kx - \omega t)]\} \quad (9-1)$$

در رابطه فوق $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ عدد موج و $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$ بسامد زاویه ای است. امواج بلند به k کوچک و امواج کوتاه به

k کوچک مربوط می شوند. نقطه ای از موج با فاز ثابت حرکت می کند که در آن $\left(\frac{d}{dt}\right)(kx - \omega t) = 0$ است و

در نتیجه می توان گفت $\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = V_\phi$ می باشد که این کمیت را سرعت فاز می نامند. در حالی که سرعت گروه،

$V_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$ مربوط به سرعت انتشار انرژی موج می باشد. اگر $\frac{\omega}{k}$ مثبت باشد موج به سمت راست حرکت

می کند، یعنی با افزایش t ، x افزایش می یابد به طوری که $(kx - \omega t)$ ثابت بماند. از طرف دیگر اگر $\frac{\omega}{k}$ منفی

می باشد، موج به سمت چپ حرکت می کند [۱].

از طرف دیگر، فرمولبندی اصلی که معادلات غیرخطی را بیان می کند بصورت زیر نمایش داده می شود

$$\varphi_t + c(\varphi)\varphi_x = 0 \quad \text{مطالعه} \quad (10-1)$$

معادلات مشابه معادله (۱۰-۱)، مفاهیم اصلی امواج هایپرپولیک غیرخطی را بیان می کند که در آن سرعت وابسته

به دامنه موج می باشد. برای معادلاتی با دو متغیر وابسته که معمولاً از بعد مکان و زمان می باشند، سیستم کلی

بصورت زیر در نظر گرفته می شود

$$A_{ij} \frac{\partial \varphi_j}{\partial t} + a_{ij} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + b_i = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (11-1)$$

برای یک سیستم خطی ماتریس A_{ij} و a_{ij} مستقل از سرعت هستند و بردار b_i یک عبارت خطی است و وقتی که A_{ij} ، a_{ij} و b_i تابعی از سرعت باشند ولی مشتقات مستقل از سرعت، به چنین سیستمی شبه خطی (quasi-linear) گفته می‌شود.

از طرفی دیگر امواج پاشنده به سادگی امواج هایپرپولیک دسته بندی نمی‌شوند و شکل این امواج بر مبنای جواب آن است. در یک سیستم پاشنده خطی جواب بصورت زیر نشان داده می‌شود

$$\varphi = a \cos(kx - \omega t) \quad (12-1)$$

که در آن k و ω به ترتیب عدد موج و فرکانس می‌باشند. در سیستم خطی جواب‌های کلی تری نسبت به معادله (12-1) وجود دارد که برهنه‌ی از قطارهای موج با عدد موج مختلف را نشان می‌دهند و بصورت زیر نمایش داده می‌شود

$$\varphi = \int_0^{\infty} f(k) \cos(kx - \omega t) \quad (13-1)$$

تشخیص ساده این امواج، رابطه پاشندگی به شکل $\omega = \omega(k)$ است که رابطه بین فرکانس و عدد موج را بیان می‌کند. اگر سرعت فاز به ازای عدد موج‌های مختلف متفاوت باشد، در اینصورت مدها با عدد موج‌های مختلف، با سرعت‌های مختلفی انتشار پیدا می‌کنند و $\omega'(k)$ ثابت نیست، یعنی $\omega''(k) \neq 0$ می‌باشد که به این حالت پاشندگی می‌گوییم [12]. امواجی هم وجود دارند که هم هایپرپولیک می‌باشند و هم شرط پاشندگی را دارند. برای مثال، معادله کلین - گوردون¹ که به شکل زیر است

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \varphi = 0 \quad (14-1)$$

معادله فوق یک معادله هایپرپولیک است و در عین حال رابطه پاشندگی آن بصورت $\omega^2 = k^2 + 1$ می‌باشد.

¹Klein- Gordon

در رژیم امواج پاشنده غیرخطی، در سال ۱۸۹۴ استوکس برای اولین بار نشان داد که ارتفاع امواج η در عمق

آب برحسب توان‌های دامنه بصورت زیر بسط داده می‌شود [۱۲]

$$\eta = a \cos(kx - \omega t) + \frac{1}{2} k a^2 \cos 2(kx - \omega t) + \frac{3}{8} k^2 a^3 \cos 3(kx - \omega t) + \dots \quad (15-1)$$

که می‌توان رابطه پاشندگی بصورت زیر را برای جواب فوق بدست آورد

$$\omega^2 = gk(1 + k^2 a^2 + \dots) \quad (16-1)$$

در معادله فوق مشاهده می‌شود رابطه پاشندگی خطی برابر با $\omega^2 = gk$ می‌باشد و رابطه پاشندگی امواج

غیرخطی با دامنه‌ای از توان‌های مرتبه بالا دامنه رابطه دارد و در حالت کلی می‌توان بصورت زیر نمایش داد

$$D(\omega, k, a^2) = 0 \quad (17-1)$$

در عبارت فوق می‌توان مشاهده کرد که برخلاف امواج خطی، رابطه پاشندگی امواج غیرخطی به شدت دامنه‌ی موج هم بستگی دارد.

۱-۳- امواج در پلاسما

ذرات باردار در پلاسما کاتوره‌ای حرکت می‌کنند. بسیاری از پدیده‌های جمعی امواج از حرکت منسجم

ذرات پلاسما ناشی می‌شود. اگر در یک پلاسما، الکترون‌ها نسبت به زمینه یکنواخت یونها جا به جا شوند، میدان

های الکتریکی در جهتی به وجود می‌آیند که با برگرداندن الکترون‌ها به مکان‌های اولیه شان، خنثی بودن پلاسما

را مجدداً ایجاد کنند. الکترون‌ها در اثر لختی شان، از وضعیت اولیه آن طرف‌تر رفته و با فرکانس مشخصه‌ای که

به عنوان فرکانس پلاسما شناخته می‌شود نوسان می‌کنند. این نوسان به اندازه‌ای سریع است که یون‌های سنگین

مجال‌ی برای پاسخ گوئی به میدان نوسانی پیدا نمی‌کنند و می‌توان آنها را ثابت در نظر گرفت.

با در نظر گرفتن فرضیات زیر، فرکانس پلاسما ω_p را در ساده‌ترین حالت پیدا خواهیم کرد

- هیچ میدان مغناطیسی وجود ندارد.
- هیچ گونه حرکت حرارتی وجود ندارد ($KT = 0$)
- یون ها با توزیع فضائی یکنواخت ساکن هستند.
- پلاسما ابعاد نامتناهی دارد.
- الکترون ها فقط در امتداد x حرکت می کنند.

در این شرایط فرکانس پلاسما به صورت زیر می باشد [۱]

$$\omega_p = (n_0 e^2 / \epsilon_0 m)^{1/2} \quad (1-18)$$

که در رابطه بالا e ، n_0 و m به ترتیب بار، چگالی و جرم الکترون می باشند. این فرکانس که فقط به چگالی پلاسما بستگی دارد، یکی از پارامترهای اساسی پلاسما است. به علت کوچک بودن m ، فرکانس پلاسما خیلی بالا است. معادله (1-18) نشان می دهد که اگر نوسانی در پلاسما وجود داشته باشد باید فرکانسی داشته باشد که تنها تابعی از n است. در نتیجه ω به k بستگی ندارد، به علاوه سرعت گروه یعنی $\frac{d\omega}{dk}$ صفر است. بنابراین آشفته گی منتشر نمی شود.

۱-۳-۱- امواج لانگمیر^۱

حرکت حرارتی سبب انتشار نوسانات پلاسما می شود. الکترونیایی که با سرعتهای حرارتی به لایه های مجاور پلاسما جریان می یابند، اطلاعاتی درباره آنچه که در منطقه ی نوسان کننده اتفاق می افتد حمل می کنند. این نوسان پلاسمایی را دقیقا یک موج پلاسمایی می نامیم که به آن موج لانگمیر نیز گفته می شود. وجود این

¹ Langmuir