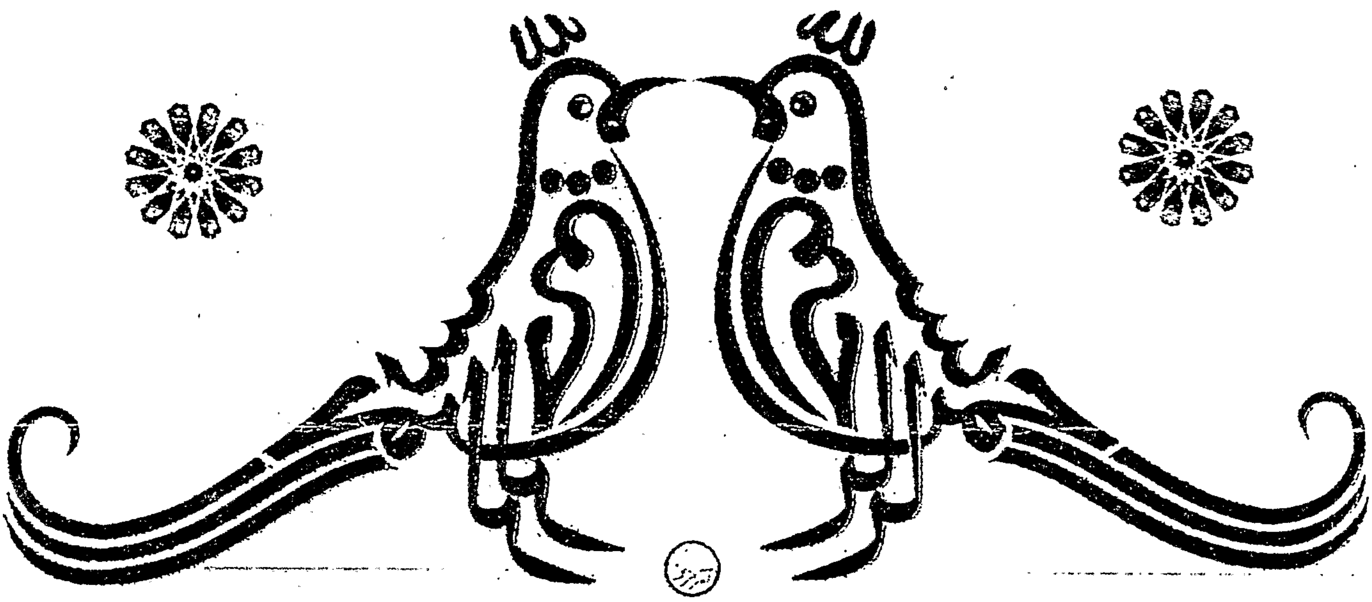
هو الفتاح



دانشگاه ولی‌عصر (عج) رفسنجان

دانشکدهٔ علوم ـ گروه ریاضی

پایان‌نامه تحصیلی

برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد ریاضی محض

عنوان

قابها برای فضاهای باناخ

مؤلف:

محمدرضا مهدوی

استاد راهنما:

دکتر محمدعلی دهقان

تیر ماه ۱۳۸۱

بسمه تعالی

این پایان نامه
به عنوان یکی از شرایط احراز درجه کارشناسی ارشد

به

گروه ریاضی
دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود .

داور ۱ : دکترحسین محبی

داور ۲ : دکترعطاء اله عسکری همت

استاد راهنمای پایان نامه : دکتر محمد علی دهقان

نماینده تحصیلات تکمیلی : دکتر حسن رنجبر عسگری

دانشجو : محمد رضا مهدوی

تقدیم به:

ـــ پدر و مادر عزیز و مهربانم

که بهار عمرشان را وقفم نمودند

و هرچه دارم از آنهاست.

ـــ م.، خ.، ع.، ن.،

که از صمیم قلب دوستشان دارم.

تشکر و قدردانی

حمد و سپاس خداوند متعال را که توفیق گام نهادن در راه مقدس علم و دانش نصیبم فرمود و دلم را توان پذیرش معرفت بخشید. در سایهٔ این نعمتها توانستم از گلستان مطالعات دانش‌پژوهان توشه‌ای گرفته و از خرمن اطلاعاتشان خوشه‌ای برچینم. به مطالعه و تحقیق در دنیای وسیع و ژرف ریاضی پرداخته و رسالهٔ کارشناسی‌ارشدم را تدوین نمایم. در این راستا از استاد راهنمای رساله‌ام، ریاست محترم دانشگاه، جناب آقای دکتر محمدعلی دهقان تشکر دارم که اولین مشوق و راهنمای من در هنر نگارش ریاضی بوده است. لازم می‌دانم که نهایت تشکر و امتنان خود را از ایشان ابراز نمایم.

از اساتید محترم جناب آقایان دکتر حسین محبی و دکتر عطاءالله عسکری‌همت که داوری رساله‌ام را پذیرفته‌اند، صمیمانه تشکر و قدردانی می‌نمایم.

در دوران تحصیلات دانشگاهی‌ام افراد بسیاری به‌طور مستقیم یا غیرمستقیم نقش داشته‌اند. این افراد عبارتند از: دکتر محمدعلی دهقان، دکتر علیرضا بهرام‌پور، دکتر مهدی مصباح، دکتر عطاءالله عسکری‌همت، دکتر محمد ابراهیمی، دکتر امیرخسروی (دانشگاه تربیت معلم)، دکتر سیدمحمد حسینی (دانشگاه تربیت مدرس)، دکتر محمدتقی دیبایی (دانشگاه تربیت معلم)، دکتر رضا جهانی‌نژاد (دانشگاه کاشان)، دکتر خیراله پوربرات (دانشگاه کاشان)، دکتر بهزاد بردبار (دانشگاه شفیلد انگلستان)، پروفسور علی‌اکبر جعفریان (دانشگاه نیوهاون آمریکا)، پروفسور اُل کریستنسن (Ole Christensen) از دانشگاه صنعتی دانمارک، پروفسور پیتر کاساتزا (Peter G. Casazza) از دانشگاه می‌سوری آمریکا و پروفسور کریستوفر هیل (Christopher Heil) از دانشگاه صنعتی جورجیا آمریکا. از همهٔ آنها سپاسگزارم که اگر تذکرات، تشویقات، ارسال مقالات و یاری آنان در مراحل مختلف تحصیلی من نبود، هرگز موفق نمی‌شدم. همچنین، از سرکار خانم زهره اسدی (دانشگاه صنعتی شریف) که با دقت و ظرافت مراحل تایپ رساله را انجام داده‌اند، صمیمانه قدردانی می‌کنم.

آخر از همه، اما نه کمتر از همه، به خانواده‌ام به خاطر آن که بیداری دیرهنگام و غیبت مدام مرا حین تهیهٔ این متن و همچنین در طول دوران تحصیلاتم به ناچار تحمل کرده‌اند، دسته گل رزی تقدیم می‌کنم و مراتب سپاسگزاری و قدردانی خود را از آنها ابراز می‌نمایم.

محمدرضا مهدوی

تیر ماه ۱۳۸۱

چکیده

قسمت اصلی این مقاله سروکار با قابها برای فضاهای باناخ دارد. به این دلیل، از چندین نتیجهٔ بنیادی که قابها برای یک فضای هیلبرت را توصیف می‌کنند استفاده کرده تا قابهای فضای هیلبرت را به فضاهای باناخ کلی تعمیم دهیم. با وجود این، خواهیم دید که همهٔ این تعمیم‌ها (مانند تعمیم استفاده شده حاضر که یک تجزیهٔ اتمی نامیده می‌شود) معادل با خواصی هستند که قبلاً به‌طور مفصل در نظریهٔ فضای باناخ توسعه یافته‌اند. ما نشان می‌دهیم که توصیف اتساع زوجهای قابی برای یک فضای هیلبرت را می‌توان (البته، با تلاش خیلی زیاد) با جایگذاری فضای باناخ عمومیت داد. سرانجام، رابطهٔ بین قابها برای فضاهای باناخ و اشکال مختلف خواص تقریب فضای باناخ را بررسی می‌کنیم.

ما همچنین قابهای فضای هیلبرت را در نظر می‌گیریم. در این حالت، قابهای دوگان متبادل برای یک قاب فضای هیلبرت را توسط یک منیفلد طبیعی از عملگرها روی فضای هیلبرت رده‌بندی می‌کنیم. اغلب خواص پایه‌ای از قابهای دوگان متبادل فوراً از این توصیف پیروی می‌کنند.

در پایان، به یک سوال هان و لارسن با نشان دادن این که زوجهای قاب دوگان تراکمی از پایه ریس و پایه‌های دوگان آنهاست جواب می‌دهیم. همچنین نشان می‌دهیم که یک خانواده از قابها برای فضای هیلبرت یکسان دارای خاصیت اتساع توأم است اگر و تنها اگر دارای پوچی یکسان باشد.

فهرست مطالب

پیش‌گفتار

اگر چه تبدیل فوریه در آنالیز به‌مدت بیش از یک قرن یکی از ابزارهای اساسی بوده و هنوز هم دارای اهمیت و کاربردهای فراوان است، اما دارای نقصان‌هایی برای آنالیز سیگنالها است. بدین‌ترتیب که تبدیل فوریه یک موج اطلاعات مربوط به زمان شروع و پایان سیگنال و نیز برخی از اطلاعات دیگر را مخفی می‌کند. چاره این مشکل استفاده از یک نمایش دیگر است که نسبت به زمان و فرکانس متمرکز شده باشد و در این حالت، این اطلاعات از نمایش مذکور قابل حصول است.

در سال ۱۹۴۶ میلادی گابور[1] این خلاء را پر کرد و شیوه‌ای را پایه‌گذاری نمود که به‌وسیلهٔ آن می‌توان سیگنال را به سیگنالهای مقدماتی تجزیه کرد. با شیوهٔ گابور بلافاصله یک دوره جدید برای آنالیز طیفی مربوط به روشهای زمان-فرکانس شروع شد. امروزه، ایده‌های گابور در مرکز کاربردهای قاب (ویل-هایزنبرگ)[2] قرار دارند. گابور به خاطر کارها و موفقیتهایش در این زمینه موفق به دریافت جایزهٔ نوبل در سال ۱۹۷۱ میلادی شد.

قابها برای فضاهای هیلبرت به‌طور صوری توسط دافین[3] و شیفر[4] در سال ۱۹۵۲ میلادی برای مطالعهٔ برخی مسایل جدی در زمینهٔ آنالیز فوریهٔ غیر هارمونیک تعریف شدند. اساساً دافین و شیفر ایدهٔ اصلی گابور را برای پردازش سیگنالها به شکل مجرد درآوردند. با وجود این به نظر نمی‌رسید که ایده‌های آنها در خارج از زمینهٔ سریهای فوریهٔ غیرهارمونیک به‌کار گرفته شوند تا این‌که مقالهٔ اساسی دوبشی[5]، گراسمان[6] و میر[7] در سال ۱۹۸۶ میلادی منتشر شد [19]. بعد از انتشار این مقالهٔ مهم، مقولهٔ قابها به‌طور گسترده‌ای مورد بررسی قرار گرفت که حاصل آن تشکیل گروههای تحقیقاتی و انتشار مقالات فراوان در این زمینه شد.

در این پایان‌نامه بنا به اهمیت موضوع علاوه بر قابها برای فضاهای هیلبرت، قابها برای فضاهای باناخ مورد مطالعه قرارگرفته است. این مقاله در هشت فصل تدوین شده است که به‌قرار زیر می‌باشد:

فصل اول: در این فصل برخی از مفاهیم و قضایای مربوط به نظریه عملگرها روی فضاهای هیلبرت (باناخ) مد نظر قرارگرفته است. همچنین به‌طور مفصل قضایا و نتایج مربوط به پایه‌های غیرشرطی اثبات شده است.

فصل دوم: در این فصل به‌طورکامل (البته بیش از متن اصلی) قضایا و نتایج مربوط به قابها در

1) Gabor 2) Weyl-Heisenberg 3) Duffin 4) Schaeffer 5) Daubechies 6) Grossmann 7) Meyer

فضاهای هیلبرت مورد بررسی قرارگرفته است. قابها در فضاهای هیلبرت مجموعه‌ای از بُردارهای است که لزومی ندارد مستقل خطی باشند، اما با وجود این با استفاده از این بُردارها می‌توان هر بُردار فضا را به‌راحتی و به شکل کاملاً صریحی نمایش داد.

فصل سوم: در این فصل مفهوم قاب باناخ که اولین بار توسط گروخنیگ[1] ارائه شد را بیان کرده و از روی آن مفهوم جدیدی را به‌نام تجزیه‌های اتمی پایه‌ریزی می‌کنیم. همچنین در این فصل از یک قضیه کلیدی منسوب به پلچینسکی[2] یاد کرده که خود اساس تعریف قاب در یک فضای باناخ خواهد بود.

فصل چهارم: در این فصل قابها برای فضاهای باناخ مورد مطالعه قرارگرفته است. همچنین در این فصل سه فرمول‌بندی از یک قاب برای فضای باناخ را ارائه داده و نشان خواهیم داد که همهٔ این تعاریف، قابهای یکسانی می‌دهند. سرانجام، نشان خواهیم داد که این تعاریف همچنین مربوط به بعضی از اشکال خاصیت تقریب و مطالب مطالعه شده در نظریهٔ فضاهای باناخ در بیست و پنج سال پیش است.

فصل پنجم: در این فصل قابهای دوگان متبادل برای فضاهای باناخ مورد بررسی قرارگرفته است. همچنین در این فصل از یک قضیهٔ مهم یاد می‌کنیم (قضیهٔ ۶.۵) که خود اساس مفهوم خاصیت اتساع در فصل ۸ خواهد بود.

فصل ششم: در این فصل ارتباط بین قابها در فضاهای باناخ و خاصیت تقریب به‌صورت تبصره‌هایی مورد نقد و بررسی قرارگرفته است.

فصل هفتم: در این فصل قابهای دوگان متبادل برای فضاهای هیلبرت مورد مطالعه قرارگرفته است. همچنین در این فصل یک قضیهٔ مهم بیان و ثابت شده است که نشان می‌دهد چه زمانی یک قاب در یک فضای هیلبرت دارای دوگان منحصر به‌فرد است (قضیهٔ ۸.۷).

فصل هشتم: در این فصل مبحث خاصیت اتساع برای قابهای دوگان متبادل در فضاهای هیلبرت مورد توجه قرارگرفته است. همچنین در این فصل یک شرط لازم و کافی برای آن که یک خانواده از قابها برای یک فضای هیلبرت یکسان دارای خاصیت اتساع باشد را خواهیم گفت (قضیهٔ ۷.۸).

1) Gröchenig 2) Pelczynski

فصل اول

نمادها و پیش‌نیازها

در این فصل سعی شده است، تعاریف و مفاهیمی که در طول این پایان‌نامه لازم است، بیان شود. تعاریف و قضایا برگرفته از کتب و مقالات مختلفی است که جزء مراجع می‌باشند.

۱.۱ تعریف: فرض کنید X یک فضای برداری حقیقی یا مختلط و $\|\ \| : X \to \mathbb{R}$ یک تابع باشد به‌طوری که به‌ازای هر $x, y \in X$ و هر اسکالر α داشته باشیم:

الف) $\|x\| \geq 0$ و $\|x\| = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$؛

ب) $\|\alpha x\| = |\alpha|.\|x\|$؛

ج) (نامساوی مثلثی) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$،

آنگاه $\|\ \|$ را یک نُرم روی X نامیم و زوج $(X, \|.\|)$ را یک فضای نُرم‌دار گوئیم.

۲.۱ تبصره: اگر X یک فضای نُرم‌دار باشد و برای هر $x, y \in X$ قرار دهیم $d(x, y) = \|x - y\|$، آنگاه به‌سادگی دیده می‌شود که d یک متریک روی X است و بنابراین هر فضای نُرم‌دار یک فضای متریک است. d را متر تولید شده توسط نُرم می‌نامیم.

۳.۱ تعریف: فضای نُرم‌دار X را یک **فضای باناخ**[1] گوئیم، هرگاه X نسبت به متر تولید شده توسط نُرم، یک فضای کامل باشد. بدین معنی که هر دنبالهٔ کوشی مانند $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ نسبت به متر تولید شده توسط نُرم، همگرا به یک $x \in X$ باشد.

۴.۱ مثال: الف) فرض کنید $1 \leq p < \infty$ دراین صورت، فضای l_p متشکل از تمام دنباله‌های مختلط $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ با جمع و ضرب اسکالر مولفه‌وار با نُرم $\|x\| = (\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p}$ یک فضای باناخ است.

ب) فضای l_∞ متشکل از تمام دنباله‌های مختلط $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ با جمع و ضرب اسکالر مؤلفه‌وار با نُرم $\|x\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ یک فضای باناخ است.

۵.۱ تعریف: فرض کنید X یک فضای برداری مختلط باشد. یک **ضرب داخلی** روی X تابعی مانند $<,>: X \times X \to \mathbb{C}$ است به‌طوری که برای هر $x, y, z \in X$ و هر $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ عبارتهای زیر برقرار باشد:

الف) $< \alpha x + \beta y, z > = \alpha < x, z > + \beta < y, z >$؛

ب) $< x, y > = \overline{< y, x >}$؛

ج) $< x, x > \geq 0$؛

د) تساوی $< x, x > = 0$ ایجاب می‌کند که $x = 0$.

اگر $< ., . >$ یک ضرب داخلی روی فضای برداری مختلط X باشد، آنگاه زوج $(X, < ., . >)$ را یک **فضای ضرب داخلی** می‌نامیم.

۶.۱ مثال: ضرب داخلی $\mathbb{C}^n$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$< x, y > = \sum_{i=1}^{n} x_i . \bar{y}_i \qquad ; \qquad x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \;\; y = (y_1, y_2, \dots, y_n).$$

۷.۱ تعریف: در فضای ضرب داخلی X نُرم x را با نماد $\|x\|$ نمایش داده و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|x\|^2 = < x, x > .$$

1) Banach space

اگر X نسبت به این نُرم کامل باشد، آنگاه X را یک **فضای هیلبرت**[1] می‌نامیم. در این پایان‌نامه فضای هیلبرت را با H نمایش خواهیم داد.

۸.۱ **تبصره:** فضاهای هیلبرت رده خاصی از فضاهای باناخ را تشکیل می‌دهند و بنابراین تمام قضایای باناخ در مورد فضاهای هیلبرت نیز برقرار است. هندسهٔ فضاهای هیلبرت از بسیاری جهات شبیه به هندسهٔ اقلیدسی و بسیار در دسترس‌تر از نظریهٔ فضاهای باناخ است.

۹.۱ **تعریف:** نُرمهای $\|.\|$ و $\|.\|_1$ روی فضای برداری X **معادل** نامیده می‌شوند، هرگاه اعداد مثبت C و D وجود داشته باشند به‌طوری که برای هر $x \in X$،

$$C\|x\|_1 \leq \|x\| \leq D\|x\|_1.$$

این واضح است که اگر $\|.\|$ و $\|.\|_1$ نُرمهای معادل روی X باشند، آنگاه $X_0 = (X, \|.\|)$ کامل است اگر و تنها اگر $X_1 = (X, \|.\|_1)$ کامل باشد. همچنین، یک دنباله همگرا در X_0 است اگر و تنها اگر همگرا در X_1 باشد.

۱۰.۱ **قضیه:** هر دو نُرم دلخواه روی یک فضای برداری متناهی‌البُعد، معادلند.

اثبات: ر.ک. [24,p.197].

۱۱.۱ **قضیه:** فرض کنید (X, d) یک فضای متریک کامل باشد. در این صورت، زیرمجموعهٔ M از X بسته است اگر و تنها اگر (M, d) یک فضای متریک کامل باشد.

اثبات: ر.ک. [2,p.32].

۱۲.۱ **قضیه:** هر زیرفضای برداری متناهی‌البُعد از یک فضای نُرم‌دار بسته است.

اثبات: فرض کنید Y یک زیرفضای برداری متناهی‌البُعد از فضای نُرم‌دار X باشد. در این‌صورت طبق ۱۰.۱ نُرم X تحدید شده به Y باید با نُرم اقلیدسی روی Y معادل باشد. به‌ویژه، Y یک فضای متریک کامل است و بنابراین طبق ۱۱.۱ Y بسته است. ■

1) Hilbert space

۱۳.۱ **تبصره:** اگر X یک فضای نُرم‌دار متناهی‌البُعد باشد، آنگاه X یک فضای باناخ است.

۱۴.۱ **قضیه:** فرض کنید X یک فضای ضرب داخلی باشد. در این صورت، برای هر x و y در X داریم:

(۱) (نامساوی کوشی - شوارتز) $|<x,y>| \leq \|x\|\,\|y\|$.

(۲) (نامساوی مثلثی) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

(۳) (قانون متوازی‌الاضلاع) $\|x+y\|^۲ + \|x-y\|^۲ = ۲(\|x\|^۲ + \|y\|^۲)$.

اثبات: ر.ک. [24,p.8].

۱۵.۱ **تعریف:** فرض کنید H یک فضای هیلبرت و $x, y \in H$. بردارهای x و y را **متعامد** نامند (x بر y عمود است) اگر $<x,y> = ۰$ و در این صورت می‌نویسیم $x \bot y$. اگر A و B زیرمجموعه‌های H بوده و برای هر x در A و هر y در B داشته باشیم $x \bot y$، آنگاه می‌نویسیم $A \bot B$. برای $H = \mathbb{R}^۲$ ایده همان تعامد معمولی است، یعنی، دو بردار غیر صفر در $\mathbb{R}^۲$ بر هم عمودند اگر زاویهٔ بین آنها ۹۰° باشد. همچنین، **مکمل متعامد** A را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A^{\bot} := \{x \in H : x \bot y, \ \forall y \in A\}.$$

۱۶.۱ **قضیه:** (فیثاغورث) اگر $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$ بردارهای دوبه‌دو متعامد در فضای هیلبرت H باشند، آنگاه داریم:

$$\|x_۱ + x_۲ + \ldots + x_n\|^۲ = \|x_۱\|^۲ + \|x_۲\|^۲ + \cdots + \|x_n\|^۲.$$

اثبات: ر.ک. [17,p.7].

اینک می‌خواهیم بدانیم تحت چه شرایطی یک فضای باناخ، یک فضای هیلبرت است. برای این منظور، قضیهٔ زیر را بیان می‌کنیم:

۱۷.۱ **قضیه:** فضای باناخ X، یک فضای هیلبرت است اگر و تنها اگر در قانون متوازی‌الاضلاع صدق کند.

اثبات: ر.ک. [48,p.89].

۱۸.۱ مثال: $\mathbb{R}^n$ مجهز به نُرمهای $\|x\| = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{1/p}$ و $\|x\| = \max_{1\leq i\leq n} \|x_i\|$ را به‌ترتیب با l_p^n و l_∞^n نمایش می‌دهیم. اکنون ادعا می‌کنیم l_p^n به‌ازای $p \neq 2$ یک فضای باناخ است ولی هیلبرت نیست. به‌وضوح طبق ۱۳.۱ $l_p^n(1 \leq p \leq \infty)$ یک فضای باناخ است. اما l_p^n برای $p \neq 2$ فضای هیلبرت نیست. زیرا فرض کنید $x = (1, 1, 0, 0, 0, \dots)$ و $y = (1, -1, 0, 0, 0, \dots)$. بنابراین داریم:

$$\|x\| = 2^{1/p} = \|y\| \quad , \quad \|x+y\| = 2 = \|x-y\|.$$

حال اگر $p \neq 2$، آنگاه قانون متوازی‌الاضلاع برقرار نیست. از این‌رو، طبق ۱۷.۱ l_p^n $(p \neq 2)$ یک فضای هیلبرت نیست. یعنی، l_2^n یک فضای هیلبرت است.

۱۹.۱ تعریف: مجموعهٔ $\{u_1, u_2, \dots\}$ در فضای ضرب داخلی X متعامد گفته می‌شود، هرگاه برای هر $i \neq j$، $u_i \perp u_j$. به‌علاوه، اگر برای هر $i \geq 1$، $\|u_i\| = 1$ باشد، آنگاه آن مجموعه را متعامد یکه می‌نامند.

۲۰.۱ قضیه: فرض کنید $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک مجموعهٔ متعامد یکه در فضای هیلبرت H باشد. در این صورت، شرایط زیر معادلند:

الف) $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک پایهٔ متعامد یکه برای H است.

ب) برای هر $x \in H$، $x = \sum_{i=1}^{\infty} < x, u_i > u_i$.

ج) برای هر $x \in H$، $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} | < x, u_i > |^2$ (اتحاد پارسوال).

د) $\overline{Span}\{u_i\}_{i=1}^{\infty} = H$.

ه) اگر $x \in H$ و برای هر i، $< x, u_i > = 0$ باشد، آنگاه $x = 0$.

اثبات: ر.ک. [38,p.390].

۲۱.۱ مثال: فرض کنید $H = l_2$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$، $u_n = (0, 0, \dots, 0, 1^{n\text{ام}}, 0, 0, \dots)$. اگر $x \in H$ و برای هر n، $x_n = < x, u_n > = 0$، آنگاه $x = 0$. بنابراین طبق ۲۰.۱، $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک پایهٔ متعامد یکه برای H است.

۲۲.۱ تبصره: از این به بعد پایهٔ **متعامد یکه متعارف** در l_2 را با $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ نمایش می‌دهیم. در این حالت، داریم:

$$e_i = \{\delta_{ij}\}_{j=1}^{\infty} \qquad ; \ \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \ , \ i = j \\ 0 \ , \ i \neq j \end{cases}$$

به δ_{ij}، دلتای کرونیکر گفته می‌شود.

۲۳.۱ قضیه: فرض کنید $p, q \in (1, \infty)$ و $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. اگر $x \in l_p$ و $y \in l_q$، آنگاه $\{x_i y_i\}_{i=1}^{\infty}$ در l_1 است و

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

اثبات: ر.ک. [42,p.55].

نامساوی بالا به **نامساوی هولدر** معروف است. همچنین در حالت $p = q = 2$ به آن **نامساوی شوارتز** گویند.

اینک به دنبال مفاهیمی از نظریه عملگرها هستیم تا از آنها بتوانیم مفاهیم جدیدی مانند پایهٔ غیرشرطی، لم آلرباخ و غیره را بیان کنیم. برای این منظور از مراجع [28]، [32] [35]، [39]، [41]، [42]، [49]، [50] و [54] کمک گرفته‌ایم. حال فرض کنید X و Y فضاهای نُرم‌دار مختلط باشند.

۲۴.۱ تعریف: نگاشت $T : X \to Y$ یک **تبدیل خطی** نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $x_1, x_2 \in X$ و هر $\alpha \in \mathbb{C}$،

$$T(\alpha x_1 + x_2) = \alpha T x_1 + T x_2.$$

تبدیل خطی T **کران‌دار** گفته می‌شود، هرگاه $c > 0$ موجود باشد به‌طوری که برای هر $x \in X$،

$$\|Tx\| \leq c\|x\|.$$

مجموعهٔ همهٔ تبدیلهای خطی و کران‌دار از X به توی Y را با $B(X, Y)$ نمایش می‌دهیم. یک تبدیل خطی از X به خودش را یک **عملگر خطی** روی X گوییم و مجموعهٔ همهٔ عملگرهای خطی و کران‌دار روی X را با $B(X)$ نمایش خواهیم داد. همچنین، مجموعهٔ همهٔ تبدیلهای خطی و کران‌دار از X به $\mathbb{C}$ را با $X^* = B(X, \mathbb{C})$ نمایش داده و آن را **دوگان** X می‌نامیم.