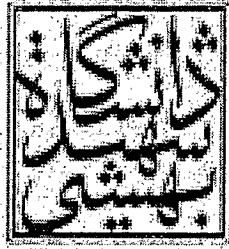


بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

۱۲۹۵۵۲



دانشگاه شهید بهشتی

دانشکده علوم-گروه فیزیک

پایان نامه کارشناسی ارشد (گرایش گرانش)

# آزمایش های کلاسیک در گرانش شامه

استاد راهنما:

دکتر حمید رضا سپنجی

استاد مشاور:

دکتر شهرام جلال زاده

دانشجو:

۱۳۸۸/۱۰/۲۷

مهدی مهرنیا

اطلاعات مدرک علمی بیلا  
تسویه مدرک

شهریور ۱۳۸۸

۱۲۹۵۵۲

## چکیده

حل های خلأ بر گرانش شامه به خاطر حضور تعدادی از عبارات های اضافی در متریک با حل های خلأ چهار بعدی فرق دارند و این به خاطر اثر هندسی ابعاد اضافه روی شامه می باشد و این در حالی است که متریک ناشی از گرانش شامه به متریک شوارتس- شیلد در فاصله های کم تبدیل می شود. در مواردی، محققین بر این عقیده هستند که می توان اثرهای هندسی ناشی از ابعاد اضافه را به عنوان تانسور انرژی-تکانه شاره ی انرژی تاریک در نظر گرفت. ما به مطالعه ی نقش این عبارات ها در حرکت تقدیمی مدارهای سیاره ای، خمش نور، تاخیر زمانی رادار و بی قاعده گی در حرکت میانگین اجسام آزمایشی می پردازیم. با استفاده از داده های موجود از آزمایش های منظومه ی شمسی، محدوده عددی پارامتر آزاد در جمله ی با تابعیت خطی از  $r$  که در متریک ظاهر شده است را تعیین می کنیم. بهترین نتایج از بی قاعده گی در حرکت میانگین سیارات هستند. ما امیدواریم که چنین مطالعاتی که در جستجوی نقش و قدرت هندسی ابعاد اضافه هستند، بتوانند در درک انرژی تاریک در مقیاس های فاصله ای از مرتبه منظومه شمسی کمک کننده باشند.

# فهرست

چکیده

۱.....مقدمه

۸..... ۱ معادلات میدان روی شامه

۱۴..... ۲ حل های خلأ روی شامه

۲۲..... ۳ معادلات ژئودزی حرکت

۲۴..... ۴ جابه جایی نقطه ی حضيض مدارهای سیارات

۳۲..... ۵ انحراف پرتوهای نوری

۳۷..... ۶ تأخیر زمانی رادار

۷ حدگذاری روی ضریب ثابت جمله با تابعیت خطی از  $\alpha$  در متریک شامه، از راه

۴۳..... آزمایش

۴۴..... ۱.۷ انحراف پرتوهای نوری در منظومه ی شمسی

۴۸..... ۲.۷ حرکت تقدیمی مدارهای سیاره ای

۵۰..... ۳.۷ تأخیر زمانی رادار در منظومه ی شمسی

۴.۷ حرکت میانگین ..... ۵۸

نتیجه گیری ..... ۶۱

منابع ..... ۶۴

## مقدمه

در دو دهه ی پیش کوشش های مختلفی برای فهمیدن ماهیت ماده ی تاریک و انرژی تاریک که لازمه ی تفسیر داده های رصدی بسیاری است، صورت گرفته است. برای نمونه می توان به [۴-۱] مراجعه کرد. روشن ترین مدرک دال بر وجود ماده ی تاریک منحنی های تخت چرخش کهکشان ها، سرعت کهکشان ها در خوشه ها و خمش نور از کهکشان ها و خوشه های کهکشانی می باشد [۵ و ۶]. به همین دلایل، توافق عمومی در جامعه ی اختر فیزیکی برای اینکه بیشتر ماده ی کهکشان ها (و از این رو جهان ما) از ماده ی تاریک می باشد وجود دارد. به هر حال ذات ماده ی تاریک نامعلوم است و یکی از مسائل بزرگ حل نشده ی اختر فیزیک تا این تاریخ می باشد. در ابتدا تصور می شد که باید ستاره گان کم نور یا دیگر اشکال مادی باریونی، یعنی هاله ای از اجرام سنگین<sup>۱</sup>، باشند [۷]. مورد دیگر این است که اشکالی از ماده ی تاریک غیر باریونی مثل نوترینوهای سنگین، آکسیون ها<sup>۲</sup>، و ذرات جرم دار با برهم کنش ضعیف، که توسط نظریه های مثل نظریه ی ابر تقارن پیش بینی شده است، در نظر بگیریم [۸]. با این همه این مسئله همچنان باز است. آیا ممکن است که این مقدار فراوان از ماده ی تاریک که ما به دنبال آن هستیم وجود خارجی نداشته باشد؟ ما معتقدیم که در این مقطع در نظر گرفتن یک چنین امکانی معقول می باشد چرا که در [۹] ماده ی تاریک را به عنوان کمیتی هندسی معرفی می کند.

---

<sup>۱</sup> Massive compact halo objects (MACHOs)  
<sup>۲</sup> Axion

تا آنجا که ما می دانیم، انحراف منحنی های چرخش کهکشانی از انتظارات نیوتنی در فواصل وری مقیاس های منظومه ی شمسی اتفاق می افتد [۱۰]. به عبارت دیگر، این یک پدیده ای است که در مقیاس کهکشانی رخ می دهد. نظریه ی گرانش نیوتنی، که نسبت عام آن را در حد گرانش ضعیف غیر نسبیتی باز یابی می کند، در اصل برای توضیح پدیده های منظومه ی شمسی فرمول بندی شده بود و بنابراین نادرست است که این نظریه را برای توضیح پدیده هایی که در مقیاس های کهکشانی و بزرگ تر رخ می دهند به کار بریم. بنابراین توسط بسیاری از مؤلفین پیشنهاد شده که این مقدار ماده ی فراوانی که به نام ماده ی تاریک می شناسیم وجود خارجی ندارد و "علم پدیده شناسی کهکشانی" می تواند علامتی بر ناکارایی گرانش نیوتنی (و همین طور نسبیت عام) در مقیاس های کهکشانی و بزرگ تر باشد [۱۰-۱۲]. بنابراین بعضی از مؤلفین نظریه هایی را که کلاسیکی هستند به عنوان راه حل پیشنهاد کرده اند. برجسته ترین آن ها برنامه ی دینامیک غیر نسبیتی اصلاح شده ی میلگرام<sup>۲</sup> (MOND) [۱۱]، برنامه ی گرانش وایل<sup>۴</sup> کازاناس-منهایم<sup>۵</sup> [۱۲] و نظریه ی گرانش تانسور اسکالر بکنشتاین-ساندرز<sup>۶</sup> [۱۳]. در MOND، دینامیک نیوتنی در شتاب های کم از مدارهایی که از مقیاس های کهکشانی هستند اصلاح شده است. این مدل موفقیت هایی در برازش منحنی های چرخش کهکشانی بدون نیاز به در نظر گرفتن ماده ی تاریک داشته است [۱۱ و ۱۴]. به هر حال MOND، یک نظریه ی غیرنسبیتی است و بنابراین نمی تواند هیچ گونه پیش بینی در مورد پدیده های نسبیتی مثل انحراف پرتوهای نوری، کیهان شناسی و غیره داشته باشد. در نظریه ی اسکالر-تانسور، نشان داده می شود که خمش نور نمی تواند از آن مقداری که توسط نسبیت عام پیش بینی شده است تجاوز کند [۱۳]، که در تناقض با مشاهدات، منظور خمش رصد شده می باشد که در واقع بزرگ تر از مقداری است که توسط نسبیت عام پیش بینی شده است. گرانش وایل که

<sup>۲</sup> Milgrom's modified nonrelativistic dynamics (MOND)

<sup>۴</sup> Weyl

<sup>۵</sup> Kazanas-Mannheim

<sup>۶</sup> Bekenstein-Sanders

شامل بزرگ ترین گروه تقارنی (شامل تقارن هموردای متریک هم می باشد.) که مخروط های نوری را ناوردا نگه می دارد می باشد، موفقیت های قابل قبولی در برآزش منحنی های چرخش کهکشانی بدون در نظر گرفتن ماده ی تاریک داشته است [۱۵]. این نظریه با توجه به اینکه برخلاف نسبیت عام بر اساس اصل ناوردایی می باشد، نتوانسته است توافق عمومی را جلب کند، چرا که بعضی از حل های کلاسیک این نظریه آن طور که انتظار داریم حد پایین تر انرژی را ندارند و بنابراین ناپایداری هایی را از خود نشان می دهند [۱۶].

با توجه به شواهدی که در بالا بدان اشاره شد و بر حضور ماده ی تاریک و انرژی تاریک حکایت می کند و از این رو دلیلی بر ناکارآمدی نسبیت عام استاندارد اینشتین در مقیاس های فاصله ای بزرگ می باشد، ممکن است ما را به این نتیجه برساند که بررسی صحت و سقم مبانی نسبیت عام استاندارد اینشتین کار عاقلانه ای باشد. این کار از حدود چهار الی پنج دهه ی پیش توسط بسیاری از آزمایش گران و مؤلفین در منظومه ی شمسی انجام شده است. آزمایش های بسیاری از قبیل تعیین برد یابی ماه به وسیله لیزر<sup>۷</sup> که تنها تکنیک موجود برای بررسی اصل هم ارزی قوی می باشد و در حال حاضر دقیق ترین روش تعیین ثابت گرانشی  $G$  می باشد و آزمایش های اصل هم ارزی به وسیله ی ماهواره که به عنوان نمونه می توان به [۲۷-۱۷] نگاهی انداخت از آن جمله هستند.

در سال های اخیر، مدل هایی با ابعاد بالا پیشنهاد شده اند که در آن ها میدان های استاندارد در یک جهان چهار بعدی که به عنوان یک ابر سطح (شامه<sup>۸</sup>) در یک فضا-زمان با ابعاد بیشتر (توده<sup>۹</sup>) که در آن تنها گرانش می تواند منتشر شود غوطه ور می باشد. مشهورترین مدلی که به بیان نظریه ی جهان-شامه

<sup>۷</sup> Lunar Laser Ranging (LLR)

<sup>۸</sup> Brane

<sup>۹</sup> Bulk



ارائه شده است، مدل راندال<sup>۱۱</sup> و ساندرام<sup>۱۱</sup> (RS) می باشد. در مدل معروف RSI [۲۸] سازوکاری برای حل مسئله ی سلسله مراتب با دو شامه مینکوفسکی که در فضای توده پنج بعدی غوطه ور هستند ارائه می شود. در این مدل یکی از شامه ها تنش مثبت دارد و دیگری که به فاصله  $L$  از اولی قرار دارد تنش منفی دارد و بعد اضافه فشرده می باشد. برای اینکه در مدل RSI توده فشرده باشد تقارن  $Z$  اعمال می کنیم، در حالی که در مدل RSII [۲۹] یک شامه ی تنها با تنش مثبت در نظر گرفته می شود، که در آن گرانش نیوتنی چهاربعدی در انرژی های کم حتی اگر بعد اضافه هم فشرده نباشد بازیابی می شود. این سازوکار چاره ای برای فشرده سازی ابعاد اضافه مهیا می کند.

تحول کیهان شناختی چنین جهان شامه ای به طور گسترده ای بررسی شده است و اثرهایی از قبیل عبارت چگالی به توان دو در معادلات فریدمن پیدا شده است [۳۰ و ۳۱]. این عبارت برخاسته از تحمیل شرایط اتصال ایزرائیل<sup>۱۲</sup> که ارتباط بین انحنا ی عرضی و تانسور انرژی-تکانه شامه می باشد و نتیجه ای از رفتار تکینگی در تانسور انرژی-تکانه است، می باشد. گفته می شود که به کار بردن چنین شرایط اتصالی یکتا نیست. در واقع اشکال دیگری در شرط اتصال وجود دارد، به طوریکه شرایط مختلف منجر به نتایج فیزیکی مختلفی می شوند [۳۲]. علاوه بر این، این شرایط اتصال را وقتی که تعداد ابعاد اضافه ی فشرده بیشتر از یکی باشد، نمی توان مورد استفاده قرار داد، و این بدین خاطر است که نیاز تعریف شرایط اتصال وجود مرز (شامه) می باشد که اگر تعداد ابعاد بالا بیشتر از یکی باشد قابل تعریف نیست. به عنوان مثال، یک سطح مرزی در فضای سه بعدی سطحی است با یک بعد کمتر و یک خط در همان فضا نمی تواند به عنوان سطح مرزی در نظر گرفته شود. برای اجتناب از چنین مواردی، مدل جالبی از ابعاد بالا وجود دارد که در آن ذرات روی ابر سطح چهاربعدی با عمل یک پتانسیل محدود کننده گیر

<sup>۱۰</sup> Randall

<sup>۱۱</sup> Sundrum

<sup>۱۲</sup> Israel junction conditions

افتاده اند [۳۳] بدون اینکه از شرایط اتصال یا تقارن  $Z_2$  استفاده شود. در [۳۴] دینامیک ذرات آزمون محدود شده به شامه با عمل چنین پتانسیلی در سطوح کوانتومی و کلاسیکی مورد مطالعه قرار گرفته و اثرات اختلال های کوچک در طول ابعاد اضافه مورد بررسی قرار گرفته است. در [۳۵] مدلی از جهان-شامه ای بدون استفاده از شرایط اتصال مورد مطالعه قرار گرفته است که در آن ماده روی شامه توسط عمل چنین پتانسیلی مقید می باشد که یک توضیح هندسی برای انبساط جهان شتاب دار ارائه می دهد. کار دیگری که در آن مقید سازی ماده در آن باز هم با استفاده از عمل پتانسیل محدود کننده صورت گرفته، مطالعه یک سناریوی دیگری از جهان شامه است که در آن توده ی  $m$ -بعدی دارای یک عبارت گاوس-بونت<sup>۱۲</sup> می باشد [۳۶]. نشان داده شده که در حضور عبارت GB، جهان سریع تر از مدل شامه ای فاقد عبارت GB شتاب دار می شود. رفتار جهان شامه ی نا همسانگرد با هندسه بیانچی های<sup>۱۴</sup> نوع یک و پنج به طریقه ی مشابه مورد مطالعه قرار گرفته است [۳۷].

در نظریه های شامه، معادلات هموردای اینشتین با تصویر کردن معادلات توده روی شامه بدست می آیند. این کار نخستین بار توسط شیرومیزو<sup>۱۵</sup>، مائدا<sup>۱۶</sup> و ساساکی<sup>۱۷</sup> انجام گرفت [۳۸] که در آنجا معادلات گاوس-کودازی<sup>۱۸</sup> به همراه شرایط اتصال ایزرئیل مورد استفاده قرار گرفت تا معادلات اینشتین را روی ۳-شامه بدست آید. معادلات میدان روی شامه متفاوت با معادلات اینشتین در مدل استاندارد می باشند. یک اصلاح سازی در انرژی های بالا به شکل یک عبارت منبع در معادله ی اینشتین مؤثر ظاهر می شود، که در تانسور انرژی-تکانه ی شامه از توان دو می باشد. اصلاح سازی دیگر وقتی اتفاق می افتد که توده یک وایل-انحنا بدون اینکه تصویر ناپدید شدنی روی شامه داشته باشد. این به نام بخش الکتریکی

<sup>۱۲</sup> Gauss-Bonnet (GB)

<sup>۱۴</sup> Bianchi

<sup>۱۵</sup> Shiromizu

<sup>۱۶</sup> Maeda

<sup>۱۷</sup> Sasaki

<sup>۱۸</sup> Gauss-Codazzi

تانسور وایل توده معروف می باشد. در این زمینه، طبیعی است که حل های منابع فشرده روی شامه از قبیل ستارگان و سیاه چاله ها مورد مطالعه قرار گیرد. رمبش گرانشی روی شامه توسط بسیاری از مؤلفین مورد مطالعه قرار گرفته است [۴۶-۳۹]. در [۴۷] حل دقیق سیاه چاله از معادله ی اینشتین مؤثر روی شامه تحت شرایطی که توده انحنای وایل غیر صفر دارد و فضا-زمان شامه شرط انرژی صفر  $(T_{\mu\nu} = S_{\mu\nu} = 0)$  را ارضا می کند، بدست آورده شده است. این حل با متریک معمول رایسنر-نورداسترام<sup>۱۹</sup> داده شده که در آنجا پارامتر بار به عنوان یک بار کشندی در نظر گرفته می شود که برخاسته است از تصویر سازی انحنای وایل توده روی شامه. از متریک رایسنر-نورداسترام برای توضیح یک سیاه چاله روی شامه که در آنجا نقش بار الکتریکی به بار کشندی داده شده تعبیر می شود، و می توان آن را به عنوان نظیری از حل شوارتس شیلد<sup>۲۰</sup> روی شامه در نظر گرفت. بار کشندی مانند بار الکتریکی رایسنر-نورداسترام عبارت  $\frac{1}{r_p}$  را در پتانسیل تولید می کند در حالیکه تصحیح انرژی بالا در پتانسیل نیوتنی نمی تواند قویتر از  $\frac{1}{r_p}$  باشد [۲۹ و ۴۸]. دلیل این نا هماهنگی حضور بار کشندی است. دلیل اصلی بی فایده بودن این حل به این خاطر است که ما حل مورد نظر برای توده را نمی دانیم. به هر حال مورد توافق است که متریک رایسنر-نورداسترام تقریب خوبی برای سیاه چاله روی شامه در نزدیکی افق آن می باشد [۴۹].

حل رایسنر-نورداسترام را همچنین می توان با حل داخلی با در نظر گرفتن اینکه ستاره جهان-شامه چگالی ثابت داشته باشد تطبیق داد. حل خارجی دوم، که همچنین با چگالی ثابت داخلی جور در می آید، در [۵۰] بدست آمده است. حل های سیاه چاله ای غیر تکینه در مدل جهان شامه ای در [۵۱]، با کم کردن شرط انحنای نرده ای صفر  $(R = 0)$  و باقی ماندن شرط انرژی صفر مد نظر قرار گرفته است.

<sup>۱۹</sup> Reissner-Nordstrom

<sup>۲۰</sup> Schwarzschild

همچنین نشان داده شده که حل های خلأ روی شامه به سیستمی از معادلات دیفرانسیل مرتبه دو تقلیل می یابد، که تمام ویژه گی های هندسی خلأ را به عنوان توابعی از فشار تاریک و عبارت های تابشی تاریک شرح می دهد [۵۲]. در [۵۳] با دنبال کردن مدلی که در [۳۵] معرفی شده، توده ای  $m$ -بعدی بدون اعمال تقارن  $Z_2$  با عمل پتانسیل محدود کننده به جای استفاده از تابع  $\delta$  در تانسور انرژی-تکانه برای مقید کردن ماده روی شامه در نظر گرفته شده است و معادلات میدان خلأ با عبارت  $Q_{\mu\nu}$  که بر حسب انحنای عرضی نوشته می شود و به دلیل تصویر کردن معادلات اینشتین در ابعاد اضافه روی شامه ظاهر می شود (بنابراین یک کمیت کاملاً هندسی است) تصحیح شده اند. در [۵۳] مؤلفین معادلات میدان خلأ را برای دو حالت جالب توجه بدست می آورند، اولین حل برای توضیح منحنی های چرخش کهکشانی بدون فرض اینکه ماده ی تاریکی وجود دارد و بدون کار داشتن با نظریه های جدید همچون دینامیک نیوتنی تصحیح شده که قبلاً راجع به آن صحبت شد، استفاده شده و دومین حل ارائه دهنده ی یک سیاه چاله در فضای دوسیتتر<sup>۲۱</sup> می باشد.

در این پایان نامه که در مجله ی علمی گرانث کلاسیک و کوانتومی<sup>۲۲</sup> با عنوان آزمایش های کلاسیک در گرانث شامه به چاپ رسیده است، توجه خود را به نتایج حل های متقارن کروی خلأ که در بالا به آن اشاره شد کرده ایم و این پرسش ها را به عنوان حرکت تقدیمی مدارهای سیاره ای، انحراف پرتوهای نوری در منظومه ی شمسی، تأخیر زمانی علامت های نوری در منظومه ی شمسی و حرکت میانگین اجسام آزمون در نظر گرفته ایم. در این راستا، قیدهایی را روی پارامترهای آزادی که در متریک ظاهر شده است بدست می آوریم. ما امیدواریم که این کار بتواند کمکی در راستای دریافت منشأ فیزیکی انرژی تاریک از راه آزمایش های منظومه ی شمسی باشد.

<sup>۲۱</sup> de Sitter

<sup>۲۲</sup> Classical and Quantum Gravity

## فصل ۱

### معادلات میدان روی شامه

فرض کنید که فضای چهار بعدی ما در یک فضای توده ی  $n$ -بعدی خلا غوطه ور است. در این صورت شرایط انتگرال پذیری که به معادلات گاوس-کودازی و ریچی<sup>۲۳</sup> معروف هستند، به صورت زیر می باشند [۵۴]:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \gamma g^{mn} K_{\alpha[\gamma m} K_{\delta]\beta n} + \mathcal{R}_{ABCD} Z_{,\alpha}^A Z_{,\beta}^B Z_{,\gamma}^C Z_{,\delta}^D, \quad (1.1)$$

$$\gamma K_{\alpha[\gamma b;\delta]} = \gamma g^{mn} A_{[\gamma m b} K_{\delta]a n} + \mathcal{R}_{ABCD} Z_{,\alpha}^A \eta_b^B Z_{,\gamma}^C Z_{,\delta}^D, \quad (2.1)$$

$$\gamma A_{[\gamma a b;\delta]} = -\gamma g^{mn} A_{[\gamma m a} A_{\delta]n b} - g^{mn} K_{[\gamma m a} K_{\delta]n b} - \mathcal{R}_{ABCD} \eta_a^A \eta_b^B Z_{,\gamma}^C Z_{,\delta}^D, \quad (3.1)$$

که در اینجا  $\mathcal{R}$  انحناى توده را نمایش می دهد در حالیکه  $R$  انحناى جهان شامه را نمایش می دهد.  $K$  مشخص کننده ی انحناهای عرضی و  $Z$  و  $\eta$  به ترتیب بیانگر یک آشفتگی و جهت عمودی نوعی هستند. اندیس های بزرگ  $A, B, C, D$  به ابعاد توده مربوط می شوند که هرکدام از صفر تا  $n$  شمارش می

<sup>۲۳</sup> Ricci

خورند. اندیس های کوچک  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  مربوط به ابعاد شامه می باشند که از صفر تا سه شمارش می خورند و علامت نقطه ویرگول مشتق هم وردا نسبت به  $g_{\alpha\beta}$  (متریک جهان شامه) می باشد.

با تتجش معادله ی گاوس (۱.۱) به روی  $\alpha$  و  $\gamma$  بدست می آوریم:

$$R_{\mu\nu} = (K_{\mu\alpha c} K_{\nu}^{\alpha c} - K_c K_{\mu\nu}^c) + \mathcal{R}_{AB} Z_{,\mu}^A Z_{,\nu}^B - g^{ab} \mathcal{R}_{ABCD} \eta_a^A Z_{,\mu}^B Z_{,\nu}^C \eta_b^D. \quad (۴.۱)$$

با تتجش معادله ی اخیر به اسکالر ریچی می رسیم:

$$R = (K_{\mu\alpha c} K^{\mu\alpha c} - K_c K^c) + \mathcal{R} - 2g^{ab} \mathcal{R}_{AB} \eta_a^A \eta_b^B + g^{ad} g^{bc} \mathcal{R}_{ABCD} \eta_a^A \eta_b^B \eta_c^C \eta_d^D. \quad (۵.۱)$$

کنش کلی برای فضا-زمان  $(\mathcal{G}_{AB}, \mathcal{M})$  با مرز  $(g_{\mu\nu}, \Sigma)$  را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$S = \frac{1}{\gamma} \alpha_* \int_{\mathcal{M}} d^m X \sqrt{-G} (\mathcal{R} - 2\Lambda^{(b)}) + \int_{\Sigma} d^{\xi} x \sqrt{-g} (\mathcal{L}_{surface} + \mathcal{L}_m), \quad (۶.۱)$$

که در اینجا  $\mathcal{G}_{AB}$  متریک توده. وردش این کنش، معادلات اینشتین را در فضای توده به ما می دهد:

$$G_{AB}^{(b)} + \mathcal{G}_{AB} \Lambda^{(b)} = \alpha_* S_{AB}, \quad (۷.۱)$$

که در اینجا

$$S_{AB} = T_{AB} + \frac{1}{\gamma} \mathcal{V} \mathcal{G}_{AB}, \quad (۸.۱)$$

در اینجا  $\alpha_* = \frac{1}{M_*^{m-2}}$  مقیاس بنیادی انرژی در فضای توده می باشد،  $\Lambda^{(b)}$  ثابت کیهان شناسی

توده و  $T_{AB} \equiv -2 \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta \mathcal{G}_{AB}} + \mathcal{G}_{AB} \mathcal{L}_m$  تانسور انرژی-تکانه ی ماده ی محدود شده به روی شامه با عمل

پتانسیل محدود کننده  $\mathcal{V}$  می باشد. لازم است که  $\mathcal{V}$  سه شرط عمومی را ارضا کند: اول این که مینیمم

عمیقی روی شامه ی غیر مختل شده دارد، دوم این که تنها به مؤلفه های اضافه وابسته است و سوم این که گروه پیمانه ای ارایه دهنده ی زیرگروه گروه هم ریختی فضای توده توسط آن حفظ شود [۳۴].

حالا با استفاده از معادلات (۴.۱) و (۵.۱) تانسور اینشتین روی شامه به صورت زیر در می آید:

$$G_{\mu\nu} = G_{AB}Z_{,\mu}^AZ_{,\nu}^B + Q_{\mu\nu} + g^{ab}\mathcal{R}_{AB}\eta_a^A\eta_b^B g_{\mu\nu} - g^{ab}\mathcal{R}_{ABCD}\eta_a^AZ_{,\mu}^BZ_{,\nu}^C\eta_b^D, \quad (9.1)$$

که در اینجا

$$Q_{\mu\nu} = -g^{ab}(K_{\mu a}^\gamma K_{\gamma\nu b} - K_a K_{\mu\nu b}) + \frac{1}{\gamma}(K_{\beta ac}K^{\beta ac} - K_c K^c)g_{\mu\nu}. \quad (10.1)$$

همان طور که از تعریف بالا هم مشخص است،  $Q_{\mu\nu}$  کمیت مستقل پایسته می باشد، یا به عبارتی

$$Q_{;\nu}^{\mu\nu} = 0. \quad [9]$$

با استفاده از تجزیه ی تانسور ریمان به انحنای وایل،

$$\mathcal{R}_{ABCD} = C_{ABCD} - \frac{2}{(m-2)}(\mathcal{G}_{B[D}\mathcal{R}_{C]A} - \mathcal{G}_{A[D}\mathcal{R}_{C]B}) - \frac{2}{(m-1)(m-2)}\mathcal{R}(\mathcal{G}_{A[D}\mathcal{G}_{C]B}), \quad (11.1)$$

و تانسور ریچی و انحنای اسکالر آخرین جمله ی سمت راست معادله ی (۹.۱) به صورت زیر در می آید:

$$g^{ab}\mathcal{R}_{ABCD}\eta_a^AZ_{,\mu}^BZ_{,\nu}^C\eta_b^D = \mathcal{E}_{\mu\nu} + \frac{g^{ab}\mathcal{R}_{AB}\eta_a^A\eta_b^B g_{\mu\nu}}{m-2} + \frac{(m-4)}{(m-2)}\mathcal{R}_{AB}Z_{,\mu}^AZ_{,\nu}^B - \frac{(m-4)}{(m-1)(m-2)}\mathcal{R}g_{\mu\nu}, \quad (12.1)$$

که در اینجا  $\mathcal{E}_{\mu\nu} = g^{ab}C_{ABCD}\eta_a^AZ_{,\mu}^BZ_{,\nu}^C\eta_b^D$  بخش الکتريکی تانسور وایل فضای توده می باشد و

برای بدست آوردن رابطه ی (۱۲.۱) از روابط زیر استفاده شده است:

$$G_{BD}Z_{,\mu}^B\eta_b^D = 0, \quad G_{BD}Z_{,\mu}^B Z_{,\nu}^D = g_{\mu\nu}, \quad G_{AD}\eta_a^A\eta_b^D = g_{ab}, \quad g_{ab}g^{ab} = m - \epsilon. \quad (13.1)$$

در نتیجه معادلات اینشتین چهار بعدی را به صورت زیر بدست می آوریم:

$$G_{\mu\nu} = G_{AB}Z_{,\mu}^AZ_{,\nu}^B + Q_{\mu\nu} - \epsilon_{\mu\nu} + \frac{(m-3)}{(m-2)}g^{ab}\mathcal{R}_{AB}\eta_a^A\eta_b^B g_{\mu\nu} - \frac{(m-4)}{(m-2)}\mathcal{R}_{AB}Z_{,\mu}^AZ_{,\nu}^B + \frac{(m-4)}{(m-1)(m-2)}\mathcal{R}g_{\mu\nu}. \quad (14.1)$$

با استفاده از معادلات اینشتین (7.1) بدست می آوریم:

$$\mathcal{R}_{AB} = -\frac{\alpha_*}{(m-2)}G_{AB}S + \frac{\gamma}{(m-2)}G_{AB}\Lambda^{(b)} + \alpha_*S_{AB}, \quad (15.1)$$

$$\mathcal{R} = -\frac{\gamma}{(m-2)}(\alpha_*S - m\Lambda^{(b)}). \quad (16.1)$$

با جا گذاری روابط (15.1) و (16.1) در رابطه ی (14.1) و کمی ضرب و تقسیم به رابطه ی زیر می رسیم:

$$G_{\mu\nu} = Q_{\mu\nu} - \epsilon_{\mu\nu} + \gamma\frac{\alpha_*}{(m-2)}S_{\mu\nu} + \frac{(m-3)}{(m-2)}\alpha_*g^{ab}S_{ab}g_{\mu\nu} - \frac{(m-3)(m-4)}{(m-1)(m-2)}\alpha_*Sg_{\mu\nu} + \frac{(m-7)}{(m-1)}\Lambda^{(b)}g_{\mu\nu}, \quad (17.1)$$

که در اینجا  $S_{ab} = \eta_a^A\eta_b^B S_{AB}$  و  $S_{\mu\nu} = S_{AB}Z_{,\mu}^AZ_{,\nu}^B$  می باشند.

در مدل های هم وردای گرانش شامه ای فرض بر این است که میدان ماده روی شامه محدود شده است. همان طور که قبلاً هم گفتیم در این مدل محدود کردن ماده روی شامه توسط پتانسیل  $\mathcal{V}$  انجام می شود که برای این کار به ساده گی به صورت زیر می باشد:



$$\alpha\tau_{\mu\nu} = \frac{\gamma\alpha_*}{(m-2)}T_{\mu\nu}, \quad T_{\mu\alpha} = 0, \quad T_{ab} = 0, \quad (18.1)$$

که در اینجا  $\alpha$  مقیاس انرژی روی شامه می باشد. حالا، معادلات میدان اینشتین القا شده روی شامه ی اصلی (۱۷.۱) را با استفاده از رابطه ی (۸.۱) می توان به صورت زیر نوشت:

$$G_{\mu\nu} = Q_{\mu\nu} - \varepsilon_{\mu\nu} + \frac{\gamma\alpha_*}{(m-2)}T_{\mu\nu} + \frac{\gamma\alpha_*\nu}{(m-2)}g_{\mu\nu} + \frac{(m-2)}{(m-2)}\alpha_*g^{ab}T_{ab}g_{\mu\nu} + \frac{(m-2)}{2(m-2)}\nu\alpha_*g^{ab}g_{ab}g_{\mu\nu} - \frac{(m-2)(m-4)}{(m-1)(m-2)}\alpha_*Tg_{\mu\nu} - \frac{m(m-2)(m-4)}{2(m-1)(m-2)}\alpha_*\nu g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (19.1)$$

که در اینجا  $\Lambda = -\frac{(m-2)}{(m-1)}\Lambda^{(b)}$  می باشد. حال با توجه به اینکه پتانسیل مقید کننده ی  $\nu$  باید کمترین

مقدار ممکنه را روی شامه داشته باشد و با در نظر گرفتن روابط (۱۸.۱) تانسور اینشتین چهاربعدی به صورت زیر در خواهد آمد:

$$G_{\mu\nu} = Q_{\mu\nu} - \varepsilon_{\mu\nu} + \alpha\tau_{\mu\nu} - \frac{(m-2)(m-4)}{2(m-1)}\alpha\tau g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (20.1)$$

که  $Q_{\mu\nu}$  یک کمیت کاملاً هندسی است.

در مورد پایستگی تانسور انرژی-تکانه روی شامه توضیح مختصری را در اینجا می دهیم. تنش اتحاد

های بیانچی در فضای توده  $G_{;A}^{AB(b)} = 0$ ، که با استفاده از روابط (۷.۱) و (۸.۱) می توان نوشت:

$$\left(T^{AB} + \frac{1}{2}\nu G^{AB}\right)_{;A} = 0. \quad (21.1)$$

و چون پتانسیل  $\mathcal{V}$  زوی شامه کمترین مقدار خود را دارد، بنابراین معادله ی پایستگی بالا به صورت زیر در می آید:

$$\tau^{\mu\nu}_{;\mu} = 0. \quad (22.1)$$

همان طور که قبلاً هم گفتیم،  $Q_{\mu\nu}$  یک کمیت پایسته ی مستقل است که بر طبق [۹] می تواند به عنوان تانسور انرژی-تکانه شماره ی انرژی تاریک که بیانگر ماده ی  $x$  است در نظر گرفته شود، یا به عبارت رایج تر " ماده ی تاریک سرد  $x$ "<sup>۴</sup>. این ماده عمومی ترین شکل معادله ی حالت را که با شرایط زیر مشخص می شود دارا می باشد: تخطی شرط قوی انرژی در عصر حاضر برای  $\frac{1}{3} < \omega_x$  که  $p_x = \omega_x \rho_x$ ، پایداری محلی یا به عبارتی  $c_s^2 = \frac{\delta p_x}{\delta \rho_x} \geq 0$  و محفوظ ماندن قانون علیت یعنی  $c_s \leq 1$ . نهایتاً این که ما سه نوع ماده در سمت راست رابطه ی (۲۰.۱) داریم، یکی ماده ی معمولی محدود شده به روی شامه که با  $\tau_{\mu\nu}$  نمایش داده شده، ماده ای که با  $Q_{\mu\nu}$  نمایش داده شده و ماده ی وایل که با  $\mathcal{E}_{\mu\nu}$  بیان شده است. در فصل بعد حل های خلا روی شامه را بدست خواهیم آورد.

<sup>۴</sup> x-Cold-Dark Matter (xCDM)

## فصل ۲

### حل های خلأ روی شامه

برای معادلات میدان خلأ با  $\tau_{\mu\nu} = 0$  و در نتیجه  $\tau = 0$  معادلات مؤثر بدست آمده در بخش قبل به صورت زیر در می آیند:

$$G_{\mu\nu} = Q_{\mu\nu} - \varepsilon_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

که در اینجا  $\varepsilon_{\mu\nu}$  تانسور متقارن بدون رد به خاطر تقارن های وایل می باشد و مقید به معادلات پایستگی می باشد:

$$\varepsilon^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0, \quad (2.2)$$

که نتیجه ای از اتحاد های بیانچی می باشد. معادلات (۱.۲) و (۲.۲) تعیین کننده ی معادلات میدان خلأ روی شامه می باشند. با محدود کردن تجزیه و تحلیل خود به توده ی با انحنای ثابت ( $\varepsilon_{\mu\nu} = 0$ ) و هم چنین بدون در نظر گرفتن اثر ثابت کیهان شناسی، معادلات میدان خلأ (۱.۲) به صورت زیر کاهش می یابد:

$$G_{\mu\nu} = Q_{\mu\nu}, \quad (3.2)$$

که سمت راست رابطه ی (۳.۲) کاملاً هندسی است و به صورت زیر بیان می شود:

$$Q_{\mu\nu} = (KK_{\mu\nu} - K_{\mu\alpha}K_{\nu}^{\alpha}) + \frac{1}{r^2}(K_{\alpha\beta}K^{\alpha\beta} - K^{\gamma})g_{\mu\nu}. \quad (۴.۲)$$

روابط (۳.۲) و (۴.۲) بیانگر وجود نوعی ماده جدای از آن چیزی که به عنوان ماده ی معمولی می شناسیم و کاملاً هندسی است که از تأثیر ابعاد اضافه روی شامه می باشد، یا به عبارتی حضور ابعاد اضافه هرچند هم که توده ی  $m$ -بعدی تخت باشد، انحناهای عرضی را به روی شامه ی چهاربعدی اعمال می کنند که این انحناها حتی بدون حضور ماده ی معمولی هم مسیر حرکت یک جسم آزمون را تحت تأثیر قرار می دهند. به عنوان یک مثال بسیار ساده یک صفحه ی کاغذ مچاله شده را در نظر بگیرید، یک دانه ی شن برای حرکت روی این فضا مسیر های خاصی را طی می کند که این مسیرها وابسته به شکل خمیده گی های روی کاغذ می باشند.

حال با در نظر گرفتن متریک متقارن کروی ایستای انتخابی زیر برای شامه:

$$ds^2 = -e^{\mu(r)} dt^2 + e^{\nu(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (۵.۲)$$

به ساده گی می توان نشان داد:

$$G^t_t = \frac{e^{-\nu}}{r^2}(1 - rv' - e^{\nu}), \quad (۶.۲)$$

$$G^r_r = \frac{e^{-\nu}}{r^2}(1 + r\mu' - e^{\nu}), \quad (۷.۲)$$

$$G^{\theta}_{\theta} = G^{\phi}_{\phi} = \frac{e^{-\nu}}{r^2}(\gamma\mu' - \gamma v' - \mu'v'r + \gamma\mu''r + \mu'^{\gamma}r), \quad (۸.۲)$$