بسم‌الله الرحمن الرحیم

دانشگاه شهرکرد

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی—گرایش جبر

عنوان:

نظریه‌های کوهمولوژی بر پایه‌ی مدول‌های تزریقی گرنشتاین

استاد راهنما:

دکتر جواد اسداللهی

استاد مشاور:

دکتر علیرضا نقی‌پور

توسط:

رضا طاهری

مهر ماه ۱۳۸۸

پیوست شماره ۲

تقديم

تشکر و قدردانی

این مجموعه کوچک وناقابل را به پاس عاطفه سرشار و محبت بی‌دریغی که هیچ‌گاه فروکش نخواهد کرد به مهربان ترین کسان خویش یعنی خانواده عزیز و ارجمندم به خصوص

پدر و مادر گرامی،

تقدیم می‌دارم.

چکیده

هدف ما در این پایان‌نامه، مطالعه نظریه‌های کوهمولوژی نسبی و تیت بناشده بر پایه مدول‌های تزریقی گرنشتاین است. برای کلاس مدول‌های با بعد تزریقی گرنشتاین متناهی، نشان می‌دهیم که ارتباط تنگاتنگی بین این دو نظریه کوهمولوژی و نظریه‌ی کوهمولوژی معمولی وجود دارد. این ارتباط به کمک یک دنباله‌ی دقیق طولانی از مدول‌های کوهمولوژی نشان داده می‌شود. با توجه به منشأ پیدایش این دنباله، آن را دنباله‌ی دقیق آوراموف—مارتسینکوفسکی می‌نامیم. به عنوان کاربرد مهمی از نظریه‌های کوهمولوژی فوق، دو نسخه‌ی جدید از نظریه‌ی کوهمولوژی موضعی تعمیم‌یافته گروتندیک، با نام‌های کوهمولوژی موضعی گرنشتاین و کوهمولوژی موضعی تیت ارائه می‌دهیم. ارتباط بین این دو نظریه با کوهمولوژی موضعی تعمیم‌یافته بررسی شده و نشان می‌دهیم مطالعه‌ی خواص آنها، منجر به نتایجی پیرامون صفرشدن یا متناهی بودن مدول‌های کوهمولوژی موضعی تعمیم‌یافته خواهد شد.

فهرست مندرجات

فهرست نمادها

مجموعه اعداد طبیعی	$\mathbb{N}$
مجموعه اعداد صحیح	$\mathbb{Z}$
مجموع مستقیم M و N	$M \oplus N$
مجموع مستقیم M_i ها	$\coprod M_i$
حاصل ضرب مستقیم M_i ها	$\prod M_i$
حاصل ضرب تانسوری R–مدول‌های M و N	$M \otimes_R N$
مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول R	$\mathrm{Spec}(R)$
مجموعه‌ی ایده‌آل‌های ماکسیمال R	$\mathrm{Max}(R)$
حد مستقیم	$\varinjlim$
هسته	Ker
هم‌هسته	Coker
i–اُمین مدول مرابطه از همبافت $\mathbf{C}$	$\Omega^i \mathbf{C}$
بعد R– مدول M	$\dim_R M$
مجموعه‌ی عضوهای M که توسط توانی از $\mathfrak{a}$ پوچ می‌شوند	$\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$
i–اُمین مدول کوهمولوژی موضعی M نسبت به ایده‌آل $\mathfrak{a}$	$\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(M)$
بعد تزریقی R–مدول M	$\mathrm{id}_R M$

بعد تصویری R−مدول M	$\mathrm{pd}_R M$
بعد تزریقی گرنشتاین R−مدول M	$\mathrm{Gid}_R M$
بعد تصویری گرنشتاین R−مدول M	$\mathrm{Gpd}_R M$
G−کلاس اوسلندر	$\mathrm{G}(R)$
رسته‌ی R−مدول‌ها و R−همریختی‌ها	$\mathcal{C}(R)$
رسته‌ی R−مدول‌های تزریقی	$\mathcal{I}$
رسته‌ی R−مدول‌های تزریقی گرنشتاین	$\mathcal{GI}$
رسته‌ی R−مدول‌های از بعد تزریقی متناهی	$\widetilde{\mathcal{I}}$
رسته‌ی R−مدول‌های از بعد تزریقی گرنشتاین متناهی	$\widetilde{\mathcal{GI}}$
رسته‌ی R−مدول‌های دارای یک $\mathcal{GI}$−هم‌تحلیل سره	$\overline{\mathcal{GI}}$

پیشگفتار

در سراسر پایان نامه R حلقه‌ای یکدار، جابجایی و نوتری است.

درسال ۱۹٦۹ میلادی اوسلندر[۱] و بریدگر[۲] مفهوم G—بعد (بعد گرنشتاین[۳]) را برای مدول‌های با تولید متناهی روی حلقه‌های نوتری معرفی کردند که با نماد $\text{G-dim}(M)$ نشان داده می‌شود[۳]. فرض کنیم M یک R—مدول با تولید متناهی بوده و $\text{pd}(M)$ نمایان‌گر بعد تصویری M باشد. آنها نشان دادند که همواره $\text{G-dim}(M) \leq \text{pd}(M)$ و اگر $\text{pd}(M)$ متناهی باشد، آنگاه $\text{G-dim}(M) = \text{pd}(M)$. روی یک حلقه‌ی گرنشتاین مدول‌های ازG—بعد صفر دقیقاً همان مدول‌های کوهن مکالی ماکسیمال هستند. آنها نقش اساسی در مطالعه‌ی رسته‌ی R—مدول‌های متناهی ایفا می‌کنند. آوراموف [۴] و مارتسینکوفسکی [۵] نظریه‌های کوهمولوژی نسبی و تیت را روی زیر رسته‌ی مدول‌های از بعد گرنشتاین متناهی مطالعه کرده و ارتباط بین سه نظریه‌ی کوهمولوژی یعنی کوهمولوژی معمولی، نسبی و تیت را بررسی کردند[۵]. مفهوم نظریه کوهمولوژی نسبی به ایلینبرگ [٦] و مور[۷] در سال

[۱] Auslander

[۲] Bridger

[۳] Gorenstein

[۴] Avramov

[۵] Martsinkovsky

[٦] Eilenberg

[۷] Moore

۱۹٦۵ میلادی بر می‌گردد[۱۰]. این تئوری سپس توسط مک لین [۸] مورد مطالعه قرار گرفت [۲۰]. نتیجه‌ی اصلی مقاله‌ی آوراموف و مارتسینکوفسکی نشان می‌دهد که ارتباط تنگاتنگی بین این نظریه‌های کوهمولوژی وجود دارد. فرض کنید $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{G}}(-,-)$ نشان دهنده‌ی تابع‌گون کوهمولوژی نسبی باشد که به کمک مدول‌های از بعد گرنشتاین صفر محاسبه می‌گردد. همچنین $\widehat{\mathrm{Ext}}^n_R(-,-)$ نشان دهنده‌ی تابع‌گون کوهمولوژی تیت باشد. در این صورت یک دنباله‌ی دقیق از تابع‌گون‌ها به صورت زیر موجود است

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{G}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_R \longrightarrow \widehat{\mathrm{Ext}}^n_R \longrightarrow \mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathcal{G}} \longrightarrow \cdots .$$

از سوی دیگر مدول‌های با بعد گرنشتاین صفر توسط ایناکس [۹] و همکارانش مورد مطالعه‌ی گسترده قرار گرفتند. آنها این مفهوم را به مدول‌های دلخواه، نه لزوماً با تولید متناهی، روی حلقه‌ی دلخواه، نه لزوماً جابه‌جایی و نوتری، تعمیم داده و کلاس مدول‌هایی با نام مدول‌های تصویری گرنشتاین را معرفی نمودند. ثابت می‌شود که مدول‌های با تولید متناهی تصویری گرنشتاین روی حلقه جابه‌جایی و نوتری، همان مدول‌های با بعد گرنشتاین صفر یا مدول‌های متعلق به $G-$کلاس اوسلندر هستند. سپس آنها با دوگان‌سازی روشی که مدول‌های تصویری گرنشتاین تعریف می‌شوند مدول‌های تزریقی گرنشتاین را تعریف کردند[۱۱]. در واقع کلاس مدول‌های تصویری گرنشتاین و تزریقی گرنشتاین تعمیم‌هایی از کلاس مدول‌های تصویری و تزریقی ارائه می‌دهند. مطالعه‌ی خواص همولوژیکی این مدول‌ها منجر به پیدایش شاخه‌ای جدید از جبر همولوژیک گردیده که به جبر همولوژیک

[۸] MacLane

[۹] Enochs

گرنشتاین معروف است.

در این پایان نامه پس از فصل مقدمات، که در آن مباحثی از جبر جابه‌جایی و جبر همولوژی یادآوری می‌شود، ابتدا تابع‌گون‌های مشتق شده‌ی راست تابع‌گون همورد Hom نسبت به کلاس مدول‌های تزریقی گرنشتاین را معرفی و مطالعه می‌کنیم [۱]. به ازاء R—مدول‌های M و N، n—اُمین تابع‌گون مشتق شده‌ی راست Hom را با $\mathrm{ext}^n_{\mathcal{GI}}(M,N)$ نمایش می‌دهیم. البته، همان‌گونه که خواهیم دید، این تابع‌گون‌ها فقط برای R—مدول‌های Nای قابل تعریف هستند که دارای یک تحلیل تزریقی گرنشتاین سره باشند. علاوه بر بررسی خواص اولیه این تابع‌گون‌ها، نشان می‌دهیم که صفر شدن آنها، یک پایای عددی به نام بعد تزریقی گرنشتاین را توصیف می‌کند. این بعد که به ازاء R—مدول N آن را با $\mathrm{Gid}_R N$ نمایش می‌دهیم، تظریفی از بعد تزریقی مدول، $\mathrm{id}_R N$، بوده و در حالتی که $\mathrm{id}_R N$ متناهی باشد، این دو پایا با هم برابر هستند. مدول‌های از بعد تزریقی گرنشتاین متناهی نقش اساسی در این پایان‌نامه ایفا می‌کنند. برای هر R—مدول N با بعد تزریقی گرنشتاین متناهی g، به کمک روش دوگان روش موسوم به ساختار چنگالی، یک هم‌تحلیل کامل $N \longrightarrow \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{T}$ می‌سازیم که در آن $\mathbf{I}$ یک هم‌تحلیل تزریقی برای N بوده و $\mathbf{T}$ یک هم‌تحلیل تزریقی کامل برای g—اُمین هم‌مرابطه N است. پس به ازاء هر $n \in \mathbb{Z}$ و هر R—مدول M، n—اُمین مدول کوهمولوژی تیت M و N را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\widehat{\mathrm{ext}}^n_R(M,N) = \mathrm{H}^n\mathrm{Hom}_R(M,\mathbf{T}).$$

سپس یک دنباله دقیق از تابع‌گون‌ها به صورت زیر ارائه می‌دهیم که کوهمولوژی معمولی،

نسبی و تیت را به هم ربط می‌دهد

$$\circ \longrightarrow \mathrm{ext}^{1}_{\mathcal{GI}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathrm{ext}^{n}_{\mathcal{GI}} \longrightarrow \mathrm{Ext}^{n}_{R} \longrightarrow \widehat{\mathrm{ext}}^{n}_{R} \longrightarrow \mathrm{ext}^{n+1}_{\mathcal{GI}} \longrightarrow \cdots.$$

در فصل ۳ مسئله تعادل تابع‌گون‌های مشتق نسبی و تیت را مورد مطالعه و بررسی قرار می‌دهیم [۱]. برخلاف کوهمولوژی معمولی که محاسبه آن هم از طریق تحلیل تصویری مدول مؤلفه اول و هم از طریق تحلیل تزریقی مدول مؤلفه دوم آن امکان پذیر است، کوهمولوژی نسبی (وتیت) تعریف شده به کمک تحلیل تصویری گرنشتاین مؤلفه اول، $\mathrm{Ext}_{\mathcal{G}}$، و کوهمولوژی نسبی (وتیت) تعریف شده به کمک تحلیل تزریقی گرنشتاین مؤلفه دوم، $\mathrm{ext}_{\mathcal{GI}}$، لزوماً یکی نیستند. ما نشان خواهیم داد که تحت شرایطی روی حلقه یا روی مؤلفه‌های M و N تعادل تابع‌گون‌های کوهمولوژی نسبی(وتیت) را خواهیم داشت. فصل چهارم پایان نامه صرف مطالعه مدول‌های کوهمولوژی موضعی تعمیم‌یافته شده است. نظریه مدول‌های کوهمولوژی موضعی توسط گروتندیک در هندسه جبری معرفی شد [۱۴]. این نظریه بلافاصله در جبر جابه‌جایی و به زبان حلقه و مدول، به جای شیف و اسکیم، مطرح شد و مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفت به گونه‌ای که بیش از هزار مقاله تحقیقاتی در این زمینه به چاپ رسیده است. این نظریه توسط هرزوگ [۱۰] تعمیم داده شد.

در فصل چهارم، ما به کمک نظریه‌های معرفی شده در فصل سوم، دو نسخه متفاوت، ولی کاملاً مرتبط، از نظریه کوهمولوژی موضعی تعمیم‌یافته ارائه می‌نمائیم [۱]. فرض کنید $\mathfrak{a}$ یک ایده‌آل از R باشد. برای هر $R-$مدول M، هر $R-$مدول N که دارای تحلیل تزریقی

[۱۰] Herzog

گرنشتاین سره است و هر $i \in \mathbb{Z}$، iـاُمین مدول کوهمولوژی موضعی گرنشتاین M و N نسبت به $\mathfrak{a}$ را به صورت

$$\lim_{\rightarrow} \operatorname{ext}^i_{\mathcal{GI}}(\frac{M}{\mathfrak{a}^n M}, N) \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

تعریف می‌کنیم و با $GH^i_{\mathfrak{a}}(M,N)$ نشان می‌دهیم. با قراردادن $M = R$ کوهمولوژی موضعی معرفی شده توسط گروتندیک را بدست می‌آوریم. به همین ترتیب iـاُمین مدول کوهمولوژی تیت M و N نسبت به $\mathfrak{a}$ را به صورت

$$\lim_{\rightarrow} \widehat{\operatorname{ext}}^i_R(\frac{M}{\mathfrak{a}^n M}, N) \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

تعریف کرده و با $\widehat{H}^i_{\mathfrak{a}}(M,N)$ نشان می‌دهیم. در نهایت ارتباط بین این دو نظریه‌ی کوهمولوژی موضعی و کوهمولوژی موضعی تعمیم‌یافته هرزوگ[۱۵] را ارائه می‌دهیم و وجود دنباله دقیق زیر را ثابت می‌کنیم

$$0 \longrightarrow GH^1_{\mathfrak{a}}(M,N) \longrightarrow H^1_{\mathfrak{a}}(M,N) \longrightarrow \cdots \longrightarrow GH^n_{\mathfrak{a}}(M,N) \longrightarrow H^n_{\mathfrak{a}}(M,N)$$

$$\longrightarrow \widehat{H}^n_{\mathfrak{a}}(M,N) \longrightarrow GH^{n+1}_{\mathfrak{a}}(M,N) \longrightarrow \cdots .$$

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

۱.۱ مقدمه‌ای بر جبر جابجایی

در سراسر این پایان‌نامه R حلقه‌ای جابجایی و یکدار است.

تعریف ۱.۱.۱ حلقه‌ی R را موضعی گوئیم، هرگاه تنها دارای یک ایده‌آل ماکسیمال باشد. اگر $\mathfrak{m}$ تنها ایده‌آل ماکسیمال R باشد، حلقه‌ی R را با $(R, \mathfrak{m})$ نشان داده و میدان $k = \frac{R}{\mathfrak{m}}$ را میدان مانده‌ای گوئیم.

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنید N و K زیر مدول‌هایی از R—مدول M باشند. در این صورت تعریف می‌کنیم

$$(N :_R K) = (N : K) := \{a \in R \mid aK \subseteq N\}.$$

در حالت خاص اگر $N = ۰$، آنگاه $(۰ :_R K)$ را با $\mathrm{Ann}_R K$ یا $\mathrm{Ann} K$ نشان داده و پوچساز K در R می‌نامیم.

تعریف ۳.۱.۱ یک زیر مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از R زیر مجموعه‌ای مانند S از R است که شامل ۱ بوده و اگر $s_۱, s_۲ \in S$، آنگاه $s_۱ s_۲ \in S$.

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنید S زیر مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از حلقه‌ی R باشد. در این صورت به ازای $(a, s), (b, t) \in R \times S$، رابطه‌ی $\sim$ را روی $R \times S$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(a, s) \sim (b, t) \Leftrightarrow \exists\ u \in S : u(ta - sb) = ۰.$$

در این صورت رابطه‌ی $\sim$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی $R \times S$ است.

تعریف و نماد گذاری: فرض کنید $(a, s) \in R \times S$ کلاس هم‌ارزی (a, s) را با $\frac{a}{s}$ و مجموعه‌ی تمام کلاس‌های هم‌ارزی رابطه‌ی $\sim$ را با $S^{-۱}R$ نشان می‌دهیم، یعنی