بسم اللّه الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی و کامپیوتر
گروه ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

حل دستگاه معادلات خطی فازی و بازه ای

استاد راهنما:
دکتر عظیم ریواز

استاد مشاور:
دکتر محمود محسنی مقدم

مؤلف:
جواد دل بیشه

شهریور ۱۳۸۸

دانشگاه شهید باهنر کرمان

این پایان نامه

به عنوان یکی از شرایط احراز کارشناسی ارشد

به

بخش ریاضی – دانشکده ریاضی و رایانه

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود .

دانشجو : جواد دل بیشه

استاد راهنما : دکترعظیم ریواز

استادمشاور: دکترمحمودمحسنی مقدم

داور ۱ : دکتراسفندیاراسلامی

داور ۲ : دکترماشااله ماشین چی

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه : دکترسید ناصر حسینی

تقدیم به روح پاک پدرم

که در طول حیات کوتاهش تلاش و مهربانی را من آموخت.

تقدیم به مادر دلسوز و مهربانم

که تبسم نگاه پر مهرش همیشه شوق زندگی ام بود و خواهد بود.

تقدیم به

نمود یک احساس شیرینم

جاودانه ساز رویاهایم

دولتم، که سطح وسعتش دنیا را ارزانی ام می دارد

بهترینم که بهترین هایم را آرزو دارد

همسر عزیزم

نازنینی که

صداقت راستینش، عطوفت بی منتش و عروج علاقه مندی هایش هر دم مرا مغرور می سازد

من به اینها فخر می کنم و شرف می ورزم.

تشکر و قدردانی

با تشکر از استاد گرانقدر

جناب آقای دکتر عظیم ریواز

که در سایهٔ راهنمایی‌های ایشان دفتر این دوره از تحصیل خود را به پایان رساندم.

همچنین از اساتید بزرگوار

جناب آقای دکتر ماشین‌چی، جناب آقای دکتر محسنی مقدم، جناب آقای دکتر اسلامی

و جناب آقای دکتر اله ویرانلو

کمال تشکر را دارم.

نویسنده از حمایت مالی جزئی قطب سیستم‌های فازی و کاربردهای آن در

دانشگاه شهید باهنر کرمان تشکر می‌نماید.

چکیده

همان طورکه می دانیم در طبیعت و مسایل واقعی، به ویژه در علوم مهندسی و ریاضی، همه مقادیر به صورت دقیق و قطعی نمی باشند و اکثراً با مقادیر مبهم و نادقیق سروکار داریم.

لطفی عسکر زاده استاد ایرانی تبار دانشگاه برکلی آمریکا در سال ۱۹۶۵ با چاپ مقاله ای، مفهوم زیرمجموعه های فازی را به عنوان تابعی از یک مجموعه جهانی X با فاصله [۱و۰] مطرح کرده و نظریه مجموعه های فازی را بنا نمود. پس از آن نظریه مجموعه های فازی مورد علاقه بسیاری ازمحققین در شاخه های مختلف ریاضی همچون جبر، آمار، آنالیز، توپولوزی، کامپیوتر، محاسبات عددی، ... قرار گرفت. حل مسایل واقعی،دانشمندان و ریاضیدانان را برآن داشت تا نوع جدیدی از دستگاه ها را تعریف نمایندکه در آن به جای استفاده از مقادیر دقیق به عنوان پارامتر و متغیر، از مقادیر نادقیق و یا به زبان ریاضی از مقادیر فازی استفاده شود. افراد زیادی درحل این دستگاه ها کار کرده اند که از جمله آنها می توان به باکلی ، فردمن و ... اشاره کرد. این پایان نامه در ۴ فصل ارائه شده است.

در فصل اول، مفاهیم اولیه و تعاریف مورد نیاز از مجموعه های فازی و بازه ای بیان شده است .

در فصل ۲، به طور کامل و مفصل در مورد مجموعه های فازی و به دنبال آن دستگاه معادلات خطی فازی بحث شده است. روش هایی نیز برای حل این دستگاه ها ارائه شده است.

همان طور که می دانیم هر عدد فازی را می توان به وسیله α- برش به یک عدد بازه ای تبدیل کرد. لذا اگر در دستگاه فازی، هر عدد فازی را به عدد بازه ای تبدیل کنیم. دستگاه خطی بازه ای بدست می آید. در فصل ۳،این نوع دستگاه ها را تعریف کرده و روش های حل آن را نیز ارائه داده ایم.

هدف اصلی از این رساله آن بوده است که می خواهیم بدانیم که آیا می توان هر دستگاه خطی فازی را با تبدیل به دستگاه خطی بازه ای حل نمود و آیا جواب های آنها نیز با هم برابر می شود. در فصل ۴ بطور مفصل در این مورد بحث شده است.

فهرست مطالب

فصل اول: آشنایی با مفاهیم اولیه

فصل دوم: حل دستگاه معادلات خطی فازی

فصل اول

آشنایی با مفاهیم اولیه

۱-۱ مجموعه‌های فازی

در ریاضیات کلاسیک، عضویت یا عدم عضویت یک عضو به یک مجموعه بر اساس یک ویژگی خوش‌تعریف مشخص می‌شود. به‌عبارت دیگر، در یک مجموعه معمولی، اگر یک شیء مفروض دارای ویژگی خوش‌تعریفی مجموعه باشد، عضوی از آن مجموعه می‌باشد و در غیر این صورت عضو آن مجموعه نیست. لذا اگر X یک مجموعه مرجع باشد، زیرمجموعه A از X اعضایی از X است که دقیقاً مشخص شده باشند. زیرمجموعه A را می‌توان با استفاده از مفهوم تابع مشخصه A، $\mu_A : X \to \{۰,۱\}$ به‌صورت زیر معرفی نمود:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} ۱ & x \in A \\ ۰ & x \notin A \end{cases} \qquad (۱-۱)$$

با توجه به رابطه (۱-۱)، $\mu_A(x)$ یکی از مقادیر ۰ یا ۱ را برای هر $x \in X$ خواهد گرفت. حال اگر برد تابع μ_A را از مجموعه $\{۰,۱\}$ به بازه $[۰,۱]$ توسعه دهیم، تابعی خواهیم داشت که به هر عضو x از X، عددی را در بازه $[۰,۱]$ نسبت می‌دهد. در چنین وضعیتی اگر $\mu_A(x) \in (۰,۱)$ آنگاه در مورد عضویت x به A با عدم قطعیت مواجه هستیم.

همچنین μ_A را تابع عضویت A و $\mu_A(x)$ را درجه عضویت x در مجموعه A می‌نامیم. این نظریه، تحت عنوان نظریه مجموعه‌های فازی برای نخستین بار توسط آقای پروفسور لطفی عسکر زاده در سال ۱۹۶۵ ارائه گردید.

در نظریه مجموعه‌های فازی، مجموعه A دیگر یک مجموعه معمولی نیست بلکه مجموعه‌ای است که آن را یک مجموعه فازی می‌نامیم. بطوری که یک مجموعه فازی A، مجموعه‌ای است که درجات عضویت اعضای آن می‌توانند بطور پیوسته از بازه $[۰,۱]$ اختیار شوند.

در مجموعه‌های فازی، مجموعه فازی A را با تابع عضویت $\mu_A(x)$ نشان می‌دهیم، که این مجموعه فازی بطور کامل و یکتا مشخص می‌شود.

نزدیکی مقدار $\mu_A(x)$ به عدد یک، نشان دهنده تعلق بیشتر x به مجموعه فازی A است و بالعکس نزدیکی آن به عدد صفر، نشان دهنده تعلق کمتر x به A است. همچنین از لحاظ شهودی، $\mu_A(x)$ را می‌توان درجه پذیرش x بعنوان عضوی از A در نظر گرفت.

بنابراین در نظریه مجموعه‌های فازی، به‌نوعی مفهوم عضویت یک عضو را گسترش داده‌ایم. حال تعریف زیر را برای بیان کلی این موضوع ارائه می‌دهیم.

تذکر: تمام مطالب این فصل بر اساس فصل اول مرجع [۳] می‌باشد.

تعریف ۱-۱-۱: فرض کنید که X مجموعه‌ای ناتهی باشد. هر زیر مجموعه فازی $\widetilde{A}$ از X توسط یک تابع عضویت $\mu_{\widetilde{A}} : X \to [۰,۱]$ مشخص می‌شود که در آن برای هر $x \in X$، مقدار $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ در بازه $[۰,۱]$ درجه عضویت x را در $\widetilde{A}$ نشان می‌دهد.

قرارداد: در سراسر این پایان نامه، مجموعه فازی $\widetilde{A}$ از X را با تابع عضویت $\widetilde{A} : X \to [۰,۱]$ و درجه عضویت x را با $\widetilde{A}(x)$ نمایش می‌دهیم. به‌علاوه مجموعه تمام زیر مجموعه‌های فازی X را با $F(X)$ نشان می‌دهیم، بطوری که $F(X) = \left\{ \widetilde{A} \,\middle|\, \widetilde{A} : X \to [۰,۱] \right\}$.

تعریف ۱-۱-۲: فرض کنید R مجموعه اعداد حقیقی باشد. در این صورت اعضای $F(R)$ را کمیت‌های فازی می‌نامیم.

لازم به ذکر است که هر عدد حقیقی مانند r را می‌توان با تابع مشخصه $\psi_{\{r\}}$ در $F(R)$ نشان داد و برای راحتی، آن را با $\tilde{r}$ نمایش می‌دهیم. بنابراین $\tilde{r} \in F(R)$ و بصورت زیر خواهد بود:

$$\tilde{r}(x) = \begin{cases} ۱ & x = r \\ ۰ & x \neq r \end{cases}$$

تعریف ۱-۱-۳: فرض کنید $\tilde{A} \in F(X)$. تکیه‌گاه $\tilde{A}$ را که با $supp\tilde{A}$ نشان می‌دهیم، بصورت $supp\tilde{A} = \left\{ x \in X \middle| \tilde{A}(x) > ۰ \right\}$ تعریف می‌شود.

تعریف ۱-۱-۴: فرض کنید $\tilde{A} \in F(X)$. دراین‌صورت یک $\alpha-$برش $\tilde{A}$ برای هر $\alpha \in (۰,۱]$ بصورت $\tilde{A}_\alpha = \left\{ x \in X \middle| \tilde{A}(x) \geq \alpha \right\}$ تعریف می‌شود.

تعریف ۱-۱-۵: فرض کنید $\tilde{A} \in F(X)$. ارتفاع $\tilde{A}$ را که با $hgt(\tilde{A})$ نشان می‌دهیم بصورت $hgt(\tilde{A}) = \sup_{x \in X} \tilde{A}(x)$ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱-۱-۶: فرض کنید $\tilde{A} \in F(X)$. در این صورت $\tilde{A}$ را نرمال گوییم هرگاه $hgt(\tilde{A}) = ۱$.

در نظریه مجموعه‌های فازی، اصل توسیع یکی از مفاهیم اساسی و کلیدی می‌باشد که اکنون به آن پرداخته می‌شود. این اصل، ابزار توانمندی برای گسترش و تعمیم عملگرهای جبری و تعریف آنها برای کمیت‌های فازی است.

فرض کنید که $f : X \rightarrow Y$ یک تابع و A زیر مجموعه‌ای از X باشد. لذا $f(A)$ زیر مجموعه‌ای از Y خواهد بود. حال می‌خواهیم f را طوری گسترش دهیم که بر یک زیرمجموعه فازی از X اثر کند. بنابراین انتظار داریم حاصل عمل f بر زیرمجموعه فازی مورد نظر، یک زیرمجموعه فازی از

Y باشد. به‌عبارت دیگر تابع f، تابع جدیدی بصورت زیر القاء کند که در آن $f(\widetilde{A})$ زیر مجموعه فازی از Y است:

$$\begin{aligned} f &: F(X) \to F(Y) \\ \widetilde{A} &\mapsto f(\widetilde{A}) \end{aligned} \qquad (۱-۲)$$

ابتدا شکل ساده اصل توسیع را بیان می‌کنیم، سپس با تعریف ضرب دکارتی فازی، شکل کلی آن را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱-۱-۷ (اصل توسیع): فرض کنید که X و Y دو مجموعه، $f : X \to Y$ یک تابع و $\widetilde{A}$ یک زیر مجموعه فازی از X باشد آنگاه f تابعی جدید بصورت (۱-۲) القاء می‌کند که در آن:

$$(f(\widetilde{A}))(y) = \begin{cases} \sup\limits_{y=f(x)} \widetilde{A}(x) & f^{-1}(y) \neq \phi \\ 0 & f^{-1}(y) = \phi \end{cases}$$

تعریف ۱-۱-۸ (ضرب دکارتی): فرض کنید که $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, ..., \widetilde{A}_n$ به‌ترتیب زیرمجموعه‌های فازی از مجموعه‌های مرجع $X_1, X_2, ..., X_n$ باشند، آنگاه حاصل ضرب دکارتی $\widetilde{A} = \widetilde{A}_1 \times \widetilde{A}_2 \times ... \times \widetilde{A}_n$ یک زیرمجموعه فازی از $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ می‌باشد که تابع عضویت آن بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$(\widetilde{A}_1 \times \widetilde{A}_2 \times ... \times \widetilde{A}_n)(x_1, x_2, ..., x_n) = \min_{1 \le i \le n} \{\widetilde{A}_i(x_i)\} \qquad \forall x_i \in X_i$$

تعریف ۱-۱-۹ (اصل توسیع تعمیم یافته):

فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع باشد که $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ و $\widetilde{A} = \widetilde{A}_1 \times \widetilde{A}_2 \times ... \times \widetilde{A}_n$ یک زیر مجموعه فازی از X باشد. در این صورت $\widetilde{B} = f(\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, ..., \widetilde{A}_n)$ یک زیرمجموعه فازی از Y است، که تابع عضویت آن بصورت زیرتعریف می‌شود:

$$\widetilde{B}(y)=\begin{cases}\sup\limits_{y=f(x_1,\dots,x_n)}(\min\limits_{1\le i\le n}\{A_i(x_i)\}) & f^{-1}(y)\neq\phi\\ 0 & f^{-1}(y)=\phi\end{cases}$$

همانطور که قبلاً اشاره کردیم به کمک اصل توسیع می‌توان عملگرهای جبری را روی کمیت‌های فازی تعریف کرد. به‌عبارت دیگر، عمل دوتایی $*:R\times R\to R$ را می‌توان به عمل دوتایی "$\otimes$" $\otimes:F(R)\times F(R)\to F(R)$ گسترش داد، ولی باید توجه داشت که این تعمیم‌ها تنها بعضی از خواص اعمال دوتایی معمولی را حفظ می‌کنند.

تعریف ۱-۱-۱۰: با به‌کار بردن اصل توسیع برای تابع $f:R\to R$ با ضابطه $f(x)=-x$، قرینه $\widetilde{A}$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$(f(\widetilde{A}))(y)=\sup_{y=f(x)}\widetilde{A}(x)=\sup_{y=-x}\widetilde{A}(x)=\widetilde{A}(-y)$$

به‌عبارت ساده‌تر برای هر $x\in R$ داریم:

$$(-\widetilde{A})(x)=\widetilde{A}(-x)$$

و اگر $f(x)=\frac{1}{x}$ آنگاه معکوس $\widetilde{A}$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$(f(\widetilde{A}))(y)=\sup_{y=f(x)}\widetilde{A}(x)=\sup_{y=\frac{1}{x}}\widetilde{A}(x)=\widetilde{A}(\frac{1}{y})$$

به‌عبارت دیگر برای هر $x\in R-\{0\}$ داریم:

$$(\frac{1}{\widetilde{A}})(x)=\widetilde{A}(\frac{1}{x})$$

و برای $x=0$ با توجه به تعریف ۱-۱-۸، $(\frac{1}{\widetilde{A}})(0)=0$. بنابراین بطور خلاصه:

$$(\frac{1}{\widetilde{A}})(x)=\begin{cases}\widetilde{A}(\frac{1}{x}) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

نتیجه ۱-۱-۱۱: با به کاربردن اصل توسیع برای تابع $f : R \to R$ با ضابطه $f(x) = r + x$، $r + \widetilde{A} \in F(R)$ بصورت زیر بدست می‌آید:

$$(f(\widetilde{A}))(y) = \sup_{y=f(x)} \widetilde{A}(x) = \sup_{y=r+x} \widetilde{A}(x) = \widetilde{A}(y-r)$$

به‌عبارت ساده‌تر برای هر $r \in R$ و $x \in R$ داریم:

$$(r+\widetilde{A})(x) = \widetilde{A}(x-r)$$

و اگر $f(x) = rx$ برای $r \in R$، آنگاه $r\widetilde{A} \in F(R)$ بصورت زیر بدست می‌آید:

$$(f(\widetilde{A}))(y) = \sup_{y=f(x)} \widetilde{A}(x) = \sup_{y=rx} \widetilde{A}(x) = \widetilde{A}(\frac{y}{r})$$

به‌عبارت ساده‌تر برای هر $r \in R - \{0\}$ و $x \in R$ داریم:

$$(r\widetilde{A})(x) = \widetilde{A}(\frac{x}{r})$$

۱-۲ تعمیم عمل جمع و ضرب روی کمیت‌های فازی

فرض کنید که $\widetilde{A}, \widetilde{B} \in F(R)$. کمیت فازی $\widetilde{A} \oplus \widetilde{B}$ را با استفاده از اصل توسیع برای تابع $f : R \times R \to R$ با ضابطه $f(x,y) = x + y$، می‌توان بصورت زیر بیان نمود:

$$(\widetilde{A} \oplus \widetilde{B})(z) = \sup_{z=x+y} (\min(\widetilde{A}(x), \widetilde{B}(y))) \qquad (۱-۳)$$

رابطه (۱-۳) به‌عنوان جمع دو کمیت فازی $\widetilde{A}$ و $\widetilde{B}$ در نظر گرفته می‌شود. همچنین با به کار بردن اصل توسیع برای تابع $f : R \times R \to R$ با ضابطه $f(x,y) = xy$، می‌توان کمیت فازی $\widetilde{A} \otimes \widetilde{B}$ را بصورت زیر بیان کرد:

$$(\widetilde{A} \otimes \widetilde{B})(z) = \sup_{z=xy} (\min(\widetilde{A}(x), \widetilde{B}(y))) \qquad (۱-۴)$$

همچنین رابطه (۱-۴) به‌عنوان تعریف ضرب دو کمیت فازی $\widetilde{A}$ و $\widetilde{B}$ در نظر گرفته می‌شود.

نتیجه ۱-۲-۱: فرض کنید که $r \in R - \{0\}$ و $\widetilde{A} \in F(R)$. آنگاه $r\widetilde{A} \in F(R)$ با به کار بردن اصل توسیع برای تابع $f : R \to R$ با ضابطه $f(x) = rx$ بصورت زیر بدست می‌آید:

$$(f(\widetilde{A}))(y) = \sup_{y=rx} \widetilde{A}(x) = \widetilde{A}(\frac{y}{r})$$

که با استفاده از رابطه (۱-۴) نتیجه می‌شود که برای هر $r \in R - \{0\}$ داریم $r\widetilde{A} = \widetilde{r} \otimes \widetilde{A}$. و برای $r = 0$ ملاحظه می‌شود که،

$$(\widetilde{0} \otimes \widetilde{A})(x) = \begin{cases} hgt(\widetilde{A}) & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

بنابراین بدیهی است که اگر $\widetilde{A}$ نرمال باشد آنگاه $\widetilde{0} \otimes \widetilde{A} = \widetilde{0}$.

قضیه ۱-۲-۲: عمل‌های $\oplus$ و $\otimes$ روی $F(R)$ دارای خاصیت جابه‌جایی و شرکت پذیری هستند. به‌عبارت دیگر اگر $\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C} \in F(R)$ آنگاه:

۱- $\widetilde{A} \otimes \widetilde{B} = \widetilde{B} \otimes \widetilde{A}$،

۲- $\widetilde{A} \oplus \widetilde{B} = \widetilde{B} \oplus \widetilde{A}$؛

۳- $\widetilde{A} \otimes (\widetilde{B} \otimes \widetilde{C}) = (\widetilde{A} \otimes \widetilde{B}) \otimes \widetilde{C}$؛

۴- $\widetilde{A} \oplus (\widetilde{B} \oplus \widetilde{C}) = (\widetilde{A} \oplus \widetilde{B}) \oplus \widetilde{C}$.

بنابراین $F(R)$ همراه با عمل جمع، نیم گروه جمعی جابه‌جائی با عضو خنثی $\widetilde{0}$ تشکیل می‌دهد، اما باید توجه داشت که $\widetilde{A}$ در $F(R)$ معکوس جمعی ندارد. همچنین $F(R)$ همراه با عمل ضرب تعمیم یافته، نیم گروه ضربی جابه‌جایی یکه‌دار تشکیل می‌دهد.

از طرف دیگر، انتظار می‌رود که $\frac{۱}{\widetilde{A}}$ تعریف شده در ۱-۱-۹ وارون ضربی $\widetilde{A}$ در $F(R)$ باشد. اما باید توجه داشت که در حالت کلی، $\widetilde{A}\otimes\frac{۱}{\widetilde{A}}$ برابر با $\widetilde{1}$ نمی‌باشد.

تعریف ۱-۲-۳: فرض کنید که $\widetilde{A}$ یک کمیت فازی باشد. $\widetilde{A}$را اکیداً مثبت (منفی) گویند، هرگاه $\widetilde{A}(x)=0$ برای هر $x \leq 0$ ($x \geq 0$). مجموعه این کمیت‌ها را با $F(R)^{0}$ نمایش می‌دهیم.

تذکر: فرض کنید که $\widetilde{A},\widetilde{B}\in F(R)$. تابع f را بصورت زیر در نظر بگیرید:

$$f:(R-\{0\})\times(R-\{0\})\rightarrow(R-\{0\})$$

$$f(x,y)=\frac{x}{y}$$

آنگاه با به کاربردن اصل توسیع برای تابع f ، می‌توان تقسیم دو کمیت فازی را بصورت زیر بدست آورد:

$$\begin{aligned}(\widetilde{A}\otimes\widetilde{B})(z)&=\sup_{z=\frac{x}{y}}(\min(\widetilde{A}(x),\widetilde{B}(y)))\\&=\sup_{x=zy}(\min(\widetilde{A}(x),\widetilde{B}(y)))\end{aligned} \tag{۱-۵}$$

بنابراین با توجه به تعریف ۱-۲-۳ و رابطه (۱-۵)، تقسیم دو کمیت فازی $\widetilde{A}\in F(R)$ و $\widetilde{B}\in F(R)^{0}$ نیز از رابطه (۱-۵) بدست می‌آید.

نتیجه ۱-۲-۴: اگر $\widetilde{A}\in F(R)$ و $\widetilde{B}\in F(R)^{0}$. آنگاه

۱- $\widetilde{A}\div\widetilde{B}=\widetilde{A}\otimes\frac{۱}{\widetilde{B}}$؛

۲- $\widetilde{A}\div\widetilde{1}=\widetilde{A}$؛

۳- $r\in R-\{0\}$ $\quad$ $\widetilde{A}\div\widetilde{r}=\frac{۱}{\widetilde{r}}\otimes\widetilde{A}=\frac{۱}{r}\widetilde{A}$.

۱-۳ حساب بازه‌ها

در ایـن بخـش، اعمـال حـسابی روی بـازه‌هـای بـسته شـرح داده‌مـی‌شـوند. سـپس بـا اسـتفاده از ایـن اعمـال حـسابی و برخـی از خـواص مجموعـه‌هـای فـازی و اعـداد فـازی، بـه تعریـف اعمـال حسابی روی اعداد فازی پرداخته می‌شود.

تعریف ۱-۳-۱: چهار عمل حسابی روی بازه‌های بسته بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$[a,b]\oplus[d,e]=[a+d,b+e] \tag{۱}$$

$$[a,b]\Theta[d,e]=[a-e,b-d] \tag{۲}$$

$$[a,b]\otimes[d,e]=[\min(ad,ae,bd,be),\max(ad,ae,bd,be)] \tag{۳}$$

(۴) مشروط بر این‌که $\cdot\notin[d,e]$، آنگاه:

$$[a,b]\div[d,e]=[a,b]\otimes[\frac{۱}{e},\frac{۱}{d}]=[\min(\frac{a}{e},\frac{a}{d},\frac{b}{e},\frac{b}{d}),\max(\frac{a}{e},\frac{a}{d},\frac{b}{e},\frac{b}{d})]$$

هر عدد حقیقی r را می‌توان با $[r,r]$ نمایش داد که آن را بازه مولد می‌نامیم. همچنین اگر یکی از بازه‌ها در هر یک از موارد چهارگانه فوق ، بازه مولد باشد، آنگاه حالت خاصی از اعمال حسابی را خواهیم داشت.

به‌علاوه اگر، هر دو بازه ، بازه‌های مولد باشند، حساب معمولی اعداد حقیقی را نیز خواهیم داشت.

در این بخش، برخی از خواص اعمال حسابی روی بازه‌های بسته را شرح می‌دهیم. برای این منظور فرض کنید که:

$$\cdot=[\cdot,\cdot],\quad ۱=[۱,۱],\quad A=[a_۱,a_۲],\quad B=[b_۱,b_۲],\quad C=[c_۱,c_۲]$$

نتیجه ۱-۳-۲: با توجه به مفروضات فوق، خواص زیر برقرار هستند:

۱. جابه‌جایی: $A\oplus B=B\oplus A,\qquad A\otimes B=B\otimes A$

۲. شرکت پذیری: $(A\oplus B)\oplus C = A\oplus(B\oplus C), \qquad (A\otimes B)\otimes C = A\otimes(B\otimes C)$

۳. عضو همانی: $A = 0\oplus A = A\oplus 0, \qquad A = ۱\otimes A = A\otimes ۱$

۴. زیر پخشی: $A\otimes(B\oplus C)\subseteq (A\otimes B)\oplus(A\otimes C)$

۵. پخشی: اگر $bc \geq ۰$ برای هر $b\in B$ ، $c\in C$ آنگاه:

$$A\otimes(B\oplus C) = (A\otimes B)\oplus(A\otimes C)$$

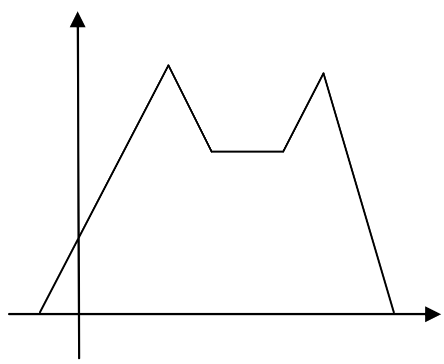
و اگر $A=[a,a]$ آنگاه $a(B\oplus C) = aB\oplus aC$.

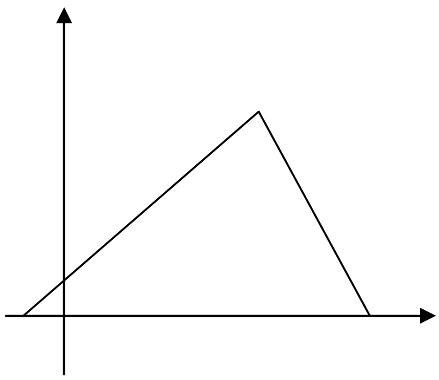
۱-٤ کمیت‌های فازی محدب

در این بخش، مقدمات لازم را برای بحث پیرامون اعداد فازی ارائه خواهیم داد. برای معرفی اعداد فازی، به‌خواص ویژه‌ای از کمیت‌های فازی نیاز داریم که به تفصیل در مورد آنها صحبت خواهیم کرد.

تعریف ۱-۴-۱: کمیت فازی $\widetilde{A}$ را محدب گویند اگر همه α-برش‌های $\widetilde{A}$ محدب باشند. یا به‌عبارتی α-برش‌های آن بازه باشند. در غیر این صورت آن را غیر محدب گویند.

قضیه ۱-۴-۲: کمیت فازی $\widetilde{A}$ محدب است اگر و تنها اگر برای هر $y\in[x,z]$ داشته باشیم $\widetilde{A}(y)\geq \min(\widetilde{A}(x),\widetilde{A}(z))$.





الف: کمیت فازی غیر محدب.   ب: کمیت فازی محدب.

شکل ۱-۱: نمایشی از کمیت‌های فازی محدب و غیر محدب.

قضیه ۱-۴-۳: اگر $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ کمیت‌های فازی محدب باشند آنگاه $\tilde{A}\oplus\tilde{B}$، $\tilde{A}\otimes\tilde{B}$ و $-\tilde{A}$ نیز کمیت‌های محدب خواهند بود.

قضیه ۱-۴-۴: $\tilde{A}$ کمیت فازی محدب مثبت (منفی) است اگر و تنها اگر $\frac{1}{\tilde{A}}$ محدب باشد.

مثال عددی ۱: فرض کنید که $\tilde{A}$ کمیت فازی محدب با تابع عضویت زیر باشد:

$$\tilde{A}(x)=\begin{cases} x+1 & -1\le x\le 0 \\ 1-x & 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

بنابراین $\frac{1}{\tilde{A}}$ بصورت زیر محاسبه خواهد شد:

$$(\frac{1}{\tilde{A}})(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}+1 & x\le -1 \\ 1-\frac{1}{x} & x\ge 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

که $\frac{1}{\tilde{A}}$ با توجه به شکل ۱-۲، محدب نخواهد بود.