بسم الله الرّحمن الرّحیم

دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایاننامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشتهی

ریاضی محض، گرایش جبر

عنوان

زیرگروه جابجاگر و مرکزساز یک اتومورفیسم

استاد راهنما

دکتر محمد حسین جعفری

استاد مشاور

دکتر محمد شهریاری

پژوهشگر

فریا طلوعی

بهمن۱۳۹۳

تقدیم به:

پدر، مادر

برادر و همسرم

بنام خدا

و مَن لَمْ یَشْکُر الْمَخلوق لَمْ یَشْکُر الْخالِقْ.

سپاس و ستایش پروردگار متعال را که به اینجانب توفیق تلاش در راه کسب علم و دانش را عطا فرمود. امیدوارم بتوانم آموخته‌هایم را در راه پیشرفت علمی وطن خویش مورد استفاده قرار دهم.
در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر **محمد حسین جعفری**، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم که قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده‌ی ایشان این مجموعه به انجام نمی‌رسید.
از جناب آقای دکتر**محمد شهریاری** استاد مشاور این رساله کمال تشکر را دارم.
از جناب آقای دکتر حمید موسوی که داوری این رساله را با نهایت دقت و صرف وقت زیاد انجام دادند، تشکر می‌نمایم.
از کلیه اساتید گرامی به خصوص جناب آقای دکتر اصغر رنجبری مدیر گروه ریاضی محض و جناب آقای دکتر مرتضی فغفوری نهایت تشکر را دارم که در مدت تحصیلات دانشگاهی اینجانب زحمات فراوانی را متحمل شدند.
پدرم، چشم‌های نگرانت را که خورشید لحظات تاریک زندگیم بودند، هرگز از یاد نخواهم برد. مادرم، به وسعت نام مادر دستانت را بوسه باران می‌کنم. اسطوره های جاودان زندگیم متشکرم. و قدردان و سپاسگزار همسرم هستم که همیشه حامی و پشتیبانم بوده است.

فریا طلوعی
بهمن ۱۳۹۳

نام خانوادگی دانشجو: طلوعی نام: فریا

عنوان: زیرگروه جابجاگر و مرکزساز یک اتومورفیسم

استاد راهنما : دکتر محمد حسین جعفری

استاد مشاور : دکتر محمد شهریاری

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: جبر دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: بهمن۱۳۹۳ تعداد صفحات: ۵۶

کلید واژه‌ها: گروه چنددوری، گروه متاآبلی، اتومورفیسم، نقاط ثابت، پوچتوان

چکیده

فرض کنیم φ یک اتومورفیسم از گروه G باشد. در این پایان نامه مرکزساز φ در G به صورت $C_G(\varphi) = \{x \in G | \varphi(x) = x\}$ و جابجاگر φ در G را با نماد $[G,\varphi]$ نشان داده و به صورت $[G,\varphi] = \langle x^{-1}\varphi(x) | x \in G\rangle$ تعریف می‌کنیم. در فصل ۲ عمل $C_G(\varphi)$ روی زیرگروه جابجاگر $[G,\varphi]$ را وقتی که G چنددوری یا متاآبلی باشد مورد بررسی قرار داده ایم. نتایج مهمی که بر اساس این عمل به دست می‌آید عبارتند از:

قضیه (۱) : اگر φیک اتومورفیسم از مرتبه ۲ از یک گروه چنددوری G و $C_G(\varphi)$ متناهی باشد آنگاه $[G,\varphi]'$ نیز متناهی است.

قضیه (۲) : اگر φ یک اتومورفیسم از یک گروه چنددوری G و $C_G(\varphi)$ متناهی باشد آنگاه $G/[G,\varphi]$ نیز متناهی است.

قضیه (۳) : اگر φ یک اتومورفیسم از مرتبه متناهی از گروه چنددوری G باشد آنگاه اندیس $C_G(\varphi)[G,\varphi]$ در G متناهی است.

فهرست مطالب

مقدمه

این پایان نامه بر اساس مرجع [۳] تهیه و تنظیم شده است. تمام تعاریف و نمادها استاندارد هستند و می‌توان به [۱۰] و [۱۱] رجوع کرد. فرض کنیم φ یک اتومورفیسم از گروه G باشد و زیرگروه مرکزساز G را به‌صورت $C_G(\varphi) = \{x \in G | \varphi(x) = x\}$ و زیرگروه جابجاگر G را به شکل $[G,\varphi] = \langle x^{-1}\varphi(x) | x \in G\rangle$ تعریف می‌کنیم و ثابت می‌کنیم $[G,\varphi] \trianglelefteq G$.
تحت مفروضات مربوط، این یک حقیقت است که $C_G(\varphi)$ در بعضی از نتایجی که از G به دست می‌آید، زیرگروه کوچکی است. به ویژه این نکته در مورد $[G,\varphi]'$ و $\frac{G}{[G,\varphi]}$ صادق است. برای مثال در مرجع [۱] بلیاو[1] و سیسیکین [2]ثابت کرده‌اند که اگر G موضعاً متناهی باشد و اگر φ از مرتبه ۲ باشد بادر نظرگرفتن متناهی بودن $C_G(\varphi)$، متناهی بودن $[G,\varphi]'$ و $\frac{G}{[G,\varphi]}$ نیز به دست می‌آید. دیگر نتایج نیز از مرجع [۱۲] با بررسی عمل $C_G(\varphi)$ بر روی G ، $\frac{G}{[G,\varphi]}$ و $[G,\varphi]'$ استخراج می‌شود.
در این پایان نامه بررسی‌ها بیشتر در زمینه‌ای صورت گرفته است که G را متاآبلی و یا چنددوری در نظرگرفته‌ایم. نشان خواهیم داد که نتیجه بلیاو و سیسیکین، که قبلاً ذکر شد زمانی ارزشمند است که G را چنددوری در نظر بگیریم.

[1] Belyaev

[2] Sesekin

فصل ۱

تعاریف، لم‌ها و قضایای مقدماتی

۱.۱ مفاهیم مقدماتی نظریه گروه‌ها

در این فصل مفاهیم ضروری و اولیه نظریه گروه‌ها را مرور خواهیم کرد و برخی مفاهیم بدون اثبات بیان خواهد شد، چرا که هدف یادآوری مفاهیمی است که در این پایان نامه به آنها نیاز خواهیم داشت.

تعریف ۱.۱.۱. اگر G یک گروه باشد و $\varphi : G \longrightarrow G$ یک هomomorfism پوشا و یک به یک باشد، دراین صورت φ یک اتومورفیسم است.
مجموعه همه اتومورفیسم‌های G را با $Aut(G)$ نشان می‌دهیم.

می‌دانیم که $Aut(G)$ با عمل ترکیب توابع یک گروه می‌باشد و عضو خنثی آن اتومورفیسم همانی است.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد. دو عضو a و b از G را مزدوج گوییم هرگاه $g \in G$ موجود باشد به‌طوری‌که $g^{-1}ag = b$. به جای $g^{-1}ag$ از نماد a^g استفاده می‌کنیم.

تعریف ۳.۱.۱. به ازای هر g از G، تابع $\varphi_g : G \longrightarrow G$ با ضابطه ی $\varphi_g(x) = x^g$ یک اتومورفیسم G است. این اتومورفیسم را اتومورفیسم داخلی[۱] G القا شده توسط g می‌نامیم.
مجموعه اتومورفیسم‌های داخلی G را با $Inn(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۴.۱.۱. اگر $X \subseteq G$ مرکزساز X در G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$C_G(X) := \{g \in G \mid \forall x \in X; gx = xg\}$$

تعریف ۵.۱.۱. اگر$X \subseteq G$، نرمالساز X در G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$N_G(X) := \{g \in G \mid g^{-1}Xg = X\}$$

[۱] Inner automorphism

تعریف ۶.۱.۱. اگر

$$H \leq G\ ,\ \forall \varphi \in Aut(G) : \varphi(H) \subseteq H$$

آنگاه H را زیرگروه مشخصه G گویند و با نماد $H \text{ ch } G$ نشان می‌دهند.

تعریف ۷.۱.۱. اگر $H \leqslant G$ آنگاه $Core_G(H) := \bigcap g^{-1}Hg := H_G$

از خواص مشخصه $Core$ می‌توان به موارد زیر اشاره کرد :

$$(1)\ H_G \trianglelefteq G, H_G \subseteq H$$

$$(2)\ N \trianglelefteq G, N \subseteq H \Longrightarrow N \subseteq H_G$$

یعنی H_G بزرگترین زیرگروه نرمال G است که در داخل H قرار دارد.

قضیه ۸.۱.۱. ***(قضیه برج)*** *فرض کنیم* $H \leq K \leq G$ *در این صورت داریم :*

$$|G:H| = |G:K|.|K:H|$$

قضیه ۹.۱.۱. ***(قضیه پوانکاره)*** G *یک گروه و* A *و* B *زیرگروه‌های آن باشند داریم :*

$$|G:A\bigcap B| \leq |G:A||G:B|$$

قضیه ۱۰.۱.۱. ***(قضیه اول ایزومورفیسم)*** *فرض کنیم* $\varphi : G \longrightarrow H$ *یک هomomorfism پوشا باشد* *و* $N = ker\varphi$. *در این‌صورت* $H \cong \dfrac{G}{N}$.

برهان. رجوع شود به قضیه ۲۴.۳ از مرجع[۱۱].

قضیه ۱۱.۱.۱. ***(قضیه دوم ایزومورفیسم)*** *فرض کنیم* $H \leq G\ ,\ N \trianglelefteq G\ ,\ N \subseteq HN \leq G$ *آنگاه داریم*

$$\frac{HN}{N} \cong \frac{H}{H \cap N}.$$

برهان. رجوع شود به قضیه ۴۰.۳ از مرجع [۱۱]. □

قضیه ۱۲.۱.۱. **(*قضیه سوم ایزومورفیسم*)** *فرض کنیم* $N \trianglelefteq G\ ,\ M \trianglelefteq G\ ,\ N \subseteq M$ *در این‌صورت داریم*

$$\frac{G}{M} \cong \frac{(G/N)}{(M/N)}.$$

برهان. رجوع شود به قضیه ۳۰.۳ از مرجع [۱۱]. □

قضیه زیر که به قضیه تناظر [۲] معروف است، اطلاعاتی از ساختار گروه‌های خارج قسمت مانند زیرگروه‌ها، زیرگروه‌های نرمال و اندیس زیرگروه‌ها به دست می‌دهد.

قضیه ۱۳.۱.۱. **(*قضیه تناظر*)** *فرض کنیم* $N \subseteq H_2\ ,\ N \subseteq H_1\ ,\ H_1, H_2 \leq G$ *و* $N \trianglelefteq G$ *داریم :*

$$1)\ L \leq \frac{G}{N} \Longrightarrow \exists H \leq G, N \subseteq H, L = \frac{H}{N}$$
$$2)\ H_1 \subseteq H_2 \Longleftrightarrow \frac{H_1}{N} \subseteq \frac{H_2}{N}$$
$$3)\ H_1 \trianglelefteq H_2 \Longleftrightarrow \frac{H_1}{N} \trianglelefteq \frac{H_2}{N}$$
$$4)\ H_1 \subseteq H_2 \Longrightarrow |H_2 : H_1| = |\frac{H_2}{N} : \frac{H_1}{N}|$$

تعریف ۱۴.۱.۱. گوییم G آبلی مقدماتی است هرگاه آبلی بوده و هر عضو غیرهمانی آن از مرتبه عدد اول p باشد.

تعریف ۱۵.۱.۱. X را φ-پایا گوییم هرگاه :

$$\forall x \in X : \varphi(x) \in X \text{ یا } \varphi(X) \subseteq X$$

تعریف ۱۶.۱.۱. فرض کنیم π مجموعه‌ای از اعداد اول باشد، n را یک π-عدد گوییم اگر و تنها اگر به ازای هر عدد اول p که $p|n$ داشته باشیم $p \in \pi$.

n را یک π'-عدد گوییم اگر و تنها اگر به ازای هر p که $p|n$ داشته باشیم $p \notin \pi$.

[۲] Correspondence

تعریف ۱.۱.۱۷. فرض کنیم π یک زیرمجموعه دلخواه از اعداد اول باشد. زیرگروه H از G را π- زیرگروه گوییم هرگاه $|H|$ یک π عدد باشد. همچنین اگر $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_t^{\alpha_t} \in \mathbb{Z}^+$ و $\pi = \{p_1, ..., p_j\}$، آنگاه π- قسمت n عبارتست از $n_\pi = p_1^{\alpha_1}....p_j^{\alpha_j}$ و π'- قسمت n عبارتست از $n_{\pi'} = p_{j+1}^{\alpha_{j+1}}...p_t^{\alpha_t}$.

تعریف ۱.۱.۱۸. گروه G را حاصلضرب نیم مستقیم داخلی H و K گویند هرگاه

$$(1)\ G = HK$$

$$(2)\ H \leq G, K \trianglelefteq G$$

$$(3)\ H \bigcap K = 1$$

و با نماد $G = H \ltimes K$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱.۱.۱۹. گروه G یک گروه تابدار است درصورتی‌که هر عضو آن از مرتبه متناهی باشد. گروه G آزاد تاب است اگر بجز عضو همانی عضوی از مرتبه متناهی نداشته باشد.

تعریف ۱.۱.۲۰. اگر φ یک اتومورفیسم از گروه G باشد، مرکزساز φ در G به صورت زیر تعریف می‌شود

$$C_G(\varphi) = \{x \in G \mid \varphi(x) = x\}.$$

تعریف ۱.۱.۲۱. اتومورفیسم φ را تقریبا منظم گویند هرگاه $C_G(\varphi)$ متناهی باشد.

تعریف ۱.۱.۲۲. اتومورفیسم φ از گروه G بدون نقطه ثابت گفته می‌شود هرگاه فقط عضو بدیهی ۱ تنها عضو نقطه ثابت از φ باشد. به عبارت دیگر $C_G(\varphi) = 1$.

تعریف ۱.۱.۲۳. اتومورفیسم φ از یک گروه G شکافنده از مرتبه n گفته می‌شود، اگر φ^n اتومورفیسم همانی باشد و برای هر x عضو G داشته باشیم $x\varphi(x)\ldots\varphi^{(n-1)}(x) = 1$.

تعریف ۱.۱.۲۴. فرض کنیم q یک عدد اول باشد. اگر G گروه آبلی باشد اعضای q-اولیه از Gرا به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$G_q = \{g \in G \mid o(g) < \infty \ , \ \exists m \geq 1 \ : \ o(g) | q^m\}.$$

تعریف ۲۵.۱.۱. اگر $A \trianglelefteq G$ و یک زیرگروه از G مانند B وجود داشته باشد، به‌طوری‌که $G = AB \ , \ A \bigcap B = 1$. در این‌صورت G را یک توسیع شکافنده از A، توسط B گویند.

۲.۱ عمل گروه روی مجموعه

تعریف ۱.۲.۱. اگر G یک گروه و Ω یک مجموعه ناتهی باشد، گوییم G روی Ω عمل می‌کند(از راست) هرگاه تابعی مانند

$$\bullet : \Omega \times G \longrightarrow \Omega$$

$$(\alpha, g) \longrightarrow \alpha.g$$

وجود داشته باشد به‌طوری‌که :

$$1) \ \forall \alpha \in \Omega \qquad \alpha.1 = \alpha$$

$$2) \ \forall \alpha \in \Omega, \forall g, h \in G \qquad (\alpha.g).h = \alpha.(gh)$$

تعریف ۲.۲.۱. روی مجموعه Ω یک رابطه هم ارزی به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \exists g \in G \ ; \ \beta = \alpha g.$$

کلاس هم ارزی $\alpha \in \Omega$ را با α^G یا O_α نشان می‌دهیم، که به آن مدار α گوییم. داریم

$$\alpha^G = \{\beta \in \Omega \mid \alpha \sim \beta\}.$$

۳.۱ جابجاگر

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد. G' را زیرگروه مشتق G می‌نامیم و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$G^{(1)} = G' = \langle [x,y] \mid x,y \in G \rangle = \langle x^{-1}y^{-1}xy \mid x,y \in G \rangle \,.$$

به همین ترتیب $G^{(2)}$، $G^{(3)}$ و ... تعریف می‌گردد

$$G^{(2)} = (G')' = \langle [t,s] \mid t,s \in G' \rangle.$$

و مشابهاً $G^{(m)} = (G^{(m-1)})'$.

تعریف ۲.۳.۱. گروه G را متاآبلی گویند هرگاه $G'' = 1$، به‌طور معادل G متاآبلی است هرگاه G شامل یک زیرگروه مانند N باشد که N و G/N آبلی باشند.

قضیه ۳.۳.۱. *فرض کنیم G یک گروه باشد و $a,b,c \in G$. در این صورت*

1) $[a,b] = 1 \Leftrightarrow ab = ba$

2) $[a,b]^{-1} = [b,a]$

3) $a^b = a[a,b]$

4) $[a,bc] = [a,c][a,b]^c$

5) $[ab,c] = [a,c]^b[b,c]$

6) $[x,y^{-1},z]^y.[y,z^{-1},x]^z.[z,x^{-1},y]^x = 1$

برهان. رجوع شود به قضیه ۱.۴.۳ از مرجع[۱۱]. □

قضیه ۴.۳.۱. *فرض کنیم $N \trianglelefteq G$. در این‌صورت G/N آبلی است اگر و تنها اگر $G' \subseteq N$.*

برهان. رجوع شود به قضیه ۵۲.۳ از مرجع [۱۱]. □

تعریف ۵.۳.۱. فرض کنیم H و K دو زیرگروه از G باشند. در این‌صورت جابجاگر H و K را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$[H,K] = \langle [h,k] : h \in H, k \in K \rangle.$$

گزاره ۶.۳.۱. *فرض کنیم H و K دو زیرگروه از G باشند. در این‌صورت*

1) $[H,K] = 1 \Leftrightarrow K \subseteq C_G(H)$ یا $H \subseteq C_G(K)$

2) $[H,K] \subseteq K \Leftrightarrow H \subseteq N_G(K)$

3) $[H,G] \subseteq H \Leftrightarrow H \trianglelefteq G$

4) $[H,K] = [K,H]$

برهان. رجوع شود به فصل ۴ از مرجع [۶]. □

تعریف ۷.۳.۱. فرض کنیم $H_1, H_2, \ldots H_n$ زیرگروه هایی از G باشند. در این‌صورت برای $n \geq 3$ جابجاگر H_n ها به صورت

$$[H_1, H_2, \ldots H_n] := \big[[H_1, H_2, \ldots H_{n-1}], H_n\big]$$

تعریف می‌شود.

تعریف ۸.۳.۱. اگر φ یک اتومورفیسم از گروه G باشد، زیرگروه جابجاگر φ در G را با نماد $[G,\varphi]$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$[G,\varphi] = \langle x^{-1}\varphi(x) \mid x \in G \rangle.$$

۴.۱ گروه‌های حلپذیر، پوچتوان و چنددوری

تعریف ۱.۴.۱. دنباله $\{A_k\}_{k=0}^{n}$ از زیرگروه‌های G به‌طوری‌که $1 = A_0 \subseteq A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_n = G$ را یک سری زیرنرمال گویند هرگاه :

$$\forall\ 0 \le i \le n-1 : \qquad A_i \trianglelefteq A_{i+1}$$

تعریف ۲.۴.۱. گروه G را چنددوری گوییم هرگاه یک سری زیرنرمال با عامل‌های دوری داشته باشد.

تعریف ۳.۴.۱. گروه G را حلپذیر گوییم هرگاه سری نرمالی مانند $1 = G_0 \leqslant G_1 \leqslant \ldots \leqslant G_r = G$ وجود داشته باشد به طوری‌که به ازای هر $1 \le i \le r$، گروه G_i/G_{i-1} آبلی باشد.

تعریف ۴.۴.۱.

$$\begin{cases} Z_0(G) := \{1\} = 1 \\ Z_{n+1}(G) := \{x \in G \mid \forall y \in G : [x,y] \in Z_n(G)\}\ ,\ \forall n \ge 0 \end{cases}$$

که $\{Z_n(G)\}_{n=0}^{\infty}$ را سری مرکزی بالایی G گویند.

تعریف ۵.۴.۱. گروه G را پوچتوان گوییم هرگاه دارای سری نرمال مرکزی باشد. به عبارت دیگر وجود دارد$\{N_i\}_{i=0}^{r}$

$$(1)\ \forall 0 \le i \le r :\ N_i \trianglelefteq G$$

$$(2)\ 1 = N_0 \subseteq N_1 \subseteq \ldots \subseteq N_r = G$$

$$(3)\ \forall 1 \le i \le r :\ \frac{N_i}{N_{i-1}} \subseteq Z\Big(\frac{G}{N_{i-1}}\Big)$$

اگر G پوچتوان باشد آنگاه کوچکترین عدد صحیح نامنفی n که $Z_n(G) = G$ را کلاس (رده) پوچتوانی G گویند و با نماد $c(G)$ نشان می‌دهند.

۱) گروه G دارای کلاس پوچتوانی صفر است اگر و تنها اگر $G = 1$

۲) G دارای کلاس پوچتوانی یک است اگر و تنها اگر G آبلی و $G \neq 1$

۳) G دارای کلاس پوچتوانی ۲ است اگر و تنها اگر G غیر آبلی و $G' \subseteq Z(G)$.

تعریف ۶.۴.۱. گروه G را موضعاً پوچتوان گوییم هرگاه هر زیرگروه متناهی مولد G پوچتوان باشد.

تمام گروه‌های آبلی، پوچتوانند و همه گروه‌های پوچتوان، حلپذیرند.

گروه‌های ساده غیر آبلی حلپذیر نیستند. گروه S_3 حلپذیر است ولی پوچتوان نیست.

قضیه ۷.۴.۱. ۱) *فرض کنیم G یک گروه پوچتوان باشد. در این صورت همه زیرگروه‌ها و گروه‌های خارج قسمتی G پوچتوانند.*

۲) *فرض کنیم G یک گروه حلپذیر باشد. در این صورت همه زیرگروه‌ها و گروه‌های خارج قسمتی G حلپذیرند.*

برهان. رجوع شود به قضیه ۴۶.۷ از مرجع[۱۱]. □

قضیه ۸.۴.۱. *اگر G یک گروه چنددوری باشد آنگاه G متناهی مولد است.*

برهان. رجوع شود به نکته ۳۸۷ از مرجع [۱۱]. □

قضیه ۹.۴.۱. *فرض کنیم G یک گروه چنددوری باشد. در این صورت همه زیرگروه‌ها و گروه‌های خارج قسمتی G چنددوری هستند.*

برهان. رجوع شود به نکته ۳۸۷ از مرجع [۱۱]. □

قضیه ۱۰.۴.۱. *در هر سری از یک گروه چنددوری تعداد عامل‌های دوری نامتناهی، که ایزومورف با $\mathbb{Z}$ هستند، عددی ثابت است که به آن عدد هرش[۳] می‌گویند.*

برهان. رجوع شود به بخش ۴.۵ از مرجع[۱۰]. □

[۳] Hirsch length

گزاره ۱.۴.۱۱. *اگر N یک زیرگروه نرمال از یک گروه چنددوری G باشد آنگاه*

$$h(G) = h(N) + h(G/N).$$

در صورتی‌که $h(X)$ نشان دهنده عدد هرش X باشد. نتیجه می‌گیریم

$$h(G) = h(G/N)$$

اگر و فقط اگر N متناهی باشد.

قضیه ۱.۴.۱۲. *گروه‌های چنددوری تقریباً یک سری با عامل‌های دوری نامتناهی دارند. به عبارت دیگر هر گروه چنددوری زیرگروه نرمالی دارد که این زیرگروه شامل یک سری با عامل‌های دوری نامتناهی است و این زیرگروه از اندیس متناهی است.*

برهان. رجوع شود به قضیه ۱.۳.۴ از مرجع [۹]. □

قضیه ۱.۴.۱۳. *فرض کنیم H زیرگروه نرمال متناهی مولد از گروه G باشد و K یک زیرگروه نرمال از اندیس متناهی در H باشد. دراین‌صورت $Core_G(K)$ اندیس متناهی در H دارد.*

برهان. رجوع شود به قضیه ۱.۳.۷ از مرجع [۹]. □

لم ۱.۴.۱۴. *فرض کنیم G یک گروه چنددوری نامتناهی باشد؛ آنگاه G شامل یک زیرگروه مشخصه آبلی A است که آزادتاب نامتناهی است.*

برهان. گروه G شامل یک زیرگروه آزادتاب نرمال مانند K از اندیس متناهی است. [رجوع شود به قضیه ۱.۴.۱۲] و K می‌تواند به عنوان زیرگروه مشخصه انتخاب شود [رجوع شود به لم ۱.۴.۱۳]. بنابراین می‌توان A را آخرین جمله غیر بدیهی از سری مشتق K در نظر گرفت. □

۵.۱ مفاهیم مقدماتی گروه‌های نامتناهی

تعریف ۱.۵.۱. $\mathfrak{X}$ را یک کلاس از گروه‌ها می‌نامیم هرگاه :

۱) $\{1\} \in \mathfrak{X}$

۲)اگر G وH دو گروه باشند؛ به‌طوری‌که $G \cong H$ و $G \in \mathfrak{X}$آنگاه $H \in \mathfrak{X}$

اعضای کلاس $\mathfrak{X}$ را $\mathfrak{X}$- گروه می‌گویند.

تعریف ۲.۵.۱. فرض کنیم $\mathfrak{X}$ و $\mathfrak{Y}$ دو کلاس گروهی باشند ضرب این دو کلاس را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\mathfrak{X}.\mathfrak{Y} = \{G \mid \exists N \trianglelefteq G\,;\ N \in \mathfrak{X}\,,\ G/N \in \mathfrak{Y}\}$$

تبصره ۳.۵.۱. *اگر $\mathfrak{X}$ و $\mathfrak{Y}$ دو کلاس باشند، $\mathfrak{X}\,\mathfrak{Y}$ نیز یک کلاس از گروه‌ها خواهد بود.*

قرارداد ۴.۵.۱. کلاس گروه‌های متناهی را با نماد $\mathfrak{F}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۵.۵.۱. کلاس $\mathfrak{X}\mathfrak{F}$ کلاس $\mathfrak{X}$-گروه‌ها در کلاس گروه‌های متناهی است، که آن را تقریبا $\mathfrak{X}$- گروه ها یا مجازا $\mathfrak{X}$- گروه‌ها می‌نامند.

تعریف ۶.۵.۱. نگاشت یا تابعی که به هر کلاس از گروه‌ها یک کلاس از گروه‌ها را نسبت دهد، یک نگاشت کلاسی [۴] می‌گویند.

تعریف ۷.۵.۱. نگاشت A را یک عملگر بستاری گویند، هرگاه A نگاشت کلاسی بوده و دارای شرایط زیر باشد:

1) $AI = I$

2) $\forall \mathfrak{X}\,;\ \mathfrak{X} \subseteq A\mathfrak{X}$

[۴] Class map

3) $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Y} \Rightarrow A\mathfrak{X} \subseteq A\mathfrak{Y}$

4) $\forall \mathfrak{X}$; $A(A\mathfrak{X}) = A\mathfrak{X}$

کلاس $\mathfrak{X}$ را A-بسته گوییم هرگاه $A\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$.

عملگر Q را به این شکل تعریف می‌کنیم

$$Q\mathfrak{X} = \{G \mid \exists H \in \mathfrak{X},\ \exists N \trianglelefteq H; \frac{H}{N} \cong G\}$$

کلاس $\mathfrak{X}$ را خارج قسمت بسته گوییم هرگاه $Q\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$.