بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده‌ی علوم ریاضی

پایان‌نامه‌ی دوره‌ی کارشناسی ارشد ریاضی محض

مدول‌های شبه‌بئر

نگارش:

ساناز فولاد

استاد راهنما:

دکتر سید احمد موسوی

بهمن ماه ۱۳۹۱

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

که موفقیتهایم مرهون محبتهای بی‌دریغ ایشان است.

تشکر و قدردانی

حمد و سپاس خدای را، آن نخستین بی‌پیشین را و آن آخرین بی‌پسین را، خداوندی را که آفریدگان را به قدرت خود ابداع کرد و به مقتضای مشیت خویش جامه‌ی هستی پوشید و به همان راه که ارادت او بود روان داشت و رهسپار طریق محبت خویش گردانید.

اکنون که به فضل خدا، نگارش این پایان‌نامه به پایان رسیده، بر خود لازم می‌دانم که از زحمات استاد راهنمای صبـور، خوش‌خلق و ارزش‌مندم، جناب آقای دکتر «سید احمد موسوی» سپاس‌گزاری کنم، و نهایت سعادت‌مندی و بهروزی را برای ایشان، از درگاه حق‌تعالی مسألت دارم. هم‌چنین بر خود فرض می‌دانم، مراتب قدردانی و سپاس خود را از اساتید بزرگوار، آقای دکتر «علی رجایی» ، آقای دکتر «سید حمید حاج سید جوادی» و آقای دکتر «سید محمد باقری» به خاطر قبول زحمت داوری این رساله، ابراز دارم.

آخرین، اما نه کمترین؛ از خانواده‌ی عزیزم، به خصوص پدر و مادر نازنینم، که همواره از همراهی و سعه‌ی صدرشان بهره‌مند بوده‌ام، بسیار سپاس‌گزارم.

چکیده

در این پایان نامه به مطالعه‌ی ''مدول‌های دوگان‌بئر'' و ''دوگان مدول‌های ریکارت'' بر مبنای مقاله‌های ذیل می پردازیم:

D. Keskin Tutuncu and R. Tribak , *On T-nonsingular Modules* , Glasgow Math. J., 52 (2010) ,261-269 .

G. Lee; S. Tariq Rizvi and C. Roman, *Dual Rickart modules*, Communications in Algebra, 39:(2011) 4036-4058.

تعدادی قضیه‌ی سرشت نمائی برای مدول‌های ریکارت ارائه شده و نشان داده شده است که خانواده حلقه‌های R که هر R-مدول راست مدول دوگان‌ریکارت باشد، دقیقا حلقه‌های نیمساده‌ی آرتینی می‌باشند. همچنین خانواده حلقه‌های R که هر R-مدول راست آزاد متناهی مولد مدول دوگان‌ریکارت باشد، دقیقا حلقه‌های منظم فان نیومن می‌باشند. به علاوه خانواده حلقه‌های R که هر R-مدول راست تزریقی مدول دوگان‌ریکارت باشد، دقیقا حلقه‌های موروثی راست هستند. نشان می‌دهیم که حلقه‌ی درون ریختی‌های یک مدول دوگان‌ریکارت، حلقه‌ی ریکارت چپ است و شرایطی را ارائه خواهیم کرد که تحت آن ها عکس این مطلب درست باشد. ثابت خواهیم کرد که مدول دوگان‌ریکارتی که حلقه‌ی درون ریختی‌های آن فاقد مجموعه‌ی نامتناهی از خودتوان‌های متعامد ناصفر است، یک مدول دوگان‌بئر است. قضیه‌ای ساختاری برای مدول‌های دوگان‌ریکارت متناهی مولد روی حلقه‌های نوتری جابجایی ارائه می گردد. نشان می‌دهیم در حالی که یک جمعوند مستقیم مدول دوگان‌ریکارت، این خاصیت را به ارث می‌برد، جمع مستقیم مدول‌های دوگان‌ریکارت لزوما اینچنین نیستند. به علاوه مدول T-ناهم‌منفرد و K-مدول‌ها معرفی می گردند. ثابت شده است که مدول M اتقاء پذیر و T-ناهم‌منفرد است اگر و تنها اگر K-مدول و مدول دوگان‌بئر باشد. حلقه‌هایی را که برای آنها همه‌ی مدول‌ها دوگان بئراند، تعیین می گردد. و بالاخره یک شرط لازم برای آنکه جمع مستقیم تعداد متناهی از مدول‌های دوگان‌بئر نیز مدول

دوگان‌بئر باشند، ارائه خواهد شد.

واژه‌های کلیدی مدول دوگان‌بئر، مدول دوگان‌ریکارت، حلقه‌ی موروثی، T-ناهم‌منفرد، ارتقاءپذیر، مدول میان‌تهی، K-مدول

فهرست مطالب

۱

مقدمه

مفاهیم بئر و ریکارت در حلقه‌ها ریشه در آنالیز تابعی، جبر C^* و جبر فان نیومن دارد. در سال ۱۹۵۵ کاپلانسکی [۱] [۹] حلقه‌ی بئر را معرفی کرد و در سال ۱۹۶۰ به مفهوم حلقه‌ی ریکارت تعمیم داده شد. در سال ۱۹۶۷ [۳] حلقه‌های شبه بئر معرفی شدند. حلقه‌های بئر، شبه بئر و ریکارت نقش مهمی را در ایجاد منابع عظیمی از خودتوان‌ها و از این رو در قضیه‌ی ساختاری حلقه‌ها ایفا می‌کنند. اخیرا مقالات زیادی به بررسی این حلقه‌ها پرداخته‌اند. طبق [۱۵] حلقه‌یR را بئر گوییم هر گاه پوچساز راست هر زیرمجموعه‌ی ناتهی از R توسط خودتوانی در R تولید شود و ریکارت گوییم هر گاه پوچساز راست هر عنصر ناصفر از R توسط خود توانی در آن تولید شود.

در سال ۲۰۰۴ رضوی[۲] و رومن[۳] با استفاده از روابط بین مدول M با حلقه‌ی درون‌ریختی‌های آن، به ارائه‌ی مفهوم مدول بئر و مدول ریکارت پرداختند. آنها به همراه لی [۴]درسال ۲۰۱۰ مفهوم مدول دوگان‌ریکارت را مورد توجه قرار دادند، ضمن اینکه در سال ۲۰۰۹ مفهوم مدول دوگان‌بئر توسط توتونچی[۵] و تری بیک[۶] تعریف شده بود این دو مفهوم جدید کانون توجه ما در این پایان نامه خواهند بود.

طبق تعریف آنها، R-مدول راست M را دوگان بئر گوییم هرگاه برای هر زیر مجموعه‌ی N از M، $D(N)=\{\varphi\in S: Im\,\varphi\subseteq N\}=eS$ که در آن $S=End_R(M)$ و e خودتوانی از S است.

اگر R حلقه باشد، برای عنصر دلخواه a از R، $\varphi_a: R\to R$ را برای هر $r\in R$ بصورت $\varphi_a(r)=ar$ تعریف می‌کنیم. بوضوح R حلقه‌ی منظم فان نیومن است اگر و تنها اگر برای هر

---

[۱] Kaplansky

[۲] Rizvi

[۳] Roman

[۴] Lee

[۵] Tutuncu

[۶] Tribak

$a \in R$، $Im\ \varphi_a = aR \leq^{\oplus} R_R$. با این مقدمه رضوی و رومن به بررسی مدول‌های M علاقمند شدند که در آنها برای هر عنصر φ از حلقه‌ی درون‌ریختی‌های آن، $Im\ \varphi$ جمعوند مستقیمی از M باشد و به این ترتیب مدول دوگان‌ریکارت را تعریف کردند.

در فصل اول این پایان نامه پیش نیازها بیان شده است.

در فصل دوم ضمن معرفی مدول دوگان‌بئر، به بررسی خواص این مدول‌ها خواهیم پرداخت. در ابتدا با بیان قضیه‌ای ساختاری، تعاریف معادلی برای مدول دوگان‌بئر ارائه می‌کنیم. سپس ضمن معرفی مفاهیم مدول‌های T−ناهم‌منفرد و ارتقاءپذیر، با بیان قضایا و نتایجی ارتباط بین این مدول‌ها با مدول دوگان‌بئر را عنوان خواهیم کرد. در ادامه نشان می‌دهیم حلقه‌هایی که مدول‌های تعریف شده روی آنها ارتقاءپذیر و دوگان بئر باشد، حلقه‌های نیمه موروثی و هارادای راست هستند. در پایان فصل با بررسی جمع مستقیم مدول‌های دوگان‌بئر، به توضیح ساختار این مدول‌ها روی حلقه‌های ددکیند می پردازیم و نتایج مهمی در این خصوص بدست می‌آوریم.

در فصل سوم مدول دوگان‌ریکارت و خواص این مفهوم جدید را که اخیرا مورد مطالعه قرار گرفته است، بررسی خواهیم کرد. ابتدا با معرفی مدول دوگان‌ریکارت، برخی خواص مهم این مدول‌ها را مطرح می‌کنیم. به طور مثال نشان می‌دهیم که جمعوند مستقیم هر مدول دوگان‌ریکارت، این خاصیت را به ارث می‌برد در حالیکه با ارائه‌ی مثالی نشان می‌دهیم که جمع مستقیم دوگان مدول‌های ریکارت لزوما دوگان‌ریکارت نخواهد بود. در ادامه ثابت می‌کنیم که کلاس حلقه‌های R که در آن هر R−مدول راستی مدول دوگان‌ریکارت است، حلقه‌ی نیمساده‌ی آرتینی است و کلاس حلقه‌های R که در آن هر R−مدول راست آزاد متناهی مولد مدول دوگان‌ریکارت است، حلقه‌ی منظم فان نیومن است. در حالیکه کلاس حلقه‌های R که در آن هر R−مدول راست تزریقی مدول دوگان‌ریکارت باشد، حلقه‌ی موروثی راست است.

در بخش بعدی این فصل ارتباط بین مدول‌های دوگان‌ریکارت و حلقه‌ی درون‌ریختی‌های این مدول‌ها را بررسی می‌کنیم. در حالیکه ثابت می‌کنیم حلقه‌ی درون‌ریختی‌های مدول دوگان‌ریکارت،حلقه‌ی ریکارت

چپ است، شرایطی را فراهم می‌کنیم که عکس مطلب نیز بر قرار باشد. ضمن اینکه نشان می‌دهیم برای هر مدول دوگان‌ریکارت M و هر عنصر φ از حلقه‌ی درون‌ریختی‌های آن، همواره داریم $\varphi M = r_M\left(l_S\left(\varphi M\right)\right)$. در ادامه با معرفی خاصیت $D_۲$ نشان می‌دهیم هر مدول دوگان‌ریکارتی که این خاصیت را داشته باشد، حلقه‌ی درون‌ریختی‌های آن حلقه‌ی منظم فان نیومن است.

در بخش بعد ارتباط بین مدول دوگان‌بئر با مدول دوگان‌ریکارت را بررسی خواهیم کرد. مشابه نتیجه‌ی مهم بدست آمده در [۱۶]، نشان می‌دهیم مدول دوگان‌ریکارتی که شامل هیچ مجموعه‌ی نامتناهی از خودتوان‌های متعامد ناصفر در حلقه‌ی درون‌ریختی‌هایش نمی‌باشد، مدول دوگان‌بئر است. در ادامه ضمن بررسی مدول‌های دوگان‌ریکارت تجزیه‌ناپذیر، نشان می‌دهیم که هر مدول دوگان‌ریکارت تجزیه‌ناپذیری در خاصیت $D_۲$ صدق می کند اگر و تنها اگر حلقه‌ی درون‌ریختی‌های آن حلقه‌ی تقسیم باشد.

در بخش آخر از این فصل، پاسخ این سوال را خواهیم داد که"چه وقت جمع مستقیم دو یا تعداد متناهی مدول دوگان‌ریکارت، مدول دوگان‌ریکارت است؟" برای پاسخ به این سوال از مفاهیم M-دوگان‌ریکارت و $D_۲$- M برای مدول M که در این بخش معرفی می‌کنیم، استفاده خواهیم کرد.

فصل ۱

مفاهیم و تعاریف اولیه

در این فصل با تعاریف و مفاهیمی در نظریه‌ی مدول‌ها آشنا می‌شویم. در تمامی تعاریف و مفاهیم این پایان‌نامه R حلقه‌ای یکدار و شرکت‌پذیر و نه لزوما جابجایی، می‌باشد. M، R-مدول راست در نظر گرفته شده است که حلقه‌ی درون‌ریختی‌های آن را با S نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۱. فرض کنیم M یک R- مدول، $S = End_R(M)$، I ایده‌آلی از S و N زیرمدولی از M باشد دراین صورت $l_S(N) = \{s \in S | sN = \circ\}$ پوچساز چپ N با عناصری از S و $r_M(I) = \{m \in M | Im = \circ\}$ پوچساز راست I با عناصری از M می‌باشد.

تعریف ۲.۱. زیر مدول N از R- مدول M را اساسی گوییم هرگاه برای هر زیر مدول غیر صفر K از M، $K \cap N \neq \circ$. که آن‌را با $N \leq^{ess} M$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۳.۱. همه ایده‌آل‌های ناصفر $\mathbb{Z}$ در $\mathbb{Z}$ اساسی هستند.

تعریف ۴.۱. زیر مدول N از R- مدول M را کاملا پایا گوییم هرگاه برای هر $f \in End_R(M)$، $f(N)$ زیرمدولی از N باشد که آن‌را با $N \trianglelefteq M$ نمایش می دهیم.

تعریف ۵.۱. حلقه‌ی R را بئر گوییم هر گاه پوچساز راست هر ایده‌آل چپ ناتهی از R توسط خودتوانی در R تولید شود.

مثال ۶.۱. هر دامنه‌ای حلقه بئر است.

فرض کنید R دامنه و $\emptyset \neq I \leq R_R$ دلخواه باشد. $r(I) = \{x \in R | Ix = \circ\}$ را در نظربگیرید. چون دامنه فاقد مقسوم علیه صفر است پوچساز راست فوق صفر می‌باشد و از آنجاییکه صفر خودتوان دامنه است، R حلقه‌ای بئر می‌باشد.

تعریف ۷.۱. حلقه‌ی R را شبه‌بئر گوییم هر گاه پوچساز راست هر ایده‌آل دو طرفه ناتهی از R توسط خودتوانی در R تولید شود.

تعریف ۸.۱. حلقه R را اول گوییم هرگاه به ازای هر $a, b \in R$، $aRb = \circ$ آنگاه $a = \circ$ یا $b = \circ$.

مثال ۹.۱. هر حلقه اول، شبه‌بئر است.

فرض کنید R حلقه‌ای اول و $\emptyset \neq I \trianglelefteq R$ دلخواه باشد. $r(I) = \{x \in R | Ix = \circ\}$ را در نظربگیرید. از آنجاییکه حلقه اول است، پوچساز راست فوق صفر می‌باشد و چون صفر خودتوان حلقه است، R حلقه‌ای شبه‌بئر می‌باشد.

تذکر ۱۰.۱. خاصیت‌های بئر و شبه‌بئر برای حلقه‌ها متقارن چپ و راست است؛ حلقه R بئر (شبه‌بئر) است، اگر و فقط پوچساز چپ هر ایده‌آل راست (دو طرفه) از R توسط خودتوانی در R تولید شود.

تعریف ۱۱.۱. R-مدول راست M را مدول بئر گوییم هرگاه به ازای هر زیرمدول دلخواه N از M پوچساز چپ N در S توسط خودتوانی در S تولید شود.

تعریف ۱۲.۱. R-مدول راست M را مدول شبه‌بئر گوییم هرگاه به ازای هر زیرمدول پایای دلخواه N از M پوچساز چپ N در S توسط خودتوانی در S تولید شود.

تعریف ۱۳.۱. R- مدول M را توسیعی [۱] گوییم هرگاه به ازای هر زیرمدول دلخواه N از M جمعوند مستقیم N' از M وجود داشته باشد به‌طوری که N در N' اساسی باشد.

مثال ۱۴.۱. $\mathbb{Z}_2$ و $\mathbb{Z}_8$ به عنوان $\mathbb{Z}$- مدول، توسیعی هستند.

تعریف ۱۵.۱. R- مدول M را کاملا پایای توسیعی [۲] گوییم هرگاه به ازای هر زیرمدول پایای دلخواه N از M جمعوند مستقیم N' از M وجود داشته باشد به‌طوری که N در N' اساسی باشد.

تعریف ۱۶.۱. R- مدول M را نامنفرد[۳] گوییم هرگاه برای هر عنصر m در M که $r_R(m) \leq^{ess} R$ داشته باشیم $m = 0$ و یا به طور معادل $Z(M) = \{m \in M, mI = 0, I \leq^{ess} R_R\} = 0$.

تعریف ۱۷.۱. حلقه R را نامنفرد راست گوییم هرگاه هیچ عنصر ناصفری دارای پوچساز راست اساسی در R_R نباشد($Z(R_R) = 0$).

لم ۱۸.۱. حلقه R نامنفرد راست است اگر و فقط اگر به ازای هر ایده‌آل راست اساسی I از R پوچساز چپ I صفر باشد.

اثبات. فرض کنید $Z(R) = 0$ و I ایده‌آل راست اساسی از R باشد. حال $a \in l(I)$ را دلخواه در نظر بگیرید. از آنجاییکه $rI = 0$ داریم $I \subseteq r(a)$ و چون $I \leq^{ess} R$ بنابراین $r(a) \leq^{ess} R$، از فرض مسأله نتیجه می‌شود که $a = 0$. از آنجاییکه a دلخواه فرض شده بود، داریم $l(I) = 0$. حال فرض کنید I ایده‌آل راست اساسی از R باشد که $l(I) = 0$. فرض کنید $x \in R$ به‌طوری که $r(x) \leq^{ess} R$، طبق فرض $l(r(x)) = 0$ و می‌دانیم که $x \in l(r(x))$. بنابراین $Z(R_R) = 0$. □

[۱] Extending

[۲] FI-extending

[۳] Nonsingular

تعریف ۱۹.۱. حلقه R را هم‌نامنفرد [۴] گوییم هرگاه هر ایده‌آل راست از R با پوچساز چپ صفر در R_R اساسی باشد.

تعریف ۲۰.۱. خودتوان $e \in R$ را نیمه مرکزی گوییم هرگاه eR ایده‌آل دوطرفه از R باشد.

تعریف ۲۱.۱. R- مدول M را k-نامنفرد[۵] گوییم هرگاه برای هر عنصر دلخواه $\varphi \in S$ که در آن $r_M(\varphi) = ker\varphi \leq^{ess} M$ داشته باشیم $\varphi = 0$.

تعریف ۲۲.۱. مدول M را k- هم‌نامنفرد[۶] گوییم هرگاه برای هر زیرمدول N از M اگر داشته باشیم $L_s(N) = 0$، آنگاه $N \leq^{ess} M$. و یا به طور معادل برای هر $\varphi \in S$ اگر $\varphi(N) \neq 0$، آنگاه $N \leq^{ess} M$.

تعریف ۲۳.۱. R-مدول M را پایای k- نامنفرد [۷] گوییم هرگاه برای هر ایده‌آل I از S اگر داشته باشیم $r_M(I) \leq^{ess} eM$ که e خودتوانی در S است، آنگاه $r_M(I) = eM$

تعریف ۲۴.۱. R-مدول M را پایای k- هم‌نامنفرد [۸] گوییم هرگاه برای هر جمعوند مستقیم پایای N از M و زیرمدول پایای N' از N به‌طوری‌که برای هر $\varphi \in End(N)$ اگر داشته باشیم $\varphi(N') \neq 0$ آنگاه $N' \leq^{ess} N$

تعریف ۲۵.۱. R-مدول M را یکنواخت[۹] گوییم هرگاه هر دو زیرمدول ناصفر آن اشتراک ناصفر داشته باشند و یا به طور معادل هر زیرمدول M در آن اساسی باشد.

[۴] Co-nonsingular

[۵] K-nonsingular

[۶] K-co-nonsingular

[۷] FI-k-nonsingular

[۸] FI-k-cononsingular

[۹] Uniform

تعریف ۲۶.۱. حلقه‌ی R را ریکارت راست گوییم هرگاه پوچساز راست هر عنصر ناصفر از R توسط خودتوانی در R تولید شود.

تعریف ۲۷.۱. R-مدول راست M را ریکارت گوییم هرگاه پوچساز راست هر عنصر ناصفر S در M توسط خودتوانی در S تولید شود یا به طور معادل برای هر عنصر ناصفر $\varphi \in S$،

$$Ker\varphi = r_R(\varphi) = Me$$

که در آن e خودتوانی از S است و این معادل است با $Ker\varphi \leq^{\oplus} M$، زیرا برای هر عنصر خودتوان $e \in S$، M را می‌توان بصورت $M = eM \oplus (1-e)M$ نوشت.

تعریف ۲۸.۱. گوییم R-مدول راست M، خاصیت اشتراک جمعوندی (SIP) [۱۰] را دارد هرگاه اشتراک هردو جمعوند مستقیم آن یک جمعوند مستقیم M باشد و خاصیت اشتراک جمعوندی تعمیم‌یافته $(GSIP)$[۱۱] را دارد هرگاه اشتراک هر خانواده از جمعوندهای مستقیم آن، یک جمعوند مستقیم از M باشد.

تعریف ۲۹.۱. R-مدول M را نیمساده گوییم هرگاه هر زیرمدول M یک جمعوند مستقیم آن باشد.

قضیه ۳۰.۱. برای حلقه‌ی R، R_R مدول نیمساده است اگر و تنها اگر $_RR$ مدول نیمساده است.

قضیه ۳۱.۱. فرض کنیم M، R-مدول نیمساده باشد، آنگاه هر مدول خارج قسمتی از M نیز نیمساده است.

اثبات. فرض کنیم M/N مدول خارج قسمتی دلخواهی از M باشد و J زیرمدول دلخواهی از M/N باشد. در این صورت زیرمدولی از M مثل J' از M چنان موجود است که شامل N بوده و $J = J'/N$.

[۱۰] Summand intersection property

[۱۱] Strong Summand Intersection property

چون M نیمساده است، پس زیرمدولی از M مثل J'' چنان موجود است که $M = J' \oplus J''$. بنابراین $M/N = J \oplus (J'' + N)/N$، که در آن $(J'' + N)/N$ زیرمدولی از M/N است. پس M/N نیمساده است. □

قضیه ۳۲.۱. فرض کنیم R حلقه‌ای نیمساده باشد. آنگاه هر R-مدول، نیمساده است.

اثبات. M را R-مدول راست دلخواه در نظر می‌گیریم. می‌دانیم $M = \sum_{x \in M} Rx$. از طرفی $Rx \cong R/Ann(x)$ و چون R بعنوان R-مدول نیمساده است، $R/Ann(x)$ نیز بعنوان R-مدول نیمساده است. پس $M = \sum_{x \in M} Rx$ نیز نیمساده است. □

لم ۳۳.۱. برای $N \leq M$، $I \leq R_R$، $K \leq S_S$، $P \trianglelefteq M$، $J \trianglelefteq R$، و $L \trianglelefteq S$ شرایط زیر برقرار است:

۱. $l_M(r_R(l_M(I))) = l_M(I)$؛

۲. $r_R(l_M(r_R(N))) = r_R(N)$؛

۳. $l_S(r_M(l_S(N))) = l_S(N)$؛

۴. $r_M(l_S(r_M(K))) = r_M(K)$؛

۵. $l_M(J) \trianglelefteq M$؛

۶. $r_R(P) \trianglelefteq R$؛

۷. $l_S(P) \trianglelefteq S$؛

۸. $r_M(L) \trianglelefteq M$.

اثبات. چهار تساوی اول بنابر روابط پوچسازها برقرار است.

برای اثبات رابطه پنجم، فرض کنیم $J \trianglelefteq R$، در این صورت برای $r \in R$، $rJ \subseteq J$. حال فرض کنیم $m \in l_M(J)$. از آنجاییکه $mJ = 0$، $mrJ \subseteq mJ = 0$، $mr \in l_M(J)$ از اینرو $l_M(J) \leq M$. حال کافی است نشان دهیم که $l_M(J)$ در M کاملا پایاست. فرض کنیم $\varphi \in End_R(M)$ و $m \in l_M(J)$ در این صورت $\varphi(m)J = \varphi(mJ) = 0$ درنتیجه $\varphi(m) \in l_M(J)$. □

لم ۳۴.۱. فرض کنیم M، R- مدول باشد به‌طوری که $M = M_1 \oplus M_2$. اگر $N \trianglelefteq M$ آنگاه $N = N_1 \oplus N_2$ که برای $i = 1, 2$، $N_i = N \cap M_i \trianglelefteq M_i$.

اثبات. فرض کنیم برای $i = 1, 2$، π_i تصویر کانونی از M به M_i باشد. از آنجاییکه $N \trianglelefteq M$، $\pi_i(N) \subseteq N$، و همچنین برای $i = 1, 2$، $\pi_i(N) = N \cap M_i = N_i$. از اینرو $N \subseteq \pi_1(N) + \pi_2(N) = N_1 + N_2$. اما از آنجاییکه برای $i = 1, 2$، $N_i \subseteq N$، در نتیجه $N_1 + N_2 \subseteq N$. همچنین $N_1 \cap N_2 = N \cap M_1 \cap M_2 = 0$ بنابراین $N = N_1 \oplus N_2$. □

لم ۳۵.۱. فرض کنید M، R-مدول باشد به طوری که $M = N_1 \oplus N_2$ و $F_1 \trianglelefteq N_1$. در این‌صورت عضوی مانند $F_2 \trianglelefteq N_2$ وجود دارد به طوری که $F_1 \oplus F_2 \trianglelefteq M$.

اثبات. فرض کنید $F_2 = \sum_{\varphi \in Hom(N_1,N_2)} \varphi(F_1)$ در این صورت $F_2 \leq N_2$. اگر $\psi \in End(N_2)$ دلخواه باشد آنگاه برای هر $\varphi \in Hom(N_1, N_2)$، $\psi\varphi \in Hom(N_1, N_2)$. در این‌صورت $\psi(F_2) = \psi(\sum_{\varphi \in Hom(N_1,N_2)} \varphi(F_1)) = \sum_{\varphi \in Hom(N_1,N_2)} \psi\varphi(F_1) \subseteq F_2$ از اینرو $F_2 \trianglelefteq N_2$. فرض کنیم $\chi \in End(M)$ که در آن $\chi = (\chi_{ij})_{i,j=1,2}$ و به ازای $i, j = 1, 2$، $\chi_{i,j} : N_j \longrightarrow N_i$. از آنجاییکه به ازای $i, j = 1, 2$، $F_i \trianglelefteq N_i$ در نتیجه $\chi_{ii}(F_i) \subseteq F_i$ و طبق تعریف F_2، $\chi_{21}(F_1) \subseteq F_2$. برای $\varphi \in Hom(N_1, N_2)$، $\chi_{12}\varphi \in End(N_1)$ که نتیجه می‌دهد:

$F_1 \subseteq \sum_{\varphi\in Hom(N_1,N_2)} \chi_{12}\varphi(F_1) = \chi_{12}(\sum_{\varphi\in Hom(N_1,N_2)} \varphi(F_1)) = \chi_{12}(F_2)$. از آنجاییکه هر مولفه χ، $F_1 \oplus F_2$ را به $F_1 \oplus F_2$ می‌نگارد از اینرو $F_1 \oplus F_2 \trianglelefteq M$. $\square$

تعریف ۳۶.۱. حلقه‌ی R را حلقه‌ی تقسیم گوییم هرگاه هر عنصر ناصفر آن وارون ضربی داشته باشد.

تعریف ۳۷.۱. برای R-مدول‌های راست M، N و P، P را مدول تصویری[۱۲] گوییم هرگاه برای هر همریختی پوشای $\varphi : M \to N$ و هر R-همریختی $\psi : P \to N$، R-همریختی $h : P \to M$ چنان موجود باشد که $\psi = \varphi \circ h$.

تعریف ۳۸.۱. حلقه‌ی R را منظم فان نیومن[۱۳] گوییم هرگاه برای هر عنصر x در R عنصری مثل r در R چنان موجود باشد که $xrx = x$.

تعریف ۳۹.۱. برای R-مدول‌های راست P و M، P را M-تصویری گوییم هرگاه برای هر R-همریختی پوشای f از M به N و g از P به N که N، R-مدولی دلخواه است R-همریختی φ از P به M چنان موجود باشد که $g = fo\varphi$.

[۱۲] Projective

[۱۳] Von Neumann

فصل ۲

مدول بئر

در این فصل قصد داریم برخی ویژگی‌های مدول‌های دوگان‌بئر را بررسی کنیم و حلقه‌هایی را که همه مدول‌های روی آن‌ها دوگان بئر است، مشخص کنیم. همین‌طور شرایط لازم برای اینکه مجموع مستقیم متناهی از مدول‌های دوگان‌بئر، دوگان بئر شود را ارائه می‌دهیم.

۱.۲ مدول‌های دوگان‌بئر

تعریف ۱.۲. R-مدول راست M را مدول بئر گوییم هرگاه برای هر $N \leq M$ و خودتوان $e \in S$، $l_S(N) \leq^{\oplus} S_S$ (یا معادلا $l_S(N) = Se$).

تذکر ۲.۲. طبق لم ۳۳.۱، مدول M بئر است اگر و تنها اگر برای هر ایده‌آل چپ I از S و خودتوان $e \in S$، $r_M(I) = eM$.

اثبات. فرض کنید مدول M بئر و $I \leq {}_SS$ باشد. نشان می‌دهیم برای خودتوانی مانند $e \in S$، $r_M(I) = eM$. طبق لم ۳۳.۱، $r_M(I) = r_M(l_S(r_M(I)))$، و می‌دانیم که $r_M(I) \leq M$

چون M بئر است نتیجه می‌شود که برای خودتوانی مانند e، $l_S(r_M(I)) = Se$. در نتیجه $r_M(I) = r_M(l_S(r_m(I))) = r_M(Se)$. از آنجاییکه $e(۱-e) = ۰$، نتیجه می‌شود که $Se((۱-e)M) = ۰$ و این یعنی $(۱-e)M \subseteq r_M(Se)$. حال $m \in r_M(Se)$ را دلخواه در نظر بگیرید. بنابراین $Se(m) = ۰$ و از آنجا که S یکدار است داریم $em = ۰$. بوضوح تساوی زیر را داریم:

$$m = ۱ = (e + (۱-e))m = em + (۱-e)m = (۱-e)m.$$

چون m دلخواه بود نتیجه می‌شود که $m \in (۱-e)M$. بنابراین برای خودتوان $۱ - e \in S$ داریم $r_M(Se) = (۱-e)M$. حال نشان می‌دهیم که برای هر $I \leq {}_SS$ به طوری که برای خودتوانی مانند $e \in S$ داشته باشیم $r_M(I) = eM$، مدول M بئر است. فرض کنید $N \leq M$ دلخواه باشد، طبق لم ۳۳.۱، $l_S(N) = l_S(r_M(l_S(N)))$. چون $l_S(N) \leq {}_SS$، بنابراین طبق فرض داریم $r_M(l_S(N)) = eM$. در نتیجه $l_S(N) = l_S(r_M(l_S(N))) = l_S(eM)$. می‌دانیم که $S(۱-e)(eM) = ۰$، و این یعنی $S(۱-e) \subseteq l_S(eM)$. حال فرض کنید $s \in l_S(eM)$. بنابراین $seM = ۰$ و در نتیجه $se = ۰$. میتوان s را به‌صورت زیر نوشت:

$$s = s \cdot ۱ = s(e + (۱-e)) = se + (۱-e)s = (۱-e)s.$$

چون s دلخواه بود نتیجه می‌شود که $s \in (۱-e)S$. این نشان می‌دهد که برای خودتوان $۱-e \in S$، $l_S(N) = l_S(eM) = (۱-e)S$ $\square$

مثال ۳.۲. همه مدول‌های نیمساده بئر هستند و همه حلقه‌های بئر به عنوان مدول راست روی خودشان بئر هستند.

در این قسمت به بیان قضیه‌ای می‌پردازیم که در ادامه آن‌را به مدول‌ها گسترش خواهیم داد.

قضیه ۴.۲. فرض کنیم R حلقه باشد. آنگاه R حلقه نامنفرد راست و توسیعی راست است اگر و تنها اگر R حلقه بئر و هم‌نامنفرد راست باشد.