بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی و رایانه

بخش ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی کاربردی گرایش تحقیق در عملیات

حل عددی معادلات انتگرال –دیفرانسیل غیر خطی توسط روش سینک

مولف :

فاطمه حیدری

استاد راهنما:

دکتر محمود محسنی مقدم

بهمن ماه ۱۳۹۰

این پایان نامه به عنوان یکی از شرایط احراز درجه کارشناسی ارشد به

بخش ریاضی

دانشکده ریاضی و کامپیوتر

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو: فاطمه حیدری

استاد راهنما: دکتر محمود محسنی مقدم

استاد مشاور: -

داور۱: دکتر ماشالله ماشین چی

داور۲: دکتر محمد علی ولی

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه:

تقدیم به:

مهربان مادرم

که دری باز از بهشت سوی چشمان اوست؛ برای او که خورشید شعله...نه شرری پیش چشمان اوست و پر پرواز من برای رهایی است.

تقدیم به:

روح بلند پدرم

که تا بود، وجودش سراسر ثروت ایثار و تجلی معنی و عشق بود.

تقدیم به:

خواهران و برادرانم که شادابی بوستان زندگیم اند و دوستانم که بهار باغ روزگارم اند.

تقدیر و تشکر

در ابتدا خدای مهربان را هزاران بار شاکرم که در مرحله ای دیگر از تحصیل، لطف خود را چون همیشه به من ارزانی داشت. او که تنها یاور من در فراز و نشیب زندگی بوده است.

او، که می بالم: به حضورش، به حس گرم حمایتش، به محبت های بی شائبه اش و به قهاری حکیمانه اش...

مراتب تقدیر و سپاس نثار استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر محسنی مقدم که مصاحبت و مشورت با ایشان را مایه فخر خویش می دانم و شاگردی در مکتبشان افتخاری است که به آن می بالم.

از اساتید ارجمندم جناب آقای دکتر ماشین چی و جناب آقای دکتر ولی که در طول تحصیل در مقطع کارشناسی ارشد از دانش و لطفشان بهره ها بردم و زحمت داوری این پایان نامه را برعهده داشتند، کمال تشکر و قدر دانی را دارم.

برای هر رسیدن مسیری است و پیمودن هر مسیر را هزار دریچه ناامیدی و صدها بن بست که جز با همدلی و همدردی دوستانی همراه امکان پیمودن به آسانی میسر نیست. از تمامی دوستانی که در این مسیر به من یاری رساندند تقدیر و تشکر می کنم.

در پایان از حمایتهای قطب جبر خطی و بهینه سازی دانشگاه شهید باهنر کرمان تشکر و قدردانی می نمایم.

فاطمه حیدری

زمستان ۱۳۹۰

چکیده:

در این پایان نامه ، ابتدا تاریخچه ای از معادلات انتگرال را بیان می کنیم، سپس به معرفی اجمالی معادلات انتگرال و بیان یک نوع دسته بندی از این معادلات ، تعاریف و قضایای مورد نیاز می پردازیم. در فصل دوم دستگاه متعامد یکه، آنالیز مختلط و تابع سینک را معرفی می کنیم. فصل سوم را به بیان برخی روش های حل عددی معادلات انتگرال و انتگرال – دیفرانسیل اختصاص می دهیم.

در فصل پایانی روش سینک را برای حل عددی معادلات انتگرال و معادلات انتگرال – دیفرانسیل فردهلم و ولترا خطی و غیر خطی معرفی می نماییم. هم چنین در پایان هر بخش چند مثال عددی برای نشان دادن دقت و کارائی این روش مطرح می نماییم.

کلمات کلیدی:

معادلات انتگرال ، معادلات انتگرال –دیفرانسیل ، روش سینک ، روش هم محلی سینک.

مقدمه

معادلات دیفرانسیل جهان ما را به خوبی توصیف می کنند، مانند معادلات موج، و امثال آن. اما معادلات انتگرال ویژگی های خاصی دارند که اهمیت آنها را آشکار می سازد به عنوان مثال، معادلات انتگرال تابع مجهول را نه تنها به مقدار آن تابع در نقاط مجاور(مشتق ها) بلکه به مقدارش در تمامی ناحیه از جمله مرز مرتبط می کنند. در واقع شرایط مرزی به جای اینکه در مرحله آخر حل معادله وضع شوند، در معادله انتگرال تعبیه می شوند از این رو معادلات انتگرال کاربردی تر بوده و می توانند نسبت به معادله دیفرانسیل مناسب تر و کاراتر باشند. علاوه براین اثبات قضیه های مربوط به وجود یکتایی معادلات انتگرال نسبت به معادلات دیفرانسیل به مراتب ساده تر می باشند و از ظرافت بیشتری هم برخوردار اند.

روش های عددی و کلاسیک بسیاری برای حل معادلات انتگرال ارائه شده است. از جمله این روش ها، روش سینک است که توسط فرانک استنجر معرفی شده و توسعه پیدا کرده است[۲۶]. توابع سینک ابتدا در[۲۹] مطرح و سپس جهت حل عددی معادلات انتگرال مختلف در مقالات بسیاری بکار گرفته شده است.

در این پایان نامه با استفاده از مقاله های[۶ و ۱۹ و۲۰ و ۲۲و ۲۳و ۲۴و ۲۷و ۲۸ و۳۰] به معرفی و ارائه حل عددی معالات انتگرال و انتگرال-دیفرانسیل خطی و غیر خطی فردهلم و ولترا توسط روش سینک با ارائه مثال های مختلف پرداخته ایم.

فهرست مطالب

فصل اول

مروری بر تاریخچه و مفاهیم اولیه

معادلات انتگرال

۱.۱ مقدمه

در این فصل ابتدا مختصری از تاریخچه معادلات انتگرال بیان می شود، سپس در بخش دوم تعاریف و یک نوع دسته بندی معادلات انتگرال را بیان می کنیم. در بخش های بعدی تعاریف و مثال هایی از این دسته بندی آورده می شود. در بخش های ۹ و ۱۰ تبدیل معادله انتگرال-دیفرانسیل به معادلات انتگرال و بالعکس بیان می شوند. سرانجام در بخش ۱۱ برخی از روش های حل معادلات انتگرال به دلخواه انتخاب کرده و توضیح مختصری همراه با مثال آورده می شود.

۲.۱ تاریخچه معادلات انتگرال

یک معادله انتگرال معادله ای است که در آن تابع مجهول زیر علامت انتگرال ظاهر می شود. یکی از شاخه های علم ریاضی که کاربردهای فراوانی در مسائل هندسی، فیزیک، شیمی و غیره دارد، بحث معادلات انتگرال می باشد. معادلات انتگرال در خیلی از محاسبات بیولوژی هم ظاهر می گردند.کاربردهای فراوان این قبیل از معادلات باعث شده است که افراد زیادی را بسوی خود جذب کرده تا به بررسی روش های مختلف حل این معادلات روی بیاورند.[۵]

ارتباط تناتنگی بین معادلات انتگرال و مسائل مقدار اولیه و مسائل مقدار مرزی وجود دارد که نقطه عطفی برای آن دسته از معادلات دیفرانسیل شده که حل آنها از روش معمول مشکل تر است، که با تبدیل به معادله انتگرال، می توان آنها را حل نمود. عقیده ای وجود دارد که اولین پیدایش معادله انتگرال به کار لاپلاس[۱] در سال ۱۷۸۲ بر می گردد که روی تبدیلات لاپلاس و معکوس آنها مطالعه می کرد. به عنوان مثال تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ به شکل $L\left(f(t)\right)=F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt,\quad s>0$ به شرط آنکه انتگرل فوق به ازای $s>0$ همگرا باشد، یا در مساله پیدا کردن تبدیل معکوس لاپلاس تابع $F(s)=\frac{1}{s^2}, s>0$ با حل معادله انتگرال $\frac{1}{s^2}=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt\ ,\ s>0$ مواجه می شویم که در حل معادلات انتگرال تفاضلی و معادلات دیفرانسیلی به کار برده شده است. بنابر این به نظر می رسد که معادله انتگرال توسط لاپلاس شروع شده باشد.

[۱] Laplace

در جریان تکامل و پیشرفت ریاضیات، فوریه[۲] در سال ۱۸۱۱ با استفاده از سری های مثلثاتی در حل مسئله انتقال گرما به نتایجی در رابطه با معادلات انتگرال دست یافت. در سال ۱۸۲۰ وی نظریه حرارت و تبدیلات فوریه را مطرح نمود که پیدا کردن تبدیل معکوس فوریه به حل معادله انتگرال منجر شد. از طرفی اولین پیدایش معادله انتگرال توسط آبل[۳] به رسمیت شناخته شده است. آبل در سالهای ۱۸۲۳ تا ۱۸۲۶ ضمن مطالعه مسائل فیزیکی، هنگام بررسی حرکت یک ذره که به سمت پایین در طول یک منحنی هموار نامعلوم در یک صفحه قائم، تحت نیروی جاذبه حرکت می نماید، به معادله $f(x)=\int_a^{\infty}(x-t)^{-\alpha} f(t)\,dt, 0<\alpha<1$ برخورد کرد. در اینجا $f(x)$ تابعی پیوسته و معلوم می باشد و در شرط $f(a)=0$ صدق می کند. برای $\alpha=\frac{1}{2}$ ، معادله انتگرالی آبل متناظر با مسئله مشهور کوتاه ترین زمان است، که برای اولین بار همزمان توسط هوینگس[۴] حل شد. در آن مسئله تعیین مسیر حرکت یک ذره، که روی منحنی با یک نقطه انتهایی داده شده و مستقل از وضعیت اولیه، تحت تاثیر نیروی ثقل در بازه ای از زمان به نرمی حرکت می کند، مد نظر بود. در سال۱۸۲۶ پواسن[5] در نظریه مغناطیسی خود نوعی معادله انتگرال به فرم $y(x)=f(x)+\lambda\int_a^x k(x,t)y(t)\,dt$ را مطرح نمود. وی با بسط $y(x)$ به یک سری توانی با پارامتر λ موفق به حل این معادله شد. البته همگرایی این سری بعدها در سال ۱۸۳۲ توسط لیوویل[۶] نشان داده شد. لیوویل در حل برخی از معادلات دیفرانسیل به کمک معادله انتگرالی فعالیت زیادی داشته است. در سال ۱۸۳۲ لیوویل بدون آگاهی از کار آبل، یک معادله انتگرالی در مساله جاذبه از یک شمش با طول متناهی معرفی کرد. وی در سال ۱۸۳۷ بحثی پیرامون رابطه ی معادله دیفرانسیل و معادله انتگرال را مطرح نمود و نشان داد که جواب خصوصی یک معادله دیفرانسیل معین به وسیله ی یک معادله انتگرال داده می شود. در سال ۱۸۷۰ نویمن[۷] جواب مسئله دریکله[۸] یعنی تابع φ که دارای مقدار مشخصی روی مرز ناحیه s می باشد و در درون معادله لاپلاس $\Delta^2\varphi=0$، صدق می کند را به صورت جوابی از یک معادله انتگرال نشان داد و مساله دریکله را به یک معادله انتگرال تبدیل کرد. وی معادله انتگرال را به صورت بسطی از توان های پارامتری معین λ حل کرد، که این شبیه روالی بود که پیش از آن توسط پواسن و لیوویل استفاده شده بود. به نظر بوچر[۹] نام معادله انتگرال توسط دانشمند آلمانی به نام بویس ریموند[۱۰] در

---

[1] Fourier
[3] Abel
[4] Hoygnes
[5] Poisson
[6] Liovil
[7] Noeiman
[8] Direcle
[9] M.Bocher

سال ۱۸۸۸ به روی معادلاتی که تابع مجهول در آن تحت یک یا چند علامت انتگرال ظاهر می شوند، پیشنهاد شده است. در سال۱۸۹۶ پوانکاره[11] معادله انتگرال

$$u(x)+\lambda\int_0^x k(x,t)u(t)\,dt = f(x) \ .$$

که متناظر با معادله دیفرانسیل جزئی، $\nabla^2 u+\lambda = f(x,t)$، می باشد را بدست آورد. در همان سال ویتو ولترا[12] ، ریاضیدان ایتالیایی ، با وارد کردن متغیر x به عنوان حد بالایی انتگرال، یک رده مهمی از معادلات انتگرال را ایجاد نمود، که بعدها به نام وی نام گذاری شده است. لذا ولترا برای اولین بار نظریه عمومی معادلات انتگرالی را مطرح نمود. که فرم کلی آن به صورت زیر است

$$\varphi(x)u(x)= f(x)+\lambda\int_a^x k(x,t)u(t)\,dt.$$

ولترا و لیروکس[13] اولین کسانی بودند که قضایای وجود و یکتایی جواب را برای رده های عمومی معادلات انتگرال ولترا ثابت کردند. البته این روش ها خیلی به هم شبیه بودند و لیکن کار ولترا بیشتر مورد توجه قرار گرفت. در حدود سال های ۱۹۰۰ تا ۱۹۰۳ ریاضیدان سوئدی بنام فردهلم[14] معادلات انتگرال به صورت

$$\varphi(x)u(x)= f(x)+\lambda\int_a^b k(x,t)u(t)\,dt, a\le x\le b \ .$$

که یک دسته بندی کلی از معادلات انتگرال خطی بود ارائه کرد که شامل دسته بندی خاصی از معادلات ولترا نیز بود. تحقیقات وی برای دستیابی به جواب معادله حرکت موج منجر به ارائه قضایای بنیادی گردید که امروزه بنام وی در معادلات انتگرال شناخته شده می باشند. ارائه سمیناری توسط اریک هولمگر[15] در سال۱۹۰۱ روی کارهای فردهلم علاقه هیلبرت[16] را به تحقیق روی معادله انتگرال برانگیخت. او در بسیاری از مسائل ریاضی فیزیک از معادله انتگرال کمک گرفت. هیلبرت فاصله انتگرال را فاصله $[0,1]$ و هسته $k(x,t)$ را پیوسته فرض کرد. یکی از کارهای مهم هیلبرت فرموله کردن مسئله معادلات دیفرانسیل مقادیر

---

[10] Bois.Reymond
[11] H.Poincare
[12] V.Volterra
[13] Lirox
[14] Fredholm
[15] E.Holmger
[16] Hilbert

مرزی به صورت معادلات انتگرال است و همچنین برای اولین بار اصطلاح نوع اول و دوم که امروزه در معادلات انتگرال به کار می رود توسط وی پیشنهاد شد. در اوایل نیمه دوم قرن بیستم تحقیقات زیادی توسط هرمن ویل[۱۷] روی جواب معادله انتگرال در ارتباط با اینکه به ازای چه مقادیری از λ معادله انتگرال جواب دارد صورت گرفت. معادله انتگرال در علومی چون: فیزیک، مکانیک، ارتعاش، آمار و احتمال، رشد جمعیت، مهندسی، ارتباطات، پتروشیمی، ساختمان و پل سازی، اشعه لیزر، نیروگاه هسته ای، راکتورها و غیره کاربرد دارد. روی هم رفته معادلات دیفرانسیل تا کنون جهان فیزیکی را بخوبی توصیف کرده اند(شبیه معادلات موج و انتشار گرما و غیره) و لیکن همواره لزوم معادلات انتگرال احساس می شود. معادلات انتگرال در مقایسه با معادلات دیفرانسیل دارای مبدا جدیدتری می باشند، به نحوی که بیشترین گسترش آن در قرن حاضر بوده است. هر چند ملاحظه می شود که بسیاری از حالات خاص معادلات انتگرال در قرن نوزدهم نیز مورد بحث قرار گرفته بوده اند.[۱۶]

روش های کلاسیک و عددی بسیاری برای حل معادلات انتگرال ارائه شده است. اما در حالت کلی بسیاری از معادلات انتگرال قابل حل به روش های تحلیلی نیستند. لذا به کارگیری روش های عددی جهت حل معادلات انتگرال از اهمیت بسزایی برخوردار است. از جمله این روش ها حل با پایه برخی توابع را می توان نام برد که در طی فصل های بعدی به آن می پردازیم.

---

[17] Herman.vill

۳.۱ تعاریف کلی و دسته بندی معادلات انتگرال

تعریف ۱. ۳. ۱ هر معادله ای که در آن تابع مجهول زیر علامت انتگرال ظاهر شود، معادله انتگرال نامیده می شود. صورت کلی این معادلات می تواند به شکل زیر باشد

$$\varphi(x)u(x)=f(x)+\lambda\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}k(x,t)F\left(u(t)\right)dt \quad . \tag{۱. ۳. ۱}$$

در این معادله λ پارامتر معلوم، $F, f(x),\varphi(x),\beta(x),\alpha(x)$ ، توابعی معلوم و $u(x)$، تابعی مجهول است. هم چنین $k(x,t)$ تابعی معلوم بر حسب x,t است.[۵]

$k(x,t)$ هسته معادله انتگرال نامیده می شود، که می توان آن را به دو دسته جدایی پذیر و جدایی ناپذیر تقسیم کرد.

هدف از حل معادله انتگرال، به دست آوردن تابعی مانند $u(x)$ است به طوری که در معادله (۱. ۳. ۱)صدق کند.

تعریف ۱. ۳. ۲ هسته $k(x,t)$ را جدایی پذیر یا تبهگن گویند هر گاه بتوان آن را بصورت زیر نوشت

$$k(x,t)=\sum_{k=1}^{n}g_k(x)h_k(t) \quad ,$$

که درآن توابع $g_1(x),...,g_n(x)$ و توابع $h_1(t),...,h_n(t)$ به ترتیب توابعی مستقل برحسب x,t هستند.

مثال ۱. ۳. ۱ تابع ، $k(x,t)=x^2-3xt+t^2$ جدایی پذیر است. زیرا آن را می توان به صورت زیر نوشت

$$k(x,t)=x^2-3xt+t^2=\sum_{k=1}^{3}g_k(x)h_k(t) \, ,$$

که در آن داریم

$$g_1(x)=x^2, g_2(x)=-3x, g_3(x)=1 \, ,$$

$$h_1(t)=1, h_2(t)=t, h_3(t)=t^2 \quad .$$

نکته :هسته های غیرجدایی پذیر خوش رفتار را می توان به وسیله بسط تیلور به یک هسته جدایی پذیر تقلیل داد.

تعریف ۱. ۳. ۳ هرگاه در معادله(۱. ۳. ۱)، $f(x)=0$ باشد آنگاه این معادله را معادله همگن و در غیر این صورت آنرا معادله غیرهمگن گویند.

تعریف ۱. ۳. ٤ هرگاه در معادله(۱. ۳. ۱)، $F(u(t))=u(t)$باشد این معادله را معادله خطی و در غیر این صورت آنرا معادله غیر خطی گویند.

مثال ۱. ۳. ۲ معادله انتگرال

$$u(x)=2x+\int_0^2 xy^2u(t)\,dt\ .$$

یک معادله انتگرال خطی غیر همگن است و معادله

$$u(x)=-\int_0^x (t-x)u^4(t)\,dt\ .$$

یک معادله انتگرال غیر خطی همگن می باشد.

۱. ٤ تقسیم بندی معادلات انتگرال

دسته بندی های متفاوتی برای معادلات انتگرال وجود دارد. یکی از این دسته بندی بر اساس حدود انتگرال است. متداولترین معادلات انتگرال را می توان به دو گروه معادلات انتگرال فردهلم و معادلات انتگرال ولترا دسته بندی نمود. در این پایان نامه تقسیم بندی زیر را برای معادلات انتگرال در نظر می گیریم،

۱-معادلات انتگرال فردهلم

۲-معادلات انتگرال ولترا

۳-معادلات انتگرال منفرد[18]

۴-معادلات انتگرال دیفرانسیل

[18] Singular integral equations

در بخش های بعدی هر کدام از انواع معادلات ذکر شده به اختصار توضیح داده شده اند.

۱. ۵ معادلات انتگرال فردهلم

تعریف ۱. ۵. ۱ معادله انتگرالی که در آن حدود انتگرال ثابت باشد را یک معادله انتگرال فردهلم گویند. شکل کلی این معادله به صورت زیر است

$$\varphi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) F(u(t))\, dt \ , \qquad (۱. ۵. ۱)$$

در معادله بالا λ, a, b اعدادی معلوم، $\varphi(x), k(x,t), f(x)$ توابعی معلوم، $F(u(t))$ تابعی بر حسب $u(x)$ و $u(x)$ تابعی مجهول می باشند. بر حسب اینکه $\varphi(x)$ کدامیک از مقادیر زیر را انتخاب کند معادلات انتگرال فردهلم به دو دسته عمده تقسیم می شوند

۱-زمانیکه $\varphi(x) = 0$ معادله انتگرال فردهلم به صورت زیر تبدیل می شود

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) F(u(t))\, dt = 0 \ .$$

که به آن معادله انتگرال فردهلم نوع اول می گوییم.

معمولا" تابع جواب در این نوع معادلات نسبت به تابع f خیلی حساس است، بدین معنی که تغییر جزیی در $f(x)$ باعث تغییرات زیادی در تابع جواب می شود. به عبارت دیگر این نوع مسائل بد وضع هستند که روش های خاصی برای پیدا نمودن جواب آنها مورد نیاز است[۷]

۲- زمانیکه $\varphi(x) = 1$ معادله انتگرال فردهلم به صورت زیر تبدیل می شود.

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) F(u(t))\, dt \ .$$

که به آن معادله انتگرال فردهلم نوع دوم می گوییم.

قضیه ۱. ۵. ۱ اگر هسته $k(x,t)$ حقیقی و پیوسته و روی مربع $a \le t \le b, a \le x \le b$ کراندار باشد، یعنی اگر داشته باشیم

$$\left|k(x,t)\right| \le M, a \le x \le b, a \le t \le b \quad .$$

و همچنین $u(x)$ در فاصله $a \le x \le b$ پیوسته و غیر صفر باشد، آنگاه شرط کافی برای آنکه معادله انتگرال فردهلم خطی نوع دوم غیر همگن جواب منحصر به فرد داشته باشد، به صورت زیر می باشد.[۱۱]

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)} \quad . \qquad (۱. ۵. ۲)$$

البته بایستی به این نکته توجه کرد که یک جواب پیوسته برای معادله انتگرال فردهلم حتی اگر شرط(۱. ۵. ۲) برقرار نباشد می تواند وجود داشته باشد.

مثال ۱. ۵. ۲ معادله انتگرال زیر را در نظر بگیرید

$$u(x) = -4 + \int_0^1 (2x+3t)u(t)\,dt.$$

در این معادله داریم

$$(b-a)=1, \lambda = 1, \left|k(x,t)\right| \le 5 \quad .$$

لذا

$$1 = |\lambda| > \frac{1}{M(b-a)} = \frac{1}{5} \quad .$$

یعنی شرط (۱. ۵. ۲) برقرار نمی باشد. ولی در حقیقت معادله دارای جواب حقیقی پیوسته به صورت $u(x)=4$ می باشد، این عمل را می توان با جای گذاری مستقیم نشان داد.

تعریف ۱. ۵. ۳ : تابع u یک تابع l_2 نامیده می شود، هر گاه داشته باشیم $\int_a^b \left|u(t)\right|^2 dt < \infty$ یا به عبارت دیگر هرگاه این نامساوی برقرار باشد، $u(x)$ را مربع انتگرال پذیر گویند.

تعریف ۱. ۵. ٤ هسته $k\left(x,t\right)$ یک تابع l_2 - مربع انتگرال پذیر نامیده می شود، هرگاه شرط زیر که به شرط منظم بودن شهرت دارد، باهم برقرار باشند.

۱-برای هر مجموعه از مقادیر x, t در مربع $a \le x \le b, a \le t \le b$ داشته باشیم

$$\int_a^b \int_a^b \left|k\left(x,t\right)\right|^2 dxdt < \infty \ .$$

۲-برای هر مقدار x در $a \le x \le b$

$$\int_a^b \left|k\left(x,t\right)\right|^2 dt < \infty \ .$$

و برای هر مقدار t در $a \le t \le b$

$$\int_a^b \left|k\left(x,t\right)\right|^2 dx < \infty \ .$$

باشد.

قضیه ۱. ۵. ۵ (قضیه متناوب فردهلم) معادله انتگرال فردهلم خطی غیر همگن

$$u\left(x\right)= f\left(x\right)+\lambda\int_a^b k\left(x,t\right)u\left(t\right)dt \ ,$$

دارای جواب یکتاست اگر و فقط اگر معادله انتگرال فردهلم همگن

$$u\left(x\right)=\lambda\int_a^b k\left(x,t\right)u\left(t\right)dt \ .$$

فقط جواب بدیهی $u\left(x\right)=0$ داشته باشد.اثبات به[۷] رجوع کنید.