دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه برای دریافت کارشناسی ارشد ریاضی محض (آنالیز)

پایداری معادلات تابعی فیبوناچی و شبه فیبوناچی

توسط:

سیده حکیمه طالبیان نیک

استاد راهنما:

دکتر مجید اسحاقی

استاد مشاور:

دکتر فریدون حبیبیان دهکردی

مهر ۱۳۹۳

تقدیم به:

پدرم به پاس سالها تلاش تا «بیاموزم»

مادرم به پاس دلسوزی ها تا «بیاسایم»

همسرم به پاس مهربانی ها تا «بنگارم»

سپاس گزاری...

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند. سلام و دورد بر محمّد و خاندان پاك او، طاهران معصوم، هم آنان که وجودمان وام‌دار وجودشان است؛ و نفرین پیوسته بر دشمنان ایشان تا روز رستاخیز....

حال که با فضل و عنایت خداوند رحمان، موفق به تنظیم و تدوین این پایان نامه شده‌ام وظیفه‌ی خود می‌دانم از همه عزیزانی که اینجانب را طی انجام این تحقیق کمک و مساعدت نمودند و به نحوی مرا مورد لطف و عنایت خویش قرار داده‌اند، مراتب امتنان و تشکر را ابراز نمایم.

ــ از استاد راهنمای گرامی جناب آقای دکتراسحاقی که با راهنمایی‌های ارزشمند و همکاری‌های صمیمانه و بی‌شائبه خویش راهگشای این تحقیق بوده‌اند صمیمانه تشکر وسپاسگزاری می‌کنم.

ــ از همفکری و مساعدت استاد مشاور جناب آقای دکتر حبیبیان تشکر و قدردانی می‌کنم.

ــ از داوران محترم جناب آقای دکتر غفاری و جناب آقای دکتر قائمی که داوری این پایان نامه را پذیرفته و پیشنهادهای ارزنده خود را ابراز داشتند سپاسگذارم.

همچنین همواره خود را مدیون حمایت‌های خانواده و همسر عزیزم دانسته که از هیچ تلاشی در جهت رسیدن به اهدافم فروگذار نکرده‌اندر خاتمه سعادت، سلامت و موفقیت همیشگی این عزیزان را از خداوند متعال خواستارم.

چکیده

در این پایان نامه حل و پایداری هایرز_ اولام معادلات تابعی فیبوناچی $f(x) = f(x-1)+f(x-2)$ روی فضای باناخ ناارشمیدسی را بررسی می‌کنیم .به علاوه پایداری رابطه‌های بازگشتی غیرخطی روی فضای متریک وناپایداری رابطه‌ی بازگشتی خطی مرتبه اول روی فضای باناخ را اثبات می‌کنیم.

واژه های کلیدی: پایداری هایرز_ اولام،معادلات تابعی فیبوناچی، رابطه‌ی بازگشتی،ناپایداری،بازگشت خطی،فضای باناخ ناارشمیدسی.

فهرست مطالب

مقدمه

در سال ۱۹۴۰ ، اولام [1] [۳۶] برای نخستین بار مسئله پایداری[2]معادلات تابعی را به صورت زیر مطرح کرد: فرض کنیم $(G_1,*)$ یک گروه، $(G_2,\diamond,d)$یک گروه متریک با متر $d(.,.)$ و $\varepsilon>0$ داده شده باشد.

آیا $\delta(\varepsilon)>0$ موجود است به طوری‌که اگر تابع $h:G_1\longrightarrow G_2$ در رابطه

$$d(h(x*y),h(x)\diamond h(y))<\delta,\qquad (x,y\in G_1)$$

صدق کند در این صورت همریختی $H:G_1\longrightarrow G_2$ موجود باشد به قسمی‌که

$$d(h(x),H(x))<\varepsilon,\qquad (x\in G_1).$$

یک سال بعد مسئله اولام توسط هایرز [3] [۱۵]برای فضاهای باناخ به صورت زیر حل شد.

اگر X و Y فضاهای باناخ و $\delta>0$ و تابع $f:X\longrightarrow Y$ برای هر $x,y\in X$ در نامعادله

$$\|f(x+y)-f(x)-f(y)\|\leq\delta$$

صدق کند در این صورت حد $A(x)=\lim_{n\to\infty}2^{-n}f(2^nx)$ برای هر $x\in X$ وجود دارد و A یک تابع جمعی منحصربفرد است به طوری‌که برای هر $x\in X$

$$\|f(x)-A(x)\|\leq\delta.$$

در سال۱۹۷۸، تمیستکلیس راسیاس [4] [۲۹]حالت کلی قضیه هایرز را اثبات کرد. این مفهوم جدید به پایداری هایرز ــ اولام ــ راسیاس معروف است.

در سال ۱۹۸۷، هنسل [5] [۱۴]فضاهای نرمدار ناارشمیدسی را تعریف کرده است. در کمتر از سه

---

[1] $Ulam$

[2] $stability$

[3] $Hyers$

[4] $Themistocles\ \ M.\ \ Rassias$

[5] $Hensel$

دهه نظریه فضاهای ناارشمیدسی توجه فیزیکدانان را به خصوص در فیزیک کوانتوم و رشته‌های دیگر $p-$ جمعی جلب کرد.[۲۱،۳۳،۳۷،۳۸].

این پایان نامه شامل ۵ فصل است در فصل اول خواننده با مفاهیم و تعاریفی که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرد، آشنا می‌شود.

در فصل دوم،حل[۶] عمومی و پایداری معادلات تابعی $f(x) = pf(x-۱) - qf(x-۲)$ روی فضاهای باناخ را بررسی می‌کنیم.

در فصل سوم،پایداری رابطه‌های بازگشتی غیرخطی[۷] روی فضای متریک را اثبات می‌کنیم.

در فصل چهارم،ناپایداری رابطه‌ی بازگشتی خطی[۸] مرتبه اول روی فضاهای باناخ رابررسی می‌کنیم.

در فصل پنجم،حل عمومی و پایداری معادله تابعی فیبوناچی[۹] روی فضاهای باناخ ناارشمیدسی را بررسی می‌کنیم.

[۶] $soloution$

[۷] $nonlinear$

[۸] $linearrecurrence$

[۹] $Fibonacci$

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱.۱ فضای باناخ

تعریف ۱.۱. فرض کنیم F میدان $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشد.

یک نرم روی فضای برداری V نگاشتی مانند $\|.\| : V \longrightarrow \mathbb{F}$ است به قسمی که

۱) $\|v\| \geq 0$ برای هر $v \in V$ و $\|v\| = 0$ اگر و تنها اگر $v = 0$،

۲) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ برای هر $u, v \in V$،

۳) $\|\alpha v\| = |\alpha| \, \|v\|$ برای هر $\alpha \in \mathbb{F}, v \in V$.

و در این حالت زوج $(V, \|.\|)$ را یک فضای نرمدار می‌نامیم.

تعریف ۲.۱. فرض کنیم $(V, \|.\|)$ یک فضای نرمدار باشد. زوج $(V, \|.\|)$ یک فضای باناخ[1] نامیده می‌شود هرگاه فضای متریک (V, d) با متر $d(x, y) = \|x - y\|$ کامل باشد.

تعریف ۳.۱. فضای برداری نرمدار کامل را فضای باناخ می‌نامیم.

در این بخش منظور از میدان $\mathbb{F}$ همان $\mathbb{C}$ یا $\mathbb{R}$ می‌باشد مگر آنکه یکی از آنها قید گردد.

[1] *Banach space*

۲.۱ فضای ناارشمیدسی و βـ نرم ناارشمیدسی

تعریف ۴.۱. فرض کنیم $\mathbb{K}$ یک میدان باشد. قدرمطلق ناارشمیدسی روی $\mathbb{K}$ یک تابع $| \, | : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{R}$ است به طوری‌که برای هر $a, b \in \mathbb{K}$ داشته باشیم

۱) $| a | \geq ۰$ و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $a = ۰$،

۲) $| ab | = | a || b |$،

۳) $| a + b | \leq \max\{| a |, | b |\}$ (نامساوی قوی مثلث).

با استفاده از (۲) داریم $۱ = |۱ -| = |۱|$. بنابراین با استقرا، از خاصیت (۳) برای هر عدد صحیح n خواهیم داشت $|n| \leq ۱$. علاوه بر این ما همیشه فرض می کنیم که $|\cdot|$ نابدیهی است، به عبارت دیگر یک $a_\circ \in K$ وجود دارد که $|a_\circ| \notin \{۰, ۱\}$.

تعریف ۵.۱. فرض کنید X یک فضای خطی روی میدان اسکالر $\mathbb{K}$ با قدرمطلق نابدیهی ناارشمیدسی $| \, |$ باشد. تابع $\| \, \| : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ را نرم ناارشمیدسی می‌نامیم اگر در شرایط زیر صدق کند

۱) برای هر $x \in X$، $\|x\| = ۰$ اگر و تنها اگر $x = ۰$،

۲) برای هر $r \in \mathbb{K}$ و $x \in X$، $\|rx\| = | r | \, \|x\|$،

۳) برای هر $x, y \in X$، $| x + y | \leq \max\{| x |, \; | y |\}$ (نامساوی قوی مثلث)

و $(X, \| \, \|)$ را فضای ناارشمیدسی می‌نامیم.

مهمترین مثال از فضاهای ناارشمیدسی اعداد $p-$جمعی هستند. (مثال۱.۱را ببینید).مهمترین خاصیت اعداد $p-$جمعی این است که در اصل ارشمیدسی ((برای هر $x, y > ۰$ یک عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که $x < ny$)) صدق نمی‌کنند.

مثال ۱.۱. فرض کنیم p عدد اول باشد. هر عدد گویای مخالف صفر را می‌توان به صورت $a = \frac{m}{n} p^{n_x}$ نوشت به طوری‌که m و n اعداد صحیحی هستند که بر p تقسیم پذیر نیستند،

قدرمطلق $p-$ جمعی را به صورت $|a|_p =: p^{-nx}$ تعریف می‌کنیم. لذا $|.|$ یک نرم ناارشمیدسی روی Q است. Q کامل شده را نسبت به $|.|$ با Q_p نمایش می دهیم که میدان اعداد $p-$ جمعی نامیده می‌شود.توجه کنید که اگر $p \geq ۳$ آنگاه برای هر عدد صحیح n داریم $|۲^n| = ۱$.

تعریف ۶.۱. با توجه به نامساوی

$$\|x_m - x_l\| \leq \max\{\|x_{j+۱} - x_j\| : l \leq j \leq m-۱\} \quad (m \geq l)$$

یک دنباله $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ در X کوشی است اگر و تنها اگر دنباله $\{x_{m+۱} - x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ در فضای ناارشمیدسی به صفر همگرا باشد.

تعریف ۷.۱. فضای ناارشمیدسی را کامل گوییم اگر هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد.

تعریف ۸.۱. فرض کنیم A یک جبر باشد و $\|.\|$ یک نرم ناارشمیدسی روی A باشد. در این صورت A یک جبر ناارشمیدسی است هرگاه برای هر $a, b \in A$، $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$.
همچنبن A را یک جبر ناارشمیدسی باناخ گوییم هرگاه $(A, \|.\|)$ یک فضای ناارشمیدسی کامل باشد.

تعریف ۹.۱. فرض کنید X یک فضای برداری روی میدان اسکالر $\mathbb{K}$ با قدرمطلق نابدیهی ناارشمیدسی $|\ |$ باشد و $۰ < \beta \leq ۱$. تابع $||.|| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ یک βـ نرم ناارشمیدسی است هرگاه در شرایط زیر صدق کند

۱) برای هر $x \in X$، $\|x\| = ۰$ اگر و تنها اگر $x = ۰$،

۲) برای هر $r \in \mathbb{K}$ و $x \in X$، $\|rx\| =| r |^\beta \|x\|$،

۳) برای هر $x, y \in X$، $| x + y |\leq \max\{| x |, | y |\}$ (نامساوی قوی مثلث).

به علاوه زوج $(X, ||.||)$ فضای βـ نرم ناارشمیدسی نامیده می‌شود.

تعریف ۱۰.۱. دنباله ی $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ در فضای βـ نرم ناارشمیدسی کوشی است هرگاه $\lim_{n,m\to\infty} \|x_n - x_m\| = ۰$. فضای βـ نرم ناارشمیدسی را فضای βـ باناخ ناارشمیدسی می نامیم اگر هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد.

۳.۱ پایداری معادلات تابعی

معادله ی $f(x+y) = f(x) + f(y)$ یک معادله تابعی شناخته شده است که موسوم به معادله ی کوشی است که هر جواب از این معادله یک تابع جمعی نامیده می‌شود. برای توابع حقیقی مقدار هر جواب اندازه پذیر لبگ از معادله فوق به صورت $f(x) = cx$ می باشد که در آن c عددی ثابت است.

پایداری معادلات تابعی اولین بار برای معادله تابعی کوشی مطرح شده است و بعد از آن روی معادله های تابعی دیگر مطرح شد و هم اکنون تحقیقات گسترده ای در این زمینه روی فضاهای مختلف انجام می‌گیرد.

تذکر ۱.۱. در این بخش X را فضاهای برداری نرمدار حقیقی و Y را فضایی باناخ در نظر می‌گیریم.

تعریف ۱۱.۱. فرض کنیم $\varepsilon > ۰$ و تابع $f : X \longrightarrow Y$ داده شده باشد.تابع f را $\varepsilon-$ جمعی می‌نامیم هرگاه برای هر $x, y \in X$ در نامعادله ی زیر صدق کند

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon.$$

قضیه ۱.۱. (هایرز_اولام) اگر تابع $f : X \longrightarrow Y$، $\varepsilon-$ جمعی باشد. آنگاه تابع جمعی و منحصربفرد $A : X \longrightarrow Y$ که به صورت

$$A(x) = \lim_{n\to\infty} ۲^{-n} f(۲^n x)$$

برای هر $x \in X$ تعریف می‌شود وجود دارد به طوری‌که برای هر $x \in X$

$$\|f(x) - A(x)\| \leq \varepsilon.$$

اثبات. برای هر $x, y \in X$ داریم

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon. \qquad (۱.۱)$$

اگر در (۱.۱) به جای y مقدار x قرار دهیم برای هر $x \in X$ خواهیم داشت

$$\|f(۲x) - ۲f(x)\| \leq \varepsilon. \tag{۲.۱}$$

اگر (۲.۱) را بر ۲ تقسیم کنیم برای هر $x \in X$ داریم

$$\|\frac{f(۲x)}{۲} - f(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{۲}. \tag{۳.۱}$$

اکنون در (۳.۱) به جای x مقدار $۲x$ قرار داده و نتیجه را بر ۲ تقسیم می‌کنیم برای هر $x \in X$ بدست می‌آوریم

$$\|\frac{f(۲^۲x)}{۲^۲} - \frac{f(۲x)}{۲}\| \leq \frac{\varepsilon}{۲^۲}. \tag{۴.۱}$$

با استفاده از روابط (۳.۱) و (۴.۱) برای هر $x \in X$ داریم

$$\|\frac{f(۲^۲x)}{۲^۲} - f(x)\| \leq \varepsilon(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲^۲}) = \varepsilon(۱ - ۲^{-۲}). \tag{۵.۱}$$

با ادامه روند فوق به استقرا، برای هر $x \in X$ خواهیم داشت

$$\|۲^{-n}f(۲^nx) - f(x)\| \leq \varepsilon(۱ - ۲^{-n}). \tag{۶.۱}$$

قرار می دهیم $A_n(x) = ۲^{-n}f(۲^nx)$ و ثابت می‌کنیم $\{A_n(x)\}_{n\in N}$ به شکل یک دنباله همگرا است. برای این منظور از محک همگرایی کوشی استفاده می‌کنیم. در (۶.۱) به جای x مقدار ۲^mx قرار می‌دهیم و نتیجه را بر ۲^m تقسیم می‌کنیم در این صورت برای هر $x \in X$

$$\|۲^{-(m+n)}f(۲^{m+n}x) - ۲^{-m}f(۲^mx)\| \leq \varepsilon(۱ - ۲^{-n})۲^{-m}. \tag{۷.۱}$$

از آنجا که Y فضای باناخ است، بنا به محک همگرایی کوشی $\lim_{n\to\infty} A_n(x)$ وجود دارد. بنابراین می‌توان تابع $A : X \longrightarrow Y$ را با ضابطه‌ی $A(x) := \lim_{n\to\infty} A_n(x)$ تعریف نمود. در نتیجه اگر در (۶.۱) $n \to \infty$ آنگاه برای هر $x \in X$ خواهیم داشت

$$\|A(x) - f(x)\| \leq \varepsilon.$$

نشان می‌دهیم A جمعی است.برای این منظور در (۴.۱) به جای x و y به ترتیب مقادیر $\text{۲}^n x$ و $\text{۲}^n y$ را قرار می‌دهیم و حاصل را بر ۲^n تقسیم می‌کنیم برای هر $x, y \in X$ بدست می‌آوریم

$$\|\text{۲}^{-n} f(\text{۲}^n(x+y)) - \text{۲}^{-n} f(\text{۲}^n x) - \text{۲}^{-n} f(\text{۲}^n y)\| \leq \text{۲}^{-n}\varepsilon.$$

اگر در نامعادله اخیر $n \to \infty$ در این صورت برای هر $x, y \in X$

$$A(x+y) = A(x) + A(y).$$

حال ثابت می‌کنیم A منحصربفرد است.

فرض کنیم $A' : X \longrightarrow Y$ تابع جمعی دیگری باشد که برای هر $x \in X$ در $\|A'(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$ صدق می کند. عنصری مانند y متعلق به X وجود دارد که $A'(y) \neq A(y)$. از آنجا که برای هر $x \in X$ داریم $\|A'(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$. بنابراین

$$\|A(x) - A'(x)\| \leq \|f(x) - A(x)\| + \|A'(x) - f(x)\| \leq \text{۲}\varepsilon.$$

برای هر $x \in X$ برقرار است.

عدد $k > \text{۰}$ را طوری انتخاب می‌کنیم که برای هر $y \in Y$

$$k\|A(y) - A'(y)\| > \text{۲}\varepsilon.$$

چون هر دو تابع A و A' جمعی‌اند بنابراین

$$\|A(ky) - A'(ky)\| = k\|A(y) - A'(y)\| > \text{۲}\varepsilon.$$

که این تناقض است و لذا برای هر $x \in X$، $A(x) = A'(x)$.

□

قضیه ۲.۱. (هایرز_اولام_راسیاس) فرض کنیم $f : X \longrightarrow Y$ تابعی باشد که برای هر $x, y \in X$ در رابطه‌ی

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon(\|x\|^p + \|y\|^p)$$

صدق کند. در این صورت تابع منحصربفرد جمعی $A : X \longrightarrow Y$ وجود دارد به طوری‌که برای هر $x \in X$ در نامعادله‌ی

$$\|f(x) - A(x)\| \leq k\varepsilon\|x\|^p$$

صدق می کند که در آن ۱ $p <$، $k = \frac{۲}{۲-۲^p}$ و ε ثابت است. به علاوه اگر ۰ $p <$ در این صورت نامعادله آخر برای هر ۰ $x \neq$ برقرار است.

اثبات. ر.ک .[۱۶].

□

قضیه ۳.۱. فرض کنیم $f : X \longrightarrow Y$ تابعی باشد که در رابطه ی

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon(\|x\|^p + \|y\|^p)$$

برای هر $x, y \in X$ صدق کند. در این صورت تابع منحصربفرد جمعی $A : X \longrightarrow Y$ وجود دارد به طوری که برای هر $x \in X$ در نامعادله‌ی

$$\|f(x) - A(x)\| \leq k\varepsilon\|x\|^p$$

صدق می‌کند که در آن ۱ $p >$، $k = \frac{۲}{۲^p-۲}$ و ε ثابت است.

اثبات. ر.ک. [۱۶].

□

فصل ۲

معادله تابعی $f(x) = pf(x-1) - qf(x-2)$

در این فصل معادله تابعی

$$f(x) = pf(x-1) - qf(x-2) \tag{1.2}$$

را معرفی کرده و حل و پایداری آن را روی فضاهای باناخ اثبات می‌کنیم.

فرض کنیم p و q اعداد صحیح باشند و $q \neq 0$ و $p^2 - 4q \neq 0$. از طرفی a و b ریشه های معادله $x^2 - px + q = 0$ می‌باشند به طوری‌که

$$a = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \quad \text{و} \quad b = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}. \tag{2.2}$$

به علاوه برای هر $n \in \mathbb{Z}$ داریم

$$U_n = U_n(p, q) = \frac{a^n - b^n}{a - b}. \tag{3.2}$$

اگر p و q اعداد صحیح باشند آنگاه به $\{U_n(p, q)\}$ دنباله‌ی نوع اول گفته می‌شود پس برای هر n داریم

$$U_{n+2} = pU_{n+1} - qU_n. \tag{4.2}$$

۱.۲ حل عمومی معادله

در این بخش حل عمومی معادله تابعی(۱.۲) را بیان می‌کنیم. در این بخش منظور از a و b همان ریشه‌های معادله $x^2 - px + q = 0$ می‌باشند.

قضیه ۱.۲. فرض کنیم X یک فضای برداری باشد. تابع $f : \mathbb{R} \to X$ در رابطه (۱.۲) صدق می‌کند اگر و فقط اگر تابع $h : [-1, 1) \to X$ موجود باشد به طوری‌که برای هر $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = U_{[x]+1}h(x-[x]) - qU_{[x]}h(x-[x]-1). \tag{۵.۲}$$

اثبات. چون $a + b = p$ و $ab = q$ طبق رابطه‌ی (۱.۲) برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم

$$\begin{aligned} f(x) - af(x-1) &= b[f(x-1) - af(x-2)], \\ f(x) - bf(x-1) &= a[f(x-1) - bf(x-2)]. \end{aligned} \tag{۶.۲}$$

با استقرای ریاضی برای هر $x \in \mathbb{R}$ و هر $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ثابت می‌کنیم

$$\begin{aligned} f(x) - af(x-1) &= b^n[f(x-n) - af(x-n-1)], \\ f(x) - bf(x-1) &= a^n[f(x-n) - bf(x-n-1)]. \end{aligned} \tag{۷.۲}$$

معادله برای $n = 0, 1$ برقرار است. فرض کنیم (۷.۲) برای $n \geq 1$ ای برقرار باشد. در رابطه (۷.۲) به جای x مقدار $x - 1$ را قرار داده و طرفین معادله را در aوb ضرب می‌کنیم. بنابراین

$$\begin{aligned} b[f(x-1) - af(x-2)] &= b^{n+1}[f(x-(n+1) - af(x-(n+1)-1)], \\ a[f(x-1) - bf(x-2)] &= a^{n+1}[f(x-(n+1)] - bf(x-(n+1)-1)]. \end{aligned}$$

با استفاده از رابطه(۶.۲) در طرف چپ تساوی اخیر داریم

$$\begin{aligned} f(x) - af(x-1) &= b^{n+1}[f(x-(n+1) - af(x-(n+1)-1)], \\ f(x) - bf(x-1) &= a^{n+1}[f(x-(n+1)] - bf(x-(n+1)-1)]. \end{aligned}$$

و حکم استقرا ثابت می‌شود. اگر به جای x مقدار $x + n$ $(n \geq 0)$ را در (۷.۲) قرار دهیم و معادله بدست آمده را بر b^n (به همین نسبت a^n) تقسیم کنیم و اگر به جای n مقدار $-m$ را در معادله

حاصل شده قرار دهیم معادله (۷.۲) بدست می‌آید. بنابراین معادله‌های فوق برای هر $x \in \mathbb{R}$ و هر $n \in \mathbb{Z}$ برقرار هستند و این ایجاب می‌کند که

$$f(x) = U_{n+1} f(x-n) - qU_n f(x-n-1). \tag{۸.۲}$$

فرض کنیم $x \in \mathbb{R}$ ثابت باشد. با قرار دادن $n = [x]$ در (۸.۲) داریم

$$f(x) = U_{[x]+1} f(x-[x]) - qU_{[x]} f(x-[x]-1). \tag{۹.۲}$$

چون $0 \leq x-[x] < 1$، $-1 \leq x-[x]-1 < 0$ و $-2 \leq x-[x]-2 < -1$. اگر تابع $h : [-1,1) \to X$ تعریف شده به صورت $h := f|_{[-1,1)}$ را در نظر بگیریم، رابطه(۱.۲) بدست می‌آید.

برعکس، فرض کنیم f تابعی باشد که برای تابع دلخواه $h : [-1,1) \to X$ در(۱.۲) صدق کند. نشان می‌دهیم f تابعی است که در (۱.۲) صدق می‌کند.

از رابطه (۵.۲) داریم

$$\begin{aligned} f(x) &= U_{[x]+1} h(x-[x]) - qU_{[x]} h(x-[x]-1), \\ f(x-1) &= U_{[x]} h(x-[x]) - qU_{[x]-1} h(x-[x]-1), \\ f(x-2) &= U_{[x]-1} h(x-[x]) - qU_{[x]-2} h(x-[x]-1). \end{aligned} \tag{۱۰.۲}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} f(x) - pf(x-1) + qf(x-2) &= (U_{[x]+1} - pU_{[x]} + qU_{[x]-1}) h(x-[x]) \\ &\quad - q(U_{[x]} - pU_{[x]-1} + qU_{[x]-2}) h(x-[x]-1). \end{aligned} \tag{۱۱.۲}$$

که این نشان می‌دهد f در (۱.۲) صدق می‌کند.

□

تذکر ۱.۲. معادله تابعی (۱.۲) در حالت خاص معادله

$$\sum_{i=0}^{n} p_i f(g^i(x)) = 0$$

با $g(x) = x - 1$ و $n = 2$ می‌باشد.

۲.۲ پایداری معادله تابعی $f(x) = pf(x-۱) - qf(x-۲)$

در این بخش پایداری هایرز_اولام معادله تابعی(۱.۲) روی فضاهای باناخ را اثبات می کنیم.

قضیه ۲.۲. فرض کنیم $(X, \|\cdot\|)$ یک فضای باناخ باشد. اگر تابع $f : \mathbb{R} \to X$ وجود داشته باشد به طوری‌که برای $\epsilon > ۰$ ای داشته باشیم

$$\|f(x) - pf(x-۱) + qf(x-۲)\| \leq \epsilon, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{۱۲.۲}$$

آنگاه تابع منحصربفرد $F : \mathbb{R} \to X$ وجود دارد که در شرط (۱.۲) صدق می‌کندبه طوری‌که برای هر $x \in \mathbb{R}$

$$\|f(x) - F(x)\| \leq \frac{|a| - |b|}{|a-b|} \frac{\epsilon}{(|a|-۱)(۱-|b|)}. \tag{۱۳.۲}$$

اثبات. روابط بین a و b با (۱۲.۲) ایجاب می‌کند که برای هر $x \in \mathbb{R}$

$$\|f(x) - af(x-۱) - b[f(x-۱) - af(x-۲)]\| \leq \epsilon. \tag{۱۴.۲}$$

اگر در نامساوی فوق برای $k \in \mathbb{Z}$ مقدار x را به $x-k$ تغییر دهیم در این صورت داریم

$$\|f(x-k) - af(x-k-۱) - b[f(x-k-۱) - af(x-k-۲)]\| \leq \epsilon. \tag{۱۵.۲}$$

طرفین رابطه‌ی اخیر را در $|b|^k$ ضرب می‌کنیم بنابراین برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم

$$\|b^k[f(x-k) - af(x-k-۱) - b^{k+۱}[f(x-k-۱) - af(x-k-۲)]\| \leq |b|^k\epsilon. \tag{۱۶.۲}$$

از این نامساوی برای هر $x \in \mathbb{R}$ و هر $n \in \mathbb{N}$ بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
&\|f(x) - af(x-۱) - b^n[f(x-n) - af(x-n-۱)]\| \\
&\leq \sum_{k=۰}^{n-۱} \|b^k[(f(x-k) - a(f(x-k-۱)] \\
&- b^{k+۱}[f(x-k-۱) - af(x-k-۲)]\| \\
&\leq \sum_{k=۰}^{n-۱} |b|^k\epsilon.
\end{aligned} \tag{۱۷.۲}$$

از رابطه(۱۶.۲) دنباله‌ی زیر یک دنباله‌ی کوشی است.

$$\{b^n[f(x-n) - af(x-n-۱)]\}_{n\in\mathbb{N}}$$