چکیده

نام خانوادگی : شمسایی	نام: آیلین	شماره دانشجویی : ۸۸۲۵۲۰۲
عنوان پایان نامه : بررسی ویژگی های منظم بودن نسبت به ایدال ها		
استاد/ اساتیدراهنما: دکتر سید جمال هاشمی زاده دزفولی		
استاد/ اساتید مشاور: دکتر البرز آذرنگ		
درجه تحصیلی: کارشناسی ارشد	رشته: ریاضی محض	گرایش: جبر
دانشگاه : دانشگاه شهید چمران اهواز	دانشکده: علوم ریاضی و کامپیوتر	گروه : ریاضی
تاریخ فارغ التحصیلی : ۹۰/۲/۲۵		تعداد صفحه: ۸۲
کلید واژه ها : منظم، یکال منظم، خودتوان، پوچ توان، خاصیت مولد یکتا، برد پایای یک، برد پایای یک یکال.		

چکیده:

هدف اصلی این پایان نامه بررسی ویژگی های منظو بودن عناصر یک حلقه نسبت به یک ایدال داده شد I می باشد. یکی از اهداف این پایان نامه بررسی ویژگی های معادل منظم بودن در حالت I=R برای ایدال دلخواه Iبدست می آید. بویژه ما مجموعه یکال های حلقه R،(U (R را با مجموعه $U(R) = \{u\backslash uI = Iu = I\}$ جایگزین خواهیم کرد و با استفاده از این یکال های نسبی، مفاهیمی مانند برد پایا و یکال منظم را تعمیم می دهیم. همچنین خواهیم دید که با فرض اینکه مجموعه یکال های نسبی، فاقد مقسوم علیه صفر باشد، چند نتیجه جالب بدست می آوریم.

فرم ۴

فهرست مطالب

۱ تعاریف و اصول مقدماتی ۳

۱.۱ مقدماتی از حلقه‌ها ۳

۲.۱ ایدال نیم‌اول و رادیکال‌اول ۷

۳.۱ مدول‌های پروژکتیو و انژکتیو ۹

۲ بررسی ویژگی‌های حلقه‌های منظم ۱۷

۱.۲ حلقه‌های منظم ۱۷

۲.۲ حلقه های قوی‌منظم و قوی π-منظم ۲۸

۳.۲ حلقه‌های مناسب و خوش‌ترکیب ۳۴

۴.۲ بررسی ایدال‌های یکال منظم ۴۰

۵.۲ برد پایای یک ۴۳

۶.۲ برد پایای یک یکال برای ایدال‌ها ۴۷

۳ بررسی ویژگی‌های منظم‌بودن نسبت به ایدال‌ها ۵۸

۱.۳ خاصیت مولد یکتای راست ۵۹

۲.۳ برد پایای یک نسبت به یک ایدال ۶۳

۳.۳ برد پایای معکوس‌های ون‌نیومن ۶۶

۴.۳ $U_I(R)$ فاقد مقسوم‌علیه‌صفر ۶۸

واژه نامه انگلیسی به فارسی ۷۲

واژه نامه فارسی به انگلیسی ۷۶

کتاب نامه ۸۰

فصل ۱

تعاریف و اصول مقدماتی

۱.۱ مقدماتی از حلقه‌ها

در این فصل به بیان مفاهیم اساسی مورد نیاز و برخی از قضیه‌ها که در فصل‌های بعد به کار می‌روند می‌پردازیم.در این پایان‌نامه، حلقه‌ها یک‌دار و مدول‌ها یکانی راست فرض می‌شوند.

تعریف ۱.۱.۱. هرگاه R یک حلقه باشد، آن‌گاه مرکز R مجموعه

$$C = \{c \in R | cr = rc \quad \text{،} \quad \text{به ازای هر } r \in R\}$$

است. C زیرحلقه R است.

تعریف ۲.۱.۱. عنصر e در حلقه R را خودتوان گوییم اگر $e^2 = e$. به‌علاوه هرگاه e یک عضو از مرکز حلقه R باشد، آن‌گاه آن را خودتوان مرکزی می گوییم.

قضیه ۳.۱.۱. *ایدال راست I از حلقه R یک جمع‌وند آن است اگر و فقط اگر عضو خودتوان $e \in R$ موجود باشد، به‌طوری‌که $I = eR$. به‌علاوه اگر e خودتوان باشد، آن‌گاه داریم*

$$R = eR \oplus (۱ - e)R.$$

لم ۴.۱.۱. *فرض کنیم e یک عضو خودتوان حلقه R باشد، در این صورت eRe با جمع و ضرب R یک حلقه است که صفر آن همان ۰_R و واحد آن e می‌باشد.*

تعریف ۵.۱.۱. حلقه R را یک حلقه بولی گوییم اگر هر عضو R یک خودتوان باشد. یعنی به ازای هر $x \in R$، $x^۲ = x$.

تعریف ۶.۱.۱. مجموعه خودتوان‌های $\{e_۱, e_۲, \ldots, e_n\}$ در حلقه یک‌دار R را مجموعه کامل گوییم هرگاه $e_۱ + \ldots + e_n = ۱$ و برای هر $i \neq j$ داشته باشم $e_i e_j = ۰$.

تعریف ۷.۱.۱. عضو ناصفر a در حلقه R را یک مقسوم‌علیه‌صفر چپ(راست) گوییم اگر عضو ناصفری مانند $b \in R$ موجود باشد به‌طوری‌که $ab = ۰$ $((ba) = ۰)$. مقسوم‌علیه‌صفر عضوی از R است که هم مقسوم‌علیه‌صفر چپ و هم مقسوم‌علیه‌صفر راست باشد.

تعریف ۸.۱.۱. عضو a از حلقه R را پوچ‌توان گوییم اگر به ازای $n \in \mathbb{N}$، داشته باشیم $a^n = ۰$.

گزاره ۹.۱.۱. *در حلقه R شرایط زیر معادلند:*

۱. *R عضو پوچ‌توان غیرصفر ندارد.*

۲. *هرگاه $a \in R$ و $a^۲ = ۰$، آن‌گاه $a = ۰$.*

گزاره ۱۰.۱.۱. *هرگاه a یک عضو پوچ‌توان حلقه R باشد، آن‌گاه $a + ۱$ عضو یکه R است.*

برهان. فرض کنیم a پوچ‌توان باشد، بنابراین به ازای n ی، $a^n = ۰$. در این صورت

$$۱ = ۱ + (-۱)^n a^n = (۱ + a)(۱ - a + a^۲ + \cdots + (-۱)^{n-۱} a^{n-۱})$$

لذا $a + ۱$ یکه است. $\square$

تبصره ۱۱.۱.۱. اگر R یک حلقه یک‌دار باشد، آن‌گاه $(۱ - ab) \in U(R)$ اگر و فقط اگر $(۱ - ba) \in U(R)$. که در آن منظور از $U(R)$ مجموعه همه عناصر وارون‌پذیر R است.

برهان. چون $(۱ - ab) \in U(R)$ بنابراین $(۱ - ab)^{-۱}$ وارون $(۱ - ab)$ است. حال نشان می دهیم که وارون $(۱ - ba)$، $(۱ + b(۱ - ab)^{-۱} a)$ می‌باشد. زیرا

$$\begin{aligned}
(۱ - ba)(۱ + b(۱ - ab)^{-۱} a) &= ۱ - ba + b(۱ - ab)^{-۱} a - bab(۱ - ab)^{-۱} a \\
&= ۱ - ba + b[(۱ - ab)^{-۱} - ab(۱ - ab)^{-۱}]a \\
&= ۱ - ba + b[(۱ - ab)(۱ - ab)^{-۱}]a \\
&= ۱ - ba + ba = ۱
\end{aligned}$$

برعکس، به روشی مشابه ثابت می‌شود. $\square$

تعریف ۱۲.۱.۱. فرض کنیم خانواده $\{R_i\}_{i \in I}$، یک خانواده ناتهی از حلقه‌ها باشد. در این صورت حاصل‌ضرب مستقم اعضای خانواده $\{R_i\}_{i \in I}$ را با علامت $\prod_{i \in I} R_i$ نشان می‌دهیم. $\prod_{i \in I} R_i$ با جمع و ضرب مولفه‌ای زیر تشکیل یک حلقه می‌دهد. برای هر $(a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} R_i$ تعریف می‌کنیم

$$(a_i)_{i \in I} + (b_i)_{i \in I} = (a_i + b_i)_{i \in I} \quad \text{و} \quad (a_i)_{i \in I} . (b_i)_{i \in I} = (a_i b_i)_{i \in I}$$

زیرمجموعه $\prod_{i\in I} R_i$ متشکل از همه خانواده‌هایی چون $(a_i)_{i\in I}$ که برای هر $i \in I$ و $a_i \in R$ که تنها تعدادی متناهی از مولفه‌هایشان ناصفرند یک ایدال می‌باشد و آن‌را با $\oplus_{i\in I} R_i$ نشان می‌دهیم و مجموع مستقیم خانواده $\{R_i\}_{i\in I}$ می‌نامیم.

توجه می‌کنیم که وقتی I متناهی باشد آن‌گاه $\prod_{i\in I} R_i = \bigoplus_{i\in I} R_i$ و اگر $I = \{۱,\ldots,n\}$ و $(a_i)_{i\in I} \in \oplus_{i\in I} R_i$ آن‌گاه $(a_i)_{i\in I} = (a_۱,a_۲,\ldots,a_n)$.

تعریف ۱۳.۱.۱. زیرمجموعه ناتهی S از حلقه R را بسته ضربی گوییم، هرگاه

۱. $۱ \in S$

۲. برای هر $a,b \in S$ داشته باشیم $ab \in S$.

علاوه بر این چنانچه برای $cd \in S$ داشته باشیم $c,d \in S$ آن‌گاه S را مجموعه بسته ضربی اشباع شده گوییم.

تعریف ۱۴.۱.۱. هرگاه R یک حلقه باشد، حلقه متقابل R که با R^{op} نشان داده می‌شود، حلقه ای است که همان مجموعه عضوهای R و همان جمع R را داشته، و ضرب o آن به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$aob = ba,$$

که در آن ba حاصل‌ضرب در R است.

تعریف ۱۵.۱.۱. حلقه R را کاهشی گوییم درصورتی که عضو پوچ‌توان غیرصفر نداشته باشد.

تعریف ۱۶.۱.۱. حلقه R را تجزیه‌ناپذیر گوییم، هرگاه ۰ و R تنها جمع‌وندهای مستقیم R باشند؛ یعنی R به صورت مجموع مستقیم دو ایدال سره خود نباشد.

۲.۱ ایدال نیم‌اول و رادیکال‌اول

تعریف ۱.۲.۱. ایدال سره P از یک حلقه R اول است، هرگاه به ازای هر دو ایدال I و J در R اگر $IJ \leq P$، آن‌گاه $I \leq P$ یا $J \leq P$. یک حلقه اول حلقه‌ای ناصفر است که $\{0\}$ یک ایدال اول آن است.

گزاره ۲.۲.۱. *اگر P یک ایدال سره در حلقه R باشد، آن‌گاه شرایط زیر معادلند:*

۱. *P یک ایدال اول است.*

۲. *$\frac{R}{P}$ یک حلقه اول است.*

۳. *به ازای هر دو ایدال راست I و J از R به‌طوری‌که $IJ \leq P$، آن‌گاه $I \leq P$ یا $J \leq P$.*

۴. *به ازای هر دو ایدال چپ I و J از R به‌طوری‌که $IJ \leq P$، آن‌گاه $I \leq P$ یا $J \leq P$.*

۵. *هرگاه $x, y \in R$ به‌طوری‌که $xRy \subseteq P$، آن‌گاه $x \in P$ یا $y \in P$.*

نتیجه ۳.۲.۱. *از قسمت (۵) این گزاره نتیجه می‌شود که در یک حلقه جابجایی R، ایدال سره P یک ایدال اول است اگر و تنها اگر به ازای هر $x, y \in R$، اگر $xy \in P$، آن‌گاه $x \in P$ یا $y \in P$.*

مثال ۴.۲.۱. در هر حوزه صحیح $\{0\}$ یک ایدال اول است.

گزاره ۵.۲.۱. *هر ایدال ماکسیمال M در یک حلقه یک‌دار R یک ایدال اول است.*

لم ۶.۲.۱. *فرض کنیم R یک حلقه تعویض‌پذیر و e عضو خودتوان R باشد. در این صورت برای هر ایدال اول M از R،*

$$e \in M \quad \text{یا} \quad 1 - e \in M.$$

برهان. چون e خودتوان R است پس $e = e^{۲}$. لذا $e(e-۱) = e^{۲} - e = ۰$. بنابراین چون M یک ایدال اول R است داریم $e \in M$ یا $۱ - e \in M$. $\square$

تعریف ۷.۲.۱. ایدال اول مینیمال، ایدالی اول در یک حلقه R است که به‌طور سره شامل هیچ ایدال اول دیگری نیست.

قضیه ۸.۲.۱. *در یک حلقه جابجایی و یک‌دار R که $۱_R \neq ۰$، ایدال P اول است اگر و تنها اگر حلقه خارج‌قسمتی $\frac{R}{P}$ یک دامنه صحیح باشد.*

قضیه ۹.۲.۱. *فرض کنیم M یک ایدال در یک حلقه یک‌دار R باشد* $(۱_R \neq ۰)$

۱. *اگر M ماکسیمال و R جابجایی باشد، آن‌گاه حلقه خارج‌قسمتی $\frac{R}{M}$ یک میدان است.*

۲. *اگر حلقه خارج‌قسمتی $\frac{R}{M}$ یک حلقه بخشی باشد، آن‌گاه M ماکسیمال است.*

تعریف ۱۰.۲.۱. هر ایدال در یک حلقه R که یک اشتراک از ایدال‌های اول است یک ایدال نیم اول نامیده می‌شود.

قضیه ۱۱.۲.۱. *یک ایدال I در یک حلقه R نیم‌اول است اگر و تنها اگر به ازای هر $x \in R$، $xRx \subseteq I$، آن‌گاه $x \in I$.*

تعریف ۱۲.۲.۱. یک حلقه نیم‌اول حلقه‌ای ناصفر است که $\{۰\}$ یک ایدال نیم‌اول آن است.

تعریف ۱۳.۲.۱. ایدال I از حلقه R را پوچ‌توان گوییم، هرگاه $n \in \mathbb{N}$ موجود باشد به‌طوری‌که $I^n = \{۰\}$.

تعریف ۱۴.۲.۱. ایدال I از حلقه R را پوچ می‌نامیم، هرگاه تمام عناصر I پوچ‌توان باشد یعنی، به ازای هر $a \in I$، $n \in \mathbb{N}$ موجود باشد به‌طوری‌که $a^n = ۰$.

نتیجه ۱.۲.۱۵. *حلقه R نیم‌اول است اگر و تنها اگر ایدال پوچ‌توان ناصفر نداشته باشد.*

تعریف ۱.۲.۱۶. رادیکال اول یک حلقه R اشتراک همه ایدال‌های اول R است و با نماد $N(R)$ نشان داده می‌شود.

۱.۳ مدول‌های پروژکتیو و انژکتیو

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. یک R -مدول چپ یک گروه آبلی جمعی A همراه با یک تابع $R \times A \longrightarrow A$ است به‌طوری‌که $(r,a) \longrightarrow ra$ و به ازای هر $r,s \in R$ و $a,b \in A$ داریم

۱. $r(a+b) = ra + rb$

۲. $(r+s)a = ra + sa$

۳. $r(sa) = (rs)a$

به‌علاوه اگر R یک عضو یکانی 1_R داشته باشد

۴. به ازای هر $a \in A$، $1_R a = a$

آن‌گاه A یک R -مدول یکانی نامیده می شود. اگر R یک حلقه بخشی باشد، آن‌گاه یک R -مدول یکانی یک فضای برداری (چپ) نوشته می‌شود.یک R -مدول(راست) یکانی بطور مشابه با یک تابع $A \times R \longrightarrow A$ به‌طوری‌که $(r,a) \longrightarrow ra$ و در شرط های ۱ تا ۴ صدق کند.

تعریف ۱.۳.۲. فرض کنیم M و N دو R -مدول باشند. نگاشت $f : M \longrightarrow N$ را یک همریختی

می‌نامیم، هرگاه به ازای هر $a,b \in M$ وهر $r,s \in R$ تساوی زیر برقرار باشد

$$f(ar+bs) = f(a)r + f(b)s.$$

تعریف ۳.۳.۱. فرض کنیم $f : M \longrightarrow N$ یک هم‌ریختی R -مدولی باشد. اگر f یک به یک (پوشا) باشد آنرا یک R -تک‌ریختی (R -برووریختی) می‌نامیم.

در حالتی که $M = N$، f را یک درون‌ریختی می نامیم و بالاخره اگر f یک به یک و پوشا باشد اصطلاح R -یک‌ریختی را بکارمی بریم.

گوییم M با N یک‌ریخت است هرگاه یک R -یک‌ریختی مانند $f : M \longrightarrow N$ موجود باشد.

قضیه ۴.۳.۱. *فرض کنیم A و B زیرمدول‌های R -مدول M باشند آن‌گاه:*

$$\frac{A+B}{A} \cong \frac{B}{A \cap B}$$

فرض کنیم M یک R -مدول چپ باشد، با بررسی اصول موضوعه حلقه می‌توان نشان داد، که مجموعه تمام R -درون‌ریختی‌های M که آنرا با $End({}_RM)$ نمایش می‌دهیم با جمع و ضرب تعریف شده به صورت

$$(f+g)m = f(m) + g(m) \quad \text{و} \quad (fg)m = g(f(m))$$

یک حلقه است.

قضیه ۵.۳.۱. *فرض کنیم R یک حلقه باشد، اگر R را به عنوان R -مدول راست در نظر بگیریم آن‌گاه $End({}_RR) \cong R$.*

تعریف ۶.۳.۱. فرض کنیم A یک مدول راست روی یک حلقه R باشد، $X \subseteq A$ و $Y \subseteq R$

بترتیب زیرمجموعه‌های ناتهی A و R باشند. در این صورت، مجموعه‌های

$$ann_R(X) = ann(X) = \{r \in R : xr = \circ \quad \forall x \in X\}$$

و

$$ann_A(Y) = \{a \in A : aY = \circ \quad \forall y \in Y\}$$

را بترتیب پوچساز X در R و پوچساز Y در A می‌نامیم. چنانچه $X = \{x\}$ و $Y = \{y\}$، به جای نمادهای $ann(X)$ و $ann(Y)$ بترتیب از نمادهای $ann(x)$ و $ann_A(y)$ استفاده می‌کنیم.

تعریف ۷.۳.۱. فرض کنیم R یک حلقه و $X \subseteq R$ زیرمجموعه‌های ناتهی R باشد. در این صورت، مجموعه‌های

$$r.ann(X) = \{r \in R : xr = \circ \quad x \in X\}$$

و

$$l.ann(X) = \{r \in R : rx = \circ \quad x \in X\}$$

را بترتیب پوچساز راست X در R و پوچساز چپ X در R می‌نامیم. درصورتی که $X = \{x\}$ به جای نمادهای فوق بترتیب از نمادهای $r.aan(x)$ (یا $r(x)$) و $l.ann(x)$ (یا $l(x)$) استفاده می‌کنیم.

تعریف ۸.۳.۱. مدول A روی یک حلقه R یک R -مدول وفادار است، هرگاه داشته باشیم $ann_R(A) = \circ$.

تعریف ۹.۳.۱. مدول (راست) و ناصفر A روی یک حلقه R ساده است، هرگاه تنها زیرمدول‌های آن A و $\{0\}$ باشد. حلقه R را ساده می‌نامیم، هرگاه R هیچ ایدال(دو طرفه) ناصفر سره‌ای نداشته باشد.

لم ۱۰.۳.۱. *فرض کنیم G مدولی روی حلقه جابجایی R است. G ساده است اگر و تنها اگر با R ـ مدولی به صورت $\frac{R}{M}$ یک‌ریخت باشد که در آن M یک ایدال ماکسیمال R است.*

تعریف ۱۱.۳.۱. ایدال P در یک حلقه R اولیه راست (چپ) است، هرگاه برای یک R ـ مدول راست (چپ) ساده A داشته باشیم $P = ann_R(A)$. یک حلقه اولیه راست(چپ) حلقه‌ای است که $\{0\}$ یک ایدال اولیه راست (چپ) آن است یعنی، هر حلقه‌ای که یک مدول راست (چپ) ساده وفادار دارد.

گزاره ۱۲.۳.۱. *در یک حلقه R مجموعه‌های زیر برابرند:*

۱. *اشتراک همه ایدال‌های راست ماکسیمال R.*

۲. *اشتراک همه ایدال‌های چپ ماکسیمال R.*

۳. *اشتراک همه ایدال‌های اولیه راست R.*

۳. *اشتراک همه ایدال‌های اولیه چپ R.*

ایدال تعریف شده بوسیله اشتراک‌های داده شده در بالا رادیکال جیکوبسن R نام دارد و با $J(R)$ نشان داده می‌شود.

لم ۱۳.۳.۱. *فرض کنیم R حلقه باشد. در این صورت*

$$J(R) = \{x \in R : \text{به ازای هر عضو از } R \text{ مثل } r\text{، } 1 - xr \text{ وارون راست دارد}\}$$

برهان. فرض کنیم r عضوی دلخواه از R باشد. اگر $1 - xr$ وارون راست نداشته باشد، آن‌گاه واضح است که $(1 - xr)R \neq R$. پس $(1 - xr)R$ ایدال راست سره‌ای از R است، بنابراین ایدال راست ماکسیمالی مثل M از R موجود است که $(1 - xr)R \subseteq M$. پس $1 - xr$ عضوی از M است و چون xr هم در M است، باید ۱ در M باشد که متناقض با سره بودن M است. پس $1 - xr$ وارون راست دارد.

برعکس؛ فرض کنیم $x \notin J(R)$. چون $J(R)$ برابر اشتراک همه ایدال‌های راست ماکسیمال R است، ایدال راست ماکسیمالی از R مثل M موجودست که x در آن نیست. درنتیجه، ماکسیمال بودن M، نتیجه می‌دهد که $M + xR = R$، بنابراین عضوی از M مثل m و عضوی از R مثل r وجود دارد که $m + xr = 1$. پس $1 - xr = m \in M$ و در نتیجه، $1 - xr$ نباید وارون راست داشته باشد که تناقض است. پس $x \in J(R)$. $\square$

تعریف ۱.۳.۱۴. یک دنباله متناهی از هم‌ریختی‌های مدول‌ها مانند

$$A_0 \xrightarrow{f_1} A_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} A_{n-1} \xrightarrow{f_n} A_n$$

را کامل گوییم مشروط بر اینکه به ازای $1 \leq i \leq n - 1$، $Im(f_i) = Ker(f_{i+1})$.

یک دنباله نامتناهی از هم‌ریختی‌های مدول‌ها مانند

$$\dots \xrightarrow{f_{i-1}} A_{i-1} \xrightarrow{f_i} A_i \xrightarrow{f_{i+1}} A_{i+1} \xrightarrow{f_{i+2}} \dots$$

را کامل گوییم مشروط بر اینکه به ازای هر $i \in \mathbb{Z}$، $Im(f_i) = Ker(f_{i+1})$.

تعریف ۱.۳.۱۵. هر دنباله کامل به شکل $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ یک دنباله کامل کوتاه نام دارد. توجه می‌کنیم که f یک تک‌ریختی و g یک برو‌ریختی است.

قضیه ۱.۳.۱۶. *فرض کنیم R حلقه بوده و $\circ \longrightarrow A_۱ \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} A_۲ \longrightarrow \circ$ یک دنباله کامل کوتاه از هم‌ریختی‌های R ـ مدول‌ها باشد. در این صورت، شرایط زیر معادل خواهند بود:*

۱. *یک هم‌ریختی R ـ مدول‌ها مانند $h : A_۲ \longrightarrow B$ وجود دارد که $gh = ۱_{A_۲}$.*

۲. *یک هم‌ریختی R ـ مدول‌ها مانند $k : B \longrightarrow A_۱$ وجود دارد که $kf = ۱_{A_۱}$.*

۳. *دنباله داده شده با مجموع مستقیم دنباله کامل کوتاه*

$$\circ \longrightarrow A_۱ \xrightarrow{\iota_۱} A_۱ \oplus A_۲ \xrightarrow{\pi_۲} A_۲ \longrightarrow \circ$$

یک‌ریخت است، بخصوص $B \cong A_۱ \oplus A_۲$.

تعریف ۱.۳.۱۷. فرض کنیم A،B و C،R ـمدول باشند. می‌گوییم دنباله کوتاه کامل

$$\circ \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \circ$$

شکافته می‌شود هرگاه این دنباله در یکی از شرایط معادل قضیه فوق صدق کند.

تعریف ۱.۳.۱۸. گوییم مدول P روی حلقه R پروژکتیو است اگر به ازای هر نمودار

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & & \downarrow f & & \\ A & \xrightarrow{g} & B & \longrightarrow & \circ \end{array}$$

از هم‌ریختی‌های R ـمدول‌ها که سطر پایین آن کامل باشد(یعنی، g بروریختی باشد) یک هم ریختی R ـمدول‌ها مانند $h : P \longrightarrow A$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که نمودار

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, "g"] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

تعویض‌پذیر باشد(یعنی، $gh = f$).

قضیه ۱۹.۳.۱. *فرض کنیم R یک حلقه باشد. شرایط زیر بر R -مدول P با هم معادلند:*

۱. P *پروژکتیو است.*

۲. *هر دنباله کامل کوتاه* $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ *شکافته می‌شود. ازاین‌رو* $B \cong A \oplus P$.

۳. *مدول آزاد* F *و* R *-مدول* K *وجود دارند به‌طوری‌که* $F \cong K \oplus P$.

تعریف ۲۰.۳.۱. یک مدول راست (چپ) A روی یک حلقه R را انژکتیو می‌نامیم، هرگاه برای هر R -مدول راست (چپ) B و هر زیر مدول C از B، هر هم‌ریختی $C \longrightarrow A$ به هم‌ریختی $B \longrightarrow A$ توسیع داده شود. یا به عبارت دیگر، یک مدول A روی حلقه R انژکتیو است اگر برای هر نمودار

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \\ & A & \end{tikzcd}$$

از هم‌ریختی‌های R-مدولی که در آن g یک تک‌ریختی است، یک هم‌ریختی R-مدولی $h : B \to A$ موجود باشد به‌طوری‌که نمودار

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[dl, "h"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

جابجایی باشد یعنی $hg = f$.

قضیه ۲۱.۳.۱. (محک بئر). R ـ مدول A انژکتیو است اگر و تنها اگر به ازای هر ایدال R مانند I و هر هم‌ریختی f که $f \in Hom(I, A)$ عضو $a \in A$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که به ازای هر $r \in I$ داشته باشیم $f(r) = ra$.

فصل ۲

بررسی ویژگی‌های حلقه‌های منظم

در این فصل حلقه‌های منظم و برخی خواص آنها را مورد بررسی قرار خواهیم داد. علاوه بر این حلقه‌های یکا ل‌منظم و π -منظم و روابط آنها را نیز بررسی خواهیم کرد. برد پایای یک و تعمیمی از آن یعنی برد پایای یک یکال را تعریف کرده و شرایطی را که یک حلقه برای یک ایدال، برد پایای یک یکال دارد را بررسی خواهیم کرد.

۱.۲ حلقه‌های منظم

تعریف ۱.۱.۲. عضو $x \in R$ رامنظم گوییم، هرگاه $y \in R$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $x = xyx$. عناصر منظم حلقه R را با $reg(R)$ نمایش می دهیم. y را معکوس ون نیومن x نیز می‌گویند. حلقه R را منظم گوییم هرگاه همه عناصر آن منظم باشد.

مثال ۲.۱.۲. هر حلقه تقسیم یک حلقه منظم است.

اثبات. چون به ازای هر $x \in R$، $x^{-1} \in R$ وجود دارد به‌طوری‌که $xx^{-1}x = x$.

مثال ۳.۱.۲. اگر $R = L(V, V)$ حلقه‌ی تمام عملگرهای خطی تعریف شده در یک فضای برداری V روی حلقه تقسیم باشد آن‌گاه R منظم است.

اثبات. فرض کنیم $T \in R$ باشد و $\{v_1, \ldots, v_r\}$ پایه‌ای برای $KerT$ باشد. این مجموعه را به پایه $B = \{v_1, \ldots, v_r, \ldots, v_n\}$ برای V گسترش می‌دهیم.

بدیهی است که $B' = \{T(v_{r+1}), \ldots, T(v_n)\}$ مستقل خطی است. تبدیل K را طوری تعریف می‌کنیم که برای هر $j>r$، $K(T(v_j)) = v_j$.

در این صورت برای هر $1 \leq i \leq n$، $TKT(v_i) = T(v_i)$. لذا خواهیم داشت که $TKT = T$.

یعنی R حلقه‌ای منظم می‌باشد.

تعریف ۴.۱.۲. ایدال دو طرفه I از حلقه‌ی R را ایدال منظم گوییم هر گاه برای هر $x \in I$، $y \in I$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $x = xyx$.

لم ۵.۱.۲. *فرض کنیم J و K ایدال‌هایی دو طرفه در حلقه R باشند آن‌گاه K منظم است اگر و فقط اگر J و $\frac{K}{J}$ هر دو منظم باشند.*

برهان. K منظم است، پس بوضوح $\frac{K}{J}$ منظم است.فرض کنیم $x \in J$ پس $x \in K$. چون K منظم است پس $y \in K$ وجود دارد به‌طوری‌که $xyx = x$. در این صورت $z = yxy$ عضوی از J است به‌طوری‌که $xzx = x$. بنابراین J منظم است.

برعکس، فرض کنیم J و $\frac{K}{J}$ هر دو منظم باشند و $x \in K$، با توجه به منظم بودن $\frac{K}{J}$، $y \in \frac{K}{J}$ وجود

دارد به‌طوری‌که $x - xyx \in J$. در نتیجه چون J منظم است $x \in J$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$x - xyx = (x - xyx)z(x - xyx) = x(z - yxz)(۱ - xy)x$$

یا به ازای $w \in K$ ای داریم $x = xwx$. بنابراین K منظم است. $\square$

لم ۶.۱.۲. *اگر R حلقه‌ای منظم باشد،آن‌گاه تصویر R تحت هر همورفیسمی نیز منظم است.*

برهان. فرض کنیم $f : R \longrightarrow R'$ یک همورفیسم حلقه‌ای باشد و $a' \in f(R)$ آن‌گاه $a \in R$ وجود دارد به‌طوری‌که $f(a) = a'$. چون R منظم است پس $b \in R$ وجود دارد به‌طوری‌که $aba = a$. پس $f(aba) = f(a)$ و یا $f(a)f(b)f(a) = f(a)$ یعنی $a' = a'f(b)a'$، در نتیجه a' منظم است. پس $f(R)$ منظم است. $\square$

لم ۷.۱.۲. *اگر I و J دو ایدال منظم حلقه R باشند آن‌گاه $I + J$ نیز منظم است.*

برهان. داریم $\frac{J}{I \cap J} \simeq \frac{I + J}{I}$. چون $f : J \longrightarrow \frac{J}{I \cap J}$ که بصورت $f(j) = j + I \cap J$ تعریف می‌شود، یک همورفیسم پوشاست بنابر لم قبل چون J منظم است پس $\frac{J}{I \cap J}$ در نتیجه $\frac{I + J}{I}$ منظم است، اما بنابر قضیه قبل چون I نیز منظم است لذا $I + J$ منظم می‌باشد. $\square$

تعریف ۸.۱.۲. عضو a را در حلقه R را m -منظم گوییم هرگاه ایدال تولید شده بوسیله a یک ایدال منظم باشد و قرار می‌دهیم

$$m(R) = \{a \in R : \text{عضوی}\ m\text{-منظم است.}\ a\}$$

نشان می‌دهیم که $m(R)$ یک ایدال منظم است. برای این منظور ابتدا لم زیر را ثابت می‌کنیم.