بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه پیام نور

دانشکده علوم

گروه ریاضی

استفاده از توابع سینک برای حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی

پایان‌نامه:

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی کاربردی

مولف:

سودابه آقاجانی

استاد راهنما:

دکتر محسن شاهرضایی

استاد مشاور:

دکتر محمدحسن بیژن‌زاده

خرداد ماه ۱۳۸۷

تقدیم به

پدر و مادر بزرگوار

و

همسر مهربانم

که بی‌شک این توفیق بدون پشتیبانی آنها، رنگ حقیقت به خود نمی‌گرفت.

سپاسگزاری، تقدیر و تشکر

منت خدای را – عزوجل- که طاعتش موجب قربت است و به شکر اندرش مزید نعمت.

اینک که به فضل خداوند این پایان‌نامه به اتمام رسیده، وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ اساتید و سروران گرامی که در اجرای این پایان‌نامه مرا یاری فرموده‌اند، به ویژه از استاد ارجمند جناب آقای دکتر محسن شاهرضایی به خاطر راهنمایی‌ها و زحمات فراوانشان با سمت استاد راهنما و جناب آقای دکتر محمدحسن بیژن‌زاده به عنوان استاد مشاور، کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم.

ضمناً از آقای ذوالفقاری دانشجوی دکتری دانشکده ریاضی دانشگاه علم و صنعت ایران به خاطر مساعدت های ایشان در زمینه نرم افزاری ، تقدیر و تشکر می گردد.

از خداوند متعال سلامت و سرافرازی تمامی این عزیزان را خواهانم.

سودابه آقاجانی

بهار- ۱۳۸۷

فهرست مطالب

عنوان	صفحه
فصل اول- کلیات	۱
۱-۱- فضای خطی	۱
۱-۱-۱- فضای خطی نرم‌دار	۲
۱-۱-۲- فضای ضرب داخلی	۲
۱-۱-۳- توابع تحلیلی	۳
۱-۲- معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه n	٤
۱-۲-۱- معادلات دیفرانسیل خطی و غیر خطی	٥
۱-۲-۲- مساله شرایط مرزی همگن و غیر همگن	٥
۱-۳- روش‌های تقریب	٦
۱-۳-۱- روش گالرکین	۷
۱-٤- دستگاه‌های معادلات خطی	۷
۱-٤-۱- روش‌های حل دستگاه‌های معادلات خطی	۸
۱-٤-۲- تبدیلات گیونز و هاوس هولدر	۹
۱-٤-۳- روش گیونز	۱۰
۱-٤-٤- روش هاوس هولدر	۱۲
۱-٤-٥- تجزیه QR	۱۲
۱-٥- دستگاه‌های معادلات غیر خطی	۱۳
۱-٥-۱- روش نیوتن	۱۳
فصل دوم- روش تقریب سینک	۱٥
۲-۱- تابع سینک	۱٥
۲-۲- تقریب سینک روی خط حقیقی	۱۸
۲-۳- خطای تقریب سینک روی خط حقیقی	۱۹
۲-٤- تقریب سینک روی Γ	۲۰
۲-٥- نگاشت همدیس برای حالات مختلف Γ	۲۰
۲-٦- خطای تقریب سینک روی Γ	۲۲
فصل سوم- حل عددی مسائل مقدار مرزی مرتبه ٥ با استفاده از روش سینک- گالرکین	۲٤
۳-۱- معادلات مرتبه ٥ خطی همگن	۲٦
۳-۲- معادلات مرتبه ٥خطی غیر همگن	٤۹
۳-۳- معادلات مرتبه ٥ غیر خطی همگن	٥۱
۳-٤- معادلات مرتبه ٥ غیر خطی غیر همگن	٥۲
فصل چهارم- حل عددی مسائل مقدار مرزی مرتبه شش با استفاده از روش سینک- گالرکین	٥٤

٤-١- معادلات مرتبه ٦ خطي همگن	٥٤
٤-٢- معادلات مرتبه ٦ خطی غير همگن	٦١
٤-٣- معادلات مرتبه ٦غير خطی همگن	٦٣
٤-٤- معادلات مرتبه ٦ غير خطی غير همگن	٦٤
فصل پنجم – محاسبات و نتايج عددی	٦٦
٥-١-انتخاب پارامترها	٦٨
٥-٢- معادلات مرتبه ٥ خطی	٦٩
٥-٣- معادلات مرتبه ٥ غيرخطی	٦٩
٥-٤- معادلات مرتبه ٦ خطی	٧٠
٥-٥-معادلات مرتبه ٦غير خطی	٧١
٥-٦-مثالهای عددی	٧٢

فهرست جداول

عنوان	صفحه
جدول ٥-١- نتایج عددی برای مثال ٥-١ با تقریب سینک	٧٣
جدول ٥-٢- مقایسه ماکسیمم خطای مطلق به دست آمده از تقریب سینک با دو روش دیگر برای مثال ٥-١	٧٣
جدول ٥-٣- نتایج عددی برای مثال ٥-٢ با تقریب سینک	٧٤
جدول ٥-٤- نتایج عددی برای مثال ٥-٣ با تقریب سینک	٧٥
جدول ٥-٥- مقایسه ماکسیمم خطای نسبی به دست آمده از تقریب سینک با یک روش دیگر برای مثال ٥-٣	٧٥
جدول ٥-٦- نتایج عددی برای مثال ٥-٤ با تقریب سینک	٧٦
جدول ٥-٧- نتایج عددی برای مثال ٥-٥ با تقریب سینک	٧٧

فهرست علائم

	صفحه
$D(a;IR)$	٣
$\partial S,\overline{S}$	٣
$\|x\|$, $\|x\|_p$, $\|x\|_\infty$	٢
L_p	١
$S(i,j,\theta)$	١٠
$B(h)$	١٧
$B(D)$	٢٠
$Sinc(x)$	١٥
$S(k,h)(x)$	١٥
$S(k,h)\circ\phi(x)$	٢٤
$C(f,h),C_N(f,h)$	١٩
$E(f,h),E_N(f,h)$	١٩
$N_2(f,D)$, $N_p(f,D_d)$, $N(f,D_d)$, $N_1(f,D_d)$	١٩
$B(D_d)$, $B_p(D_d)$, $B_1(D_d)$, $B_2(D_d)$	١٩
D_d	١٨
D,D_1,D_2,D_3	٢١و٢٢
$\delta_{jk}^{(n)}$	١٦
$S_j(x)$	٢٤
$J(x^{(k)})$	١٤
$I^{(i)}$	٤٩
ϕ	٢١و٢٢و٢٤و٥٤
Ψ	٢٠و٥٠و٥٢و٦١و٦٥
Γ	٢٠
$T(F)$	٢٠
z_k	٢٠
I_F	٢٢
$B_T^{(\ell)}$	٢٦
$D(g(x_j))_{ij},D(g(x_j))$	٤٩و٦٠و٦٤
$a_i(x)$	٤٩و٦٠
$\Lambda(x)$	٥٠و٥٢و٦١و٦٥

فهرست اشکال

عنوان	صفحه
شکل ۲-۱- $S(k,h)$ برای $\frac{\pi}{۲}$، $\frac{\pi}{٤}$، $\frac{\pi}{۸}$=h و $k=۰$	۱۵
شکل ۲-۲- $S(k,h)$ برای $\frac{\pi}{٤}$=h و $k=-۱,۰,۱$	۱٦
شکل ۲-۳- نوار نامتناهی D_d	۱۸
شکل ۲-٤- شکل تبدیل ناحیه D به ناحیه D_d تحت نگاشت ϕ	۲۱
شکل ۲-۵- شکل تبدیل ناحیه $D_۱$ به ناحیه D_d تحت نگاشت ϕ	۲۱
شکل ۲-٦- شکل تبدیل ناحیه $D_۲$ به ناحیه D_d تحت نگاشت ϕ	۲۲
شکل ۲-۷- شکل تبدیل ناحیه $D_۳$ به ناحیه D_d تحت نگاشت ϕ	۲۲
شکل ۳-۱- $S(k,h)\circ\phi(x)-۱$ برای $k=۰, h=\frac{\pi}{۸},\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۲}$	۲۵
شکل ۳-۲- $S(k,h)\circ\phi(x)$ برای $h=\frac{\pi}{۴}$ و $k=-۱,۰,۱$	۲۵
شکل ۵-۱- شکل جوابهای دقیق و تقریبی برای مثال ۵-۱	۷۳
شکل ۵-۲- شکل جوابهای دقیق و تقریبی برای مثال ۵-۲	۷٤
شکل ۵-۳ – شکل جوابهای دقیق و تقریبی برای مثال ۵-۳	۷۵
شکل ۵-٤- شکل جوابهای دقیق و تقریبی برای مثال ۵-٤	۷٦
شکل ۵-۵- شکل جوابهای دقیق و تقریبی برای مثال ۵-۵	۷۷

نام خانوادگی دانشجو: آقاجانی

نام : سودابه

عنوان پایان نامه : استفاده از توابع سینک در حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی

استاد راهنما : محسن شاهرضایی

استاد مشاور : محمد حسن بیژن زاده

مقطع تحصیلی : کارشناسی ارشد

رشته : ریاضی کاربردی

گرایش : آنالیز عددی

دانشگاه : پیام نورمرکز تهران

دانشکده : علوم

تاریخ فارغ التحصیلی: خرداد ماه ۱۳۸۷

تعداد صفحات : ۸۰

کلید واژه ها : تابع سینک ، معادلات دیفرانسیل معمولی ، روش گالرکین

چکیده :

از مباحث مهم ریاضیات کاربردی، روشهای تقریب می باشد . با توجه به نوع مساله و شرایط حاکم بر آن انتخاب روشی که حجم محاسبات و خطای آن کمتر باشد ، از اهمیت ویژه ای برخوردار است .

در این پایان نامه از میان روشهای تقریب ، روش گالرکین بر پایه تابع سینک مورد بحث و بررسی قرار می گیرد . در فصل اول عمدتاً به یادآوری تعاریف ، قضایا و روشهای مورد استفاده در این پایان نامه پرداخته شده است .

در فصل دوم پیش زمینه تئوری برای تابع سینک مطرح گردیده و همچنین کلاسی از توابع که در واقع مقدمه ای برای بدست آوردن تقریب سینک می باشند معرفی می گردند . در فصل سوم و چهارم معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه ۵ و ٦ خطی و غیر خطی را مدنظر قرارداده و روش تقریب سینک – گالرکین با استفاده از روابط و قضایای فصل اول و دوم برای این دسته از معادلات بدست می آید . در فصل پنجم روشهای بدست آمده در فصول سوم و چهارم ، برای حل مثالهای مختلف بکار می رود .

لازم به ذکر است در این پایان نامه عمدتاً از منابع [۱، ۲، ۳، ٤] بهره گرفته شده است.

مقدمه

با عنایت به جایگاه ویژه معادلات دیفرانسیل معمولی در علوم مختلف خصوصا علـوم مهندسـی و پیـشرفت روز افـزون فناوری ،لزوم بهره گیری از روشهایی که در مدت زمان کمتر ،تقریب بهتری (با خطای کمتر) برای این دسـته از معـادلات در بر داشته باشند ، ضروری می نماید .

عمده روشهای تقریب نظیر درونیابی، انتگرالگیری و... بر اساس روابط دقیقی که چند جمله ایها در آنها صادقند پایه ریزی شده اند، درحالیکه روشهای سینک به عنوان خانواده مستقلی از روشهای تقریب از روابط دقیقی که بـرای تـابع کاردینـال (ویتکر) برقرارند، بدست می آیند .

روشهای سینک برای درونیابی، تقریب مشتقات ، تقریب انتگرال معـین ونـا معـین ، تقریـب معکـوس فوریـه وتبـدیلات لاپلاس ، تقریب تبدیلات هیلبرت ، حل معادلات دیفرانسیل معمولی با شرایط اولیه ، حل معادلات دیفرانسیل معمولی بـا شرایط مرزی ، تقریب جواب معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی ، تقریب جواب معادلت انتگرال و... بکار می رود .

بیشترین تحقیقات در این زمینه توسط ای.تی.ویتکر[1] انجام گرفته است. پس از آن در سال ۱۹۸۱ ، اف.استنجر[2] فرمولهای تقریب با پایه سینک را بر اساس تابع ویتکر ارائه نمود .

در این پایان نامه از میان روشهای تقریب ، روش گالرکین بر پایه تابع سینک جهت انجام مطالعه موضوع ذیل انتخاب شده است :

- حل معادلات دیفرانسیل معمولی مراتب ۵ و٦ خطی و غیر خطی با شرایط مرزی همگن و غیر همگن .

تابع سینک به صورت‌های زیر تعریف می‌شود:

$$sinc\ x = \begin{cases} \dfrac{Sin(\pi x)}{\pi x} & x \neq ۰ \\ ۱ & x = ۰ \end{cases}$$

$$S(k,h)(x) = \operatorname{sinc}\left(\frac{x-kh}{h}\right) = \begin{cases} \dfrac{Sin[\frac{\pi}{h}(x-kh)]}{\frac{\pi}{h}(x-kh)} & x \neq kh \\ ۱ & x = kh \end{cases} \qquad k = ۰, \pm ۱, \pm ۲, h > ۰$$

تعریـف تـابع سـینک براسـاس تـابع کاردینـال(ویتکـر) اسـتوار اسـت. بـرای تـابع کرانـدار $f \in (-\infty,+\infty)$ تـابع کاردینال(ویتکر) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C(f,h) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kh)S(k,h)(x)$$

---

[1] .E.T.Whittaker
[2] .F.Stenger

فصل اول

کلیات

۱-۱. فضای خطی

تعریف ۱-۱-۱. فرض کنیم $X=\{x,y,z,...\}$ یک مجموعه و $F=\{\alpha,\beta,\gamma,...\}$ یک میدان اسکالر باشد و یک عمل جمع بین هر دو عضو X و یک عمل ضرب اسکالر بین هر عضو از F و عضوی از X تعریف شده باشد که:

$a)\quad x\in X, y\in X \Rightarrow x+y\in X$

$b)\quad x\in X, \alpha\in F \Rightarrow \alpha x\in X$

$c)\quad x+y=y+x$

$d)\quad (x+y)+z=x+(y+z)$

$e)\quad \exists!\ \ ۰\in X;\quad x+۰=x \quad (x\in X)$

$f)\quad \forall x\in X \quad \exists! -x;\quad x+(-x)=۰$

$g)\quad \alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$

$h)\quad \alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$

$i)\quad (\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$

$j)\quad ۱x=x$

در اینصورت X یک فضای خطی روی F نامیده می‌شود.

اگر F میدان اعداد حقیقی باشد، X فضای خطی حقیقی و اگر F میدان اعداد مختلط باشد، X فضای خطی مختلط می‌باشد.

مجموعه همه توابع x(t) که $\int_{R}|x(t)|^p\,dt$ موجود باشد، به صورت L_p نمایش داده می‌شود و نمونه‌ای از فضاهای خطی مطرح در ریاضیات کاربردی و آنالیز عددی می‌باشد.

تعریف ۱-۱-۲. فرض کنیم $x_۱, x_۲, ...$ اعضایی از فضای خطی و $\alpha_۱, \alpha_۲, ...$ اعضایی از میدان باشند. مجموع $\alpha_۱x_۱+\alpha_۲x_۲+...+\alpha_nx_n$ یک ترکیب خطی از x_iها نامیده می‌شود و x_iها مستقل خطی‌اند اگر و فقط اگر:

$$\alpha_۱x_۱+\alpha_۲x_۲+...+\alpha_nx_n=۰ \Rightarrow \alpha_۱=\alpha_۲=...=\alpha_n=۰$$

در غیر اینصورت مجموعه متشکل از x_iها وابسته خطی است.

تعریف ۱-۱-۳. اگر اعضایی از X مانند $x_۱,...,x_n$ موجود باشد که مستقل خطی بوده و هر زیر مجموعه n+1 عضوی از X وابسته خطی باشد می‌گوییم بعد X ، n است و می‌نویسیم dim(X)=n.

اگر برای هر $n>۰$، n عضو مستقل خطی از X وجود داشته باشد، آنگاه گفته می‌شود X نامتناهی‌البعد است.

تعریف ۱-۱-٤. مجموعه مستقل خطی $x_1,...,x_n$ از X یک پایه برای X است اگر هر عضو از X را بتوان به صورت یک ترکیب خطی از x_iها نوشت. این تعریف پایه برای یک فضای خطی با بعد متناهی مناسب است. برای فضاهای خطی نامتناهی‌البعد، تعریف مشابه نیاز به همگرایی سری‌ها دارد.

۱-۱-۱. فضای خطی نرمدار

وقتی روش‌های تقریب مورد بررسی قرار می‌گیرند، معمولا به مقایسه جواب‌ها یا اندازه‌گیری فاصله بین جواب‌های مختلف نیازمندیم. بنابراین می‌خواهیم مفهوم طول بردار را در فضاهای خطی کلیت ببخشیم و از این‌رو نرم را تعریف می‌کنیم:

تعریف ۱-۱-۵. به هر عضو X مانند x یک عدد نامنفی نسبت می‌دهیم و آن را نرم x نامیده و با ||x|| نمایش می‌دهیم به طوری که:

$a)\quad \| x\| \geq 0 \quad \forall x\in X$

$b)\quad \| x\| = 0 \Leftrightarrow x=0$

$c)\quad \| \alpha x\| = |\alpha| \| x\| \quad \forall x\in X,\quad \alpha\in F$

$d)\quad \| x+y\| \leq \| x\| + \| y\| \quad \forall x,y\in X$ (نامساوی مثلثی)

در اینصورت به X یک فضای خطی نرمدار گفته می‌شود و عدد نامنفی ||x-y|| فاصله بین دو نقطه x و y می‌باشد. در فضای L_p برای $x(t)\in L_p[a,b]$، نرم به وسیله $\| x\|_p = (\int_a^b |x(t)|^p\, dt)^{\frac{1}{p}}$ تعریف می‌شود. اگر x(t) در [a,b] کراندار باشد نرم بی‌نهایت به صورت $\| x\|_\infty = \sup\limits_{a\leq t\leq b} |x(t)|$ تعریف می‌شود.

تعریف ۱-۱-٦. یک مجموعه از عناصر $x_1,x_2,...$ از یک فضای خطی نرمدار X بسته (کامل) گفته می‌شود اگر برای هر $x\in X$ و $\varepsilon>0$ یک n و اسکالرهای $\alpha_1,...,\alpha_n$ وجود داشته باشد که $\| x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\| \leq \varepsilon$.

اگر مجموعه $\{x_i\}_{i=1}^n$ در X بسته و مستقل خطی باشد یا به عبارتی همه زیر مجموعه‌های متناهی X مستقل خطی باشند آنگاه $\{x_i\}_{i=1}^n$ یک پایه برای X نامیده می‌شود و می‌نویسیم: $x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$.

فضایی که یک پایه متناهی یا شمارش‌پذیر داشته باشد جدایی‌پذیر گفته می‌شود.

۱-۱-۲. فضای ضرب داخلی

تعریف ۱-۱-۷. دنباله $\{x_n\}$ در فضای خطی نرمدار یک دنباله کوشی است اگر $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{p\to\infty}\| x_{n+p}-x_n\| = 0$.

تعریف ۱-۱-۸. یک فضای نرمدار X کامل است اگر هر دنباله کوشی در X به یک عضو X همگرا باشد. یک فضای کامل نرمدار یک فضای باناخ نامیده می‌شود.

$L_p, 1\leq p\leq\infty$ یک فضای باناخ است.

تعریف ۱-۱-۹. فرض کنیم X یک فضای خطی حقیقی باشد. به هر x و y متعلق به X یک عدد حقیقی نظیر می‌شود که با (x,y) نمایش داده می‌شود و ضرب داخلی x و y نامیده می‌شود اگر:

$a)\quad (x,y)>۰ \quad , \quad (x,x)=۰ \Rightarrow x=۰$

$b)\quad (x,y)=(y,x)$

$c)\quad (\alpha x,y)=\alpha(x,y)$

$d)\quad (x+y,z)=(x,z)+(y,z)$

تعریف ۱-۱-۱۰. یک فضای خطی که روی آن یک ضرب داخلی تعریف شده باشد، یک فضای ضرب داخلی نامیده می‌شود. یک فضای ضرب داخلی کامل، یک فضای هیلبرت نامیده می‌شود.

در یک فضای ضرب داخلی، نرم به وسیله $\|x\|=(x,x)^{\frac{۱}{۲}}$ تعریف می‌شود. بنابراین هر فضای ضرب داخلی، یک فضای نرمدار است ولی عکس این مطلب درست نیست.

تعریف ۱-۱-۱۱. دو عضو x و y متعلق به فضای ضرب داخلی متعامد گفته می‌شود اگر $(x,y)=۰$.

و یک عنصر x به یک زیرفضای ϕ متعامد گفته می‌شود اگر $(x,\phi)=۰ \quad \forall\phi\in\phi$.

۱-۱-۳. توابع تحلیلی

فرض کنید $\mathbb{R}$ نمایش خط حقیقی باشد $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ و $\mathbb{C}$ نمایش صفحه مختلط $\mathbb{C}=\{z=x+iy; x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}\}$ و فرض کنید Z نمایش مجموعه تمام اعداد صحیح باشد و $D(a;R)$ نمایش دیسک باز به مرکز $a\in\mathbb{C}$ و شعاع $R>۰$ باشد: $D(a;R)=\{z\in\mathbb{C}:|z-a|<R\}$

تعریف ۱-۱-۱۲. فرض کنید S زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{C}$ باشد. نقطه $a\in\mathbb{C}$ یک نقطه درونی S نامیده می‌شود اگر دیسک $D(a;R)$ چنان موجود باشد که تمام نقاط $D(a;R)$ به S متعلق باشند.

تعریف ۱-۱-۱۳. نقطه a یک نقطه مرزی S است هرگاه هر دیسک $D(a;R)$ هم شامل نقاط S و هم شامل نقاطی که به S تعلق دارد شود.

تعریف ۱-۱-۱۴. مرز S که با نماد ∂S نمایش داده می‌شود اجتماع تمام نقاط مرزی S می‌باشد.

تعریف ۱-۱-۱۵. مجموعه S باز است هرگاه هیچ نقطه مرزی S به S تعلق نداشته باشد.

تعریف ۱-۱-۱۶. $\bar{S}=S\cup\partial S$ را بستار S گوییم.

تعریف ۱-۱-۱۷. مجموعه S بسته است اگر $\bar{S}=S$.

تعریف ۱-۱-۱۸. مجموعه S کراندار است اگر اعداد $a\in\mathbb{C}$ و $R>۰$ چنان موجود باشد که $D(a;R)$ شامل بستار S باشد.

تعریف ۱-۱-۱۹. قوس Γ توسط نگاشت $z(t)=x(t)+iy(t)$ موجود است و روی (۱و۰) قطعه‌ای پیوسته، به طوری که در هر نقطه از پیوستگی $Z'(t)$ ، $(x'(t))^۲+(y'(t))^۲>۰$.

تعریف ۱-۱-۲۰. به قوس $L=\{z(t) \quad ; \quad ۰\le t\le ۱\}$ که $z(t)$ روی بازه بسته $[۰,۱]$ پیوسته است و $z(۰)=z(۱)$، منحنی ساده بسته گویند.

تعریف ۱-۱-۲۱. فرض کنید $L=\{z(t) \quad ; \quad ۰\le t\le ۱\}$ یک منحنی ساده بسته باشد به طوری که اگر $t_۱\in(۰,۱), t_۲\in(۰,۱), t_۱\neq t_۲$ آنگاه $z(t_۱)\neq z(t_۲)$، در اینصورت به L حوزه گوییم.

قابل درک است که چنین منحنی ساده بسته‌ای همیشه $\mathbb{C}$ را به دو ناحیه تقسیم می‌کند که L به عنوان مرز مشترکی برای B_1 و B_2 می‌باشد به طوری که اگر $z_1 \in B_1$ ، $z_2 \in B_2$ ، $Z_1 \in B_1, Z_2 \in B_2$ و ρ یک قوس متصل‌کننده z_1 و z_2 باشد، آنگاه ρ حداقل یکبار L را قطع کند.

تعریف ۱-۱-۲۲. فرض کنید L مرز ناحیه B باشد $L = \partial B$ گوییم L جهتدار با جهت مثبت است اگر در پیمایش روی L با افزایش t ناحیه B همیشه در سمت چپ L واقع شود.

تعریف ۱-۱-۲۳. فرض کنید k عدد مثبت و $m = 1,...,k$ دنباله‌ای از منحنی‌های ساده بسته $\{L_{mj}\}_{j=1}^{\infty} = \{z_{mj}(t) \quad : \quad 0 \le t \le 1\}_{j=1}^{\infty}$ باشد که خواص زیر را دارند:

a) $L_{mj} = \partial B_{mj}$، B_{mj} یک مجموعه باز کراندار در $\mathbb{C}$ و L_{mj} جهتدار با جهت مثبت نسبت به B_{mj} باشد.

b) برای هر m ثابت، نواحی B_{mj} تو در تو هستند و $j = 1,2,...$ و $B_{mj} \subset B_{mj+1}$ و علاوه بر این L_{mj} و L_{mj+1} نقاط مشترک ندارند.

c) برای هر j ثابت K ناحیه B_{mj} $(m = 1,...,k)$ نقاط مشترک ندارند.

d) فرض کنید نواحی D_j و D به صورت تعریف شده باشند $D_j = \bigcup_{m=1}^{k} B_{mj}$ و $D_j = \lim_{j\to\infty} D_j$ نواحی D_j و D تعریف شده به این روش، حوزه‌های همبند نامیده می‌شود.

اگر k=1 آنگاه D همبند ساده نامیده می‌شود.

تعریف ۱-۱-۲۴. تابع f تعریف شده روی حوزه D، نگاشتی از D به $\mathbb{C}$ گفته می‌شود و به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$f : D \to \mathbb{C}$$

گوییم تابع f در نقطه a از D حد b دارد، هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، $R > 0$ ای موجود باشد که disc D(a;R) در D باشد اگر $z \in D(a;R)$ و $z \neq a$ آنگاه $f(z) \in D(b;\varepsilon)$ و می‌توان نوشت: $\lim_{z\to a} f(z) = b$.

پس تابع f در هر نقطه a از D پیوسته است هر گاه $\lim_{z\to a} f(z) = f(a)$.

تعریف ۱-۱-۲۵. f پیوسته است در D هرگاه f در هر نقطه از D پیوسته باشد.

تعریف ۱-۱-۲۶. تابع پیوسته f، $f : D \to \mathbb{C}$ در نقطه $a \in D$ مشتق‌پذیر است هرگاه عدد $c \in \mathbb{C}$ چنان موجود باشد که
$$\lim_{z\to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = c$$
که c مشتق f در a است می‌نویسیم: $f'(a)=c$.

تعریف ۱-۱-۲۷. تابع f در D تحلیلی است اگر f در هر نقطه از D مشتق‌پذیر باشد.

تعریف ۱-۱-۲۸. اگر f در $\mathbb{C}$ تحلیلی باشد آنگاه f کامل نامیده می‌شود.

۱-۲. معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه n

تعریف ۱-۲-۱. فرض کنید تابع y=f(x) بر بازه‌ی I: a<x<b تعریف شده باشد. هر معادله شامل متغیر مستقل x، تابع y=f(x) و مشتقات f را یک معادله دیفرانسیل معمولی گوییم.

تعریف ۱-۲-۲. مرتبه یک معادله دیفرانسیل، بالاترین مرتبه مشتقی است که در معادله ظاهر می‌شود.

تعریف ۱-۲-۳. هر معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه nام به شکل زیر می‌باشد:

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad (1-1)$$

تحت شرایط مناسبی روی تابع F معادله را می‌توان نسبت به $y^{(n)}$ برحسب n+1 متغیر دیگر $x, y, y', ..., y^{(n-1)}$ حل نمود و به صورت زیر نوشت:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \qquad (2-1)$$

تعریف ۱-۲-۴. تابع g تعریف شده بر بازه a<x<b را جوابی از معادله (۱-۲) نامیم، اگر g در این بازه n بار مشتق‌پذیر باشد و به ازای هر x از این بازه

$$g^{(n)}(x) = f(x, g(x), g'(x), ..., g^{(n-1)}(x))$$

برقرار باشد.

۱-۲-۱. معادلات دیفرانسیل خطی و غیر خطی

تعریف ۱-۲-۵. معادله دیفرانسیل معمولی

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_1(x)y^{(1)}(x) + a_0(x)y(x) = f(x) \qquad (3-1)$$

را که در آن توابع $a_0(x), ..., a_n(x)$ و f(x) بر بازه I پیوسته بوده و $a_n(x)$ بر I متحد با صفر نباشد، یک معادله دیفرانسیل معمولی خطی مرتبه nام می‌نامیم و هر معادله دیفرانسیل معمولی که به فرم (۱-۳) نباشد را غیر خطی نامیم.

۱-۲-۲. مساله شرایط مرزی همگن وغیر همگن

تعریف ۱-۲-۶ دسته ای از معادلات دیفرانسیل به شکل $a \le x \le b$، $y'' = f(x, y, y')$ و با شرایط مرزی زیر می باشند:
$$y(a) = \alpha \quad , \quad y(b) = \beta$$

این نوع مسائل مسائل شرایط مرزی (دو نقطه‌ای) نامیده می‌شوند.

حال اگر مقادیر α و β مساوی صفر باشند ، مساله شرایط مرزی همگن ودر غیر اینصورت ، مساله شرایط مرزی غیر همگن نامیم .

قضیه ۱-۲-۷. فرض کنید که f(x,y,z) روی ناحیه $R = \{(x, y, z) : a \le x \le b, -\infty < y < +\infty, -\infty < z < +\infty\}$ پیوسته باشد و به علاوه $\frac{\partial f}{\partial z} = f_z(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x, y, z)$ بر روی IR پیوسته باشند. اگر یک ثابت M>0 وجود داشته باشد که به ازای آن f_z, f_y در شرایط

به ازای همه مقادیر $(x, y, z) \in IR \qquad f_y(x, y, z) > 0$

به ازای همه مقادیر $(x, y, z) \in IR \qquad | f_z(x, y, z) | \le M$

صدق کند آنگاه مساله شرایط مرزی $y(a) = \alpha \quad , \quad y(b) = \beta \qquad y'' = f(x, y, z)$

دارای جواب یکتای $y = y(x)$ به ازای $a \le x \le b$ است.

از نماد $z = y'(x)$ برای مشخص ساختن متغیر سوم تابع $f(x, y, y')$ استفاده شده است. [۱۱، ۱۰]

نتیجه ۱-۲-۸ فرض کنید که f در قضیه ۱-۲-۸ دارای شکل $f(x, y, z) = p(x)z + q(x)y + r(x)$ باشد و مشتقات جزئی $\frac{\partial f}{\partial z} = p(x), \frac{\partial f}{\partial y} = q(x)$ روی IR پیوسته باشند.

اگر یک ثابت M>۰ چنان موجود باشد که به ازای آن $q(x), p(x)$ در شرایط

به ازای همه مقادیر $x \in [a,b]$ $q(x) > 0$ و

$$| p(x) | \leq M = \max_{a \leq x \leq b}\{| p(x) |\}$$

صدق کند، آنگاه مساله مقدار مرزی خطی

$$y'' = p(x)y'(x) + q(x)y(x) + r(x)$$
$$y(a) = \alpha \quad , \quad y(b) = \beta$$

دارای جواب یکتای $y=y(x)$ بر روی $a \leq x \leq b$ است. [۱۱، ۱۰]

۱-۳. روش‌های تقریب

روش‌های تقریبی که برای حل معادلات دیفرانسیل بکار برده می شوند بر مبنای تقریب جواب y(x) از معادله (۱-٤) $\quad a \leq x \leq b \quad L[y(x)] + f(x) = 0$ بوسیله مجموع جزئی زیر می باشند.

$$y_n(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i(x)$$

که $\{\phi_i(x)\}_{i=1}^{n}$ توابع مستقل خطی روی بازه [a,b] می باشند.البته اگر این جواب تقریبی در معادله (۱-٤) جایگذاری شود خطایی را تولید خواهد کرد که به x وچگونگی انتخاب $\{c_i\}_{i=1}^{n}$ وابسته است .

$$L[y_n(x)] + f(x) = e(x, c_1, \dots, c_n) \qquad a \leq x \leq b$$

که L یک عملگر دیفرانسیل خطی است.

نکته مهم این است که چگونه می توانیم n شرط پیدا کنیم که n معادله برای یافتن ضرایب $\{c_i\}_{i=1}^{n}$ تولید کند .

لازم به ذکر است که روش تقریبی که در این پایان‌نامه مورد استفاده قرار گرفته است، روش گالرکین می‌باشد.

۱-۳-۱. روش گالرکین[1]

یکی از مهمترین روش‌های تقریب توسط یک ریاضی دان رومی به نام گالرکین کـه در سـال ۱۸۷۱ متولـد و در سـال ۱۹۵٤ وفات یافت، به کار برده شد.

دراین روش با انتخاب توابع مستقل خطی $\{\Psi_i(x)\}_{i=1}^{n}$ و با استفاده از ضرب داخلی

$$(\Psi_i(x), e(x, c_1, \dots, c_n)) = 0$$

می توان n شرط را بدست آورد که حل دستگاه حاصل از این n معادله منجر به بدست آوردن ضرایب مجهول $\{c_i\}_{i=1}^{n}$ خواهد شد .

با توجه به تعریف ضرب داخلی داریم:

$$(\Psi_i(x), e(x, c_1, \dots, c_n)) = \int_a^b \Psi_i(x) e(x, c_1, \dots, c_n) w(x) dx = \int_a^b \Psi_i(x)(L[y_n(x)] + f(x)) w(x) dx = 0 \qquad , i = 1, \dots, n$$

که می توان دستگاه n معادله ، n مجهول زیر را نوشت:

$$\int_a^b \Psi_i(x) w(x) L[y_n(x)] dx = -\int_a^b \Psi_i(x) w(x) f(x) dx = 0 \qquad , i = 1, \dots, n \qquad (1-5)$$

بعد از جایگذاری $y_n(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i(x)$ در دستگاه (۱-۵) خواهیم داشت :

$$\int_a^b \Psi_i(x) w(x) L[\sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i(x)] dx = -\int_a^b \Psi_i(x) w(x) f(x) dx \qquad , i = 1, \dots, n$$

قابل ذکراست که عموما توابع $\Psi_i(x)$ متفاوت از $\phi_i(x)$ می باشند ولی گاهی اوقـات بـرای راحتـی یکـسان در نظـر گرفته می شوند ..

اطلاعات تکمیلی در مورد روشهای تقریب در منابع [۱۲ ، ۱۳] قابل دسترسی می باشد.

۱-٤. دستگاه‌های معادلات خطی

یک معادلات خطی برحسب متغیرهای $x_1, \dots, x_n$ معادله‌ای به فرم $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ اسـت کـه در آن $a_1, \dots, a_n$ و b اعداد حقیقی می‌باشند.

جواب یک معادله خطی مانند $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ مقادیر $s_1, \dots, s_n$ است به طوری کـه بـا جایگـذاری ایـن مقادیر به جای $x_1, \dots, x_n$ تساوی برقرار می‌گردد.

---

[1] - Galerkin Method

به تعداد متناهی از معادلات خطی برحسب متغیرهای $x_1,\dots,x_n$ دستگاه معادلات خطی گفته می‌شود و یک دنباله از اعداد $s_1,\dots,s_n$ را جواب دستگاه گویند اگر در تمام معادلات صدق کند.

یک دستگاه معادلات خطی m معادله، n مجهولی در حالت کلی به شکل زیر است:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

که در آن $x_1,\dots,x_n$ مجهول و b_i, a_{ij} که j=1,…,m و i=1,…,n مقادیر ثابت معلومند.

دستگاه m معادله، n مجهولی بالا را می‌توان به فرم ماتریسی AX=b که در آن

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}\dots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1}\dots a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

نشان داد. A را ماتریس ضرایب، X را بردار مجهول و b را مقادیر سمت راست می‌نامند.

۱-٤-۱. روش‌های حل دستگاه معادلات خطی AX=b

اگر A ساختار قطری داشته باشد یعنی دستگاه به صورت زیر باشد

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{21} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

این دستگاه به راحتی قابل حل است و داریم:

$$x = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

اگر A بالا مثلثی باشد دستگاه معادلات AX=b با جایگذاری پسرو و به راحتی قابل حل می‌باشد.

و اگر A پایین مثلثی باشد دستگاه معادلات AX=b با جایگذاری پیشرو به راحتی قابل حل می‌باشند.

علاوه بر سه حالت بالا مواردی نیز وجود دارند که با جابجایی سطرها، دستگاه AX=b به یکی از سه حالت قبلی تبدیل می‌شود.

روش‌های موجود برای حل دستگاه خطی AX=b را به دو قسمت تقسیم‌بندی می‌کنیم.

الف- روش‌های مستقیم

در روش‌های مستقیم پس از دنباله‌ای متناهی و از قبل مشخص شده عملیات محاسباتی جواب $\tilde{x}$ تولید می‌شود. هر گاه محاسبات بدون خطا صورت گرفته باشد $\tilde{x}$ دقیقاً در دستگاه معادلات صدق می‌کند یعنی $\tilde{x} = x$ ولی در عمل این

مقادیر محاسبه شده دستگاه خطی AX=b را دقیقاً حل نمی‌کنند. زیرا خطاهای مربوط به عملیات ماشـینی (خطـای گـرد کردن) روی محاسبات اثر می‌گذارد.

روش‌های مستقیم شامل موارد زیر می‌باشد:

۱. روش حذف گوس (گوس پسرو، گوس پیشرو و گوس جردن)

۲. روش تجزیه به فرم Lu (تجزیه دولتیل، کروت و چولوسکی)

۳. تجزیه به فرم QR (Q متعامد و R بالا مثلثی) و LR (L پایین مثلثی و R بالا مثلثی)

ب. روش‌های تکراری

در روش غیر مستقیم یا تکراری با حدس اولیه $X^{(0)}$ دنباله $\{X^{(m)}\}$ از بردار جواب‌های تقریبی ساخته می‌شوند که امید می‌رود این دنباله به جواب واقعی دستگاه همگرا شود. یعنی اگر X جواب دقیق دستگاه باشد داشته باشیم:

$$\lim_{m\to\infty} \| X - X^{(m)} \| = 0$$

در این روش محاسبات متوقف می‌شوند اگر یک جواب تقریبی دارای دقتی مشخص باشد و یا اینکه تعداد تکرارها از یک تعداد معین تجاوز نماید. دقت شود که در روش‌های مستقیم اگر از خطای گرد کردن صرفنظر کنیم جواب به دست آمـده جواب دقیق مساله می‌باشد. در صورتی که در روش تکراری در صورت موفق بودن روش به جواب دقیـق مـساله همگـرا می‌شو. سه روش تکراری معروف در زیر نامبرده شده است.

۱. روش ژاکوبی

۲. روش گوس- سایدل

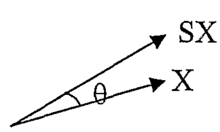
۳. روش S.O.R

۱-٤-۲. تبدیلات گیونز[1] و هاوس هولدر[2]

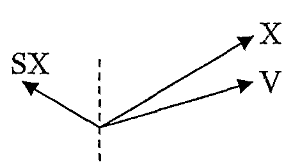
در ابتدا دو دسته از ماتریس‌های متعامد مهم را که در تعابیر هندسی ساده‌ای در $IR^{2\times2}$ دارند معرفی مـی‌کنیم. اولـین دسته ماتریس‌های دوران (چرخشی) می‌باشد. با ضرب یک بردار دلخواه $X \in IR^2$ در S، بردار SX به دست می‌آید کـه با زاویه θ نسبت به X قرار می‌گیرد. مانند شکل (الف).

دسته دوم ماتریس‌های انعکاس نامیده می‌شوند. این ماتریس‌ها به صورت $S = I - 2V.V^t$ تعریف مـی‌شـوند کـه در آن $V^t.V = \| V_2 \|^2 = 1$.

عمل S در این حالت به این صورت می‌باشد که بردار دلخواه $X \in IR^2$ را به طرف دیگر خط عمود به بـردار واحـد V منعکس می‌سازد. مانند شکل (ب).



(الف)



(ب)

این دسته از ماتریس‌ها به $IR^{n\times n}$ تعمیم می‌یابند. ساده‌ترین ترسیم دوران‌های صفحه‌ای یا تبدیلات گیونز می‌باشند کـه بـه صورت زیر می‌باشند.

---

[1] - Givens

[2] -Householder