بسم الله

الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی

دانشکده علوم - گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض -هندسه

موضوع:

پیکربندی ابررویه‌های عام در فضای تصویری n بعدی

نگارش:

طاهره اکبرزاده

استاد راهنما:

جناب آقای دکتر حسن حقیقی

استاد مشاور:

سرکار خانم دکتر فرشته ملک

شهریور ۱۳۹۲

اظهارنامه دانشجو

موضوع پایان‌نامه: پیکربندی ابررویه‌های عام در فضای تصویری **n** بعدی

استاد راهنما: دکتر حسن حقیقی

نام دانشجو: طاهره اکبرزاده

شماره دانشجویی: ۹۰۰۰۷۹۴

اینجانب طاهره اکبرزاده دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی محض گرایش هندسه دانشکده علوم دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی گواهی می‌نمایم که تحقیقات ارائه شده در این پایان‌نامه توسط شخص اینجانب انجام شده و صحت و اصالت مطالب نگارش شده مورد تأیید می‌باشد و در مورد استفاده از کار دیگر محققان به مرجع مورد استفاده اشاره شده است. همچنین گواهی می‌نمایم که مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی توسط اینجانب یا فرد دیگری در هیچ جا ارائه نشده است و در تدوین متن پایان‌نامه آئین نامه مصوب دانشگاه را به طور کامل رعایت کرده‌ام.

امضاء دانشجو:

تاریخ:

فرم حق طبع و نشر و مالکیت نتایج

۱-حق چاپ و تکثیر این پایان‌نامه متعلق به نویسنده آن می‌باشد. هرگونه کپی برداری بصورت کل پایان‌نامه یا بخشی از آن تنها با موافقت نویسنده یا کتابخانه دانشکده علوم پایه دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی مجاز می‌باشد.

۲-کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی می‌باشد و بدون اجازه کتبی دانشگاه به شخص ثالث قابل واگذاری نیست.

همچنین استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان‌نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

ای شمس! کوه مغرب تا چند حایل ما؟

عجّل علی ظهورک از مشرق دل ما...

تقدیم به

امام زمان (عج)،

دو عموی شهیدم

و

پدر و مادر عزیزم

که لبخند رضایت آنها انگیزه من برای به زیستن و بهتر اندیشیدن است.

سپاس...

سپاس خداوندی را که گره ناگواری ها به دست او باز و تیزی سختی ها به دست او کند می‌شود.

در ابتدا وظیفه خود می‌دانم از استاد محترم، جناب آقای دکتر حسن حقیقی که بدون راهنمایی و کمک مشفقانه ایشان قادر به اتمام این پایان‌نامه نبوده‌ام، صمیمانه تشکر کنم.

از استاد مشاور خود، سرکار خانم دکتر فرشته ملک که همواره از راهنمایی ایشان بهره مند شدم، کمال قدردانی را دارم.

همچنین از اساتید بزرگوار، جناب آقای دکتر قلندرزاده و جناب آقای دکتر زارع نهندی که به عنوان ممتحن داخلی و ممتحن خارجی از نقطه نظرات شان مرا بهره مند کرده‌اند، نهایت تشکر را دارم.

در پایان از پدر ومادر مهربانم که همیشه راهنما و مشوقم بوده‌اند، از برادر و خواهران عزیزم و فرزندان دوست‌داشتنی‌شان که روزهای پر دقدقه‌ام با بودن در کنار آنها شیرین و به یادمانی گشته است، و همچنین از دوستان گرامی‌ام، که از مصاحبت با آنها بسیار آموخته ام، بی نهایت سپاس‌گزارم.

چکیده رساله

این پایان نامه، با معرفی پیکربندی ستاره ای $\mathbb{X}(l)$ را در فضای $\mathbb{P}^۲$ و تعمیم آن در فضای $\mathbb{P}^n$، به بررسی خواص این پیکربندی می‌پردازد. سپس پرسش‌هایی در مورد این پیکربندی مطرح کرده است و بعد از بیان ساختار جبری و هندسی این پرسش ها، به آن‌ها پاسخ می‌دهد. همچنین با معرفی اجتماع دو پیکربندی ستاره ای خطی، $\mathbb{X}^{(s,s)}$، از نوع $s \times s$ و بیان برخی نتایج حاصل از این اجتماع، به عنوان یکی از کاربردهای این نوع پیکربندی، ثابت می‌کند واریته قاطع خطی $\mathrm{Sec}_۱(\mathrm{Split}_s(\mathbb{P}^n))$ بعد مورد انتظار $۲ns + ۱$ برای $n \geq ۳$ و برای $s \geq ۳$ را داراست.

واژگان کلیدی: پیکربندی ستاره ایی، خم مسطح عام، ابررویه های عام، اجتماع پیکربندی ستاره‌ایی، واریته قاطع$\mathrm{Sec}_۱(\mathrm{Split}_s(\mathbb{P}^n))$

مقدمه

یک رهیافت اساسی برای بررسی یک واریته جبری، مطالعه زیر واریته های آن است. به خصوص در ساده ترین حالت، که در عین حال مشکل ترین آن می‌باشد، مسأله این است که آیا یک ابررویه عام در $\mathbb{P}^n$ زیر واریته‌هایی از متمم بعد d که تعداد معادلات تعریف کننده آنها دقیقاً برابر d است، دارای می‌باشد؟ در این پایان نامه نه‌تنها مسأله فوق را برای زیر واریته های خاصی، همچون نقاط در صفحه $\mathbb{P}^۲$ یا زیر فضاهای خطی در $\mathbb{P}^n$ بررسی می‌نماییم بلکه قصد داریم آنها را برای ابررویه‌های در $\mathbb{P}^n$ که در حالت عام قرار می‌گیرند را نیز بررسی نمائیم.

در فصل اول این پایان نامه به یادآوری برخی تعاریف و قضایایی که در فصول بعدی کاربرد فراوانی دارند، پرداخته ایم.

در فصل دوم پیکربندی ستاره‌ای نقاط در $\mathbb{P}^۲$ و اینکه به ازای چه زوج های (d, l) از اعداد طبیعی می‌توان یک خم از درجه d پیدا کرد که از l نقطه واقع در صفحه $\mathbb{P}^۲$ بگذرد ،را مورد بررسی قرار دادیم.

در فصل سوم به تعمیم موضوعی که در فصل دوم مطرح کردیم می‌پردازیم، یعنی پیکربندی ستاره‌ای در $\mathbb{P}^n$ و اینکه به ازای چه چهارگانه های (d, r, l, n) از اعداد طبیعی می‌توان یک چند جمله ای همگن از درجه ی d و از $n + ۱$ متغیر پیدا کرد به طوری که F را بتوان به صورت مجموعی از حاصل ضرب های r چند جمله ای چند جمله ای خطی همگن و یک چند جمله ای همگن از درجه $d - r$ نوشت را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در فصل چهارم اجتماع دو پیکربندی ستاره خطی در $\mathbb{P}^n$ از نوع $s \times s$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم و نهایتاً ثابت می‌کنیم که بعد مورد انتظار واریته قاطع $\mathrm{Sec}_۱(\mathrm{Split}_s\mathbb{P}^n)$ برای $n \geq ۳$ و $s \geq ۳$ برابر با $۲ns + ۱$ می‌باشد.

مراجع اصلی این پایان نامه، به ترتیب مقالات [۴]، [۵]، [۱۰] و [۱۱] می‌باشد.

فهرست مطالب

فصل ۱
پیش نیازها

در این فصل، برای پرهیز ازمراجعه به منابع مختلف، مفاهیم، تعاریف و قضایایی که برای فصول بعدی مورد نیاز است ذکر می‌کنیم. به علاوه فرض می‌کنیم میدان پایه، یک میدان به طور جبری بسته است.

۱.۰.۱ قضایایی از هندسه تصویری

یکی از قضایایی که فراوان به کار گرفته می‌شود قضیه بزو [۱] می‌باشد.

قضیه ۱.۰.۱. فرض کنیم $X = V(F)$ و $Y = V(G)$ دو خم تصویری باشند و X ناتکین باشد که مشمول هیچ مولفه Y نیست. آنگاه این دوخم یکدیگر راقطع می‌کنند و مجموع چندگانگی های تقاطع X و Y در همه نقاط $X \cap Y$ برابر حاصل‌ضرب درجه F و درجه G می‌باشد.

اثبات. مرجع [۹، فصل ۱، بخش ۶.۲، فصل ۳، بخش ۲.۲ و فصل ۴، بخش ۲.۱] را ببینید. $\square$

مثال ۱.۰.۱. فرض کنیم $\mathcal{C} = V(F)$ یک خم مسطح درجه d و ℓ یک خط در $\mathbb{P}^2$ باشد. فرض کنیم $\mathcal{C} \cap \ell$ لااقل $d+1$ نقطه دارد. آنگاه ℓ یک مولفه $\mathcal{C}$ است و معادله ℓ یک مضرب F است.
در واقع اگر ℓ یک مولفه $\mathcal{C}$ نباشد آنگاه بنابر قضیه بزو، $\ell \cap \mathcal{C}$ دقیقاً d نقطه خواهد داشت که خلاف فرض است.

تعریف ۱.۰.۱. فرض کنیم Xو Y دو واریته باشند. نگاشت منظم $f : X \longrightarrow Y$ را غالب گوییم هرگاه $\overline{f(X)} = Y$.

[۱] Bezout

مثال ۲.۰.۱. فرض کنیم $X = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \mid xy = 1\}$ و $Y = \mathbb{A}^1$. فرض کنیم $f : X \longrightarrow Y$ نگاشتی باشد که به صورت $f(x,y) = x$ تعریف می‌شود. آنگاه $F(X) = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ که یک مجموعه چگال در $\mathbb{A}^1$ است. در نتیجه f یک نگاشت غالب است.

تعریف ۲.۰.۱. فرض کنیم X و Y دو واریته شبه تصویری باشند و $f : X \longrightarrow Y$ یک نگاشت منظم باشد. فرض کنیم $y \in Y$، در اینصورت مجموعه $f^{-1}(y) = \{x \in X | f(x) = y\}$، که یک زیر واریته بسته Xاست، را یک تار f روی yمی‌نامیم.

قضیه ۲.۰.۱. فرض کنیم $f : X \longrightarrow Y$ یک نگاشت منظم بین واریته های تحویل ناپذیر باشد. فرض کنیم $f(X) = Y, \dim X = n$ و $\dim Y = m$. آنگاه $m \leq n$، و

(۱) برای هر $y \in Y$ وبرای هر مؤلفه F از تار $f^{-1}(y)$، $\dim F \geq n - m$.

(۲) یک زیر مجموعه ی باز ناتهی $U \subset Y$ وجود دارد به که برای هر $y \in U$، $\dim f^{-1}(y) = n - m$.

اثبات. مرجع [۹، صفحه ۷۶]. $\square$

مثال ۳.۰.۱. فرض کنیم X و Y دو واریته شبه تصویری از بعد های به ترتیب m و n باشند. در این صورت $X \times Y$ از بعد $m + n$ است. به خصوص اگر $X = Y$ آنگاه $X \times X$ از بعد $2n$ است.

در واقع نگاشت تصویر $pr : X \times Y \longrightarrow Y$ یک نگاشت منظم است. چون برای هر $y \in U \subset Y$، که U یک زیر مجموعه باز Y است، $pr^{-1}(y)$ با $X \times y$ ایزومرف است پس $\dim pr^{-1}(y) = \dim X = m$. پس بنابر قضیه ۲.۰.۱، $\dim X \times Y = \dim Y + \dim pr^{-1}(y) = n + m$.

نتیجه ۱.۰.۱. تحت همان شرایط قضیه فوق فرض کنیم k یک عدد صحیح نامنفی باشد. آنگاه مجموعه های $Y_k = \{y \in Y | \dim f^{-1}(y) \geq k\}$ در Y بسته اند.

اثبات. مرجع [۹، نتیجه قضیه ۷ صفحه ۷۷] را ببینید. $\square$

تعریف ۳.۰.۱. فرض کنیم X یک فضای‌توپولوژیک و $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع باشد. f را نیم‌پیوسته بالایی[۱] می‌نامند هرگاه برای هر $a \in \mathbb{R}$، مجموعه $f^{-1}(-\infty, a)$ یک زیرمجموعه باز X باشد. به‌طور معادل برای هر $a \in \mathbb{R}$، مجموعه $f^{-1}([a, +\infty))$ یک زیرمجموعه بسته X باشد.

با توجه به نتیجه ۱.۰.۱، تابع بعد یک تابع نیم‌پیوسته بالایی است.

تعریف ۴.۰.۱. واریته $X \subseteq \mathbb{P}^n$ را ناتبهگون[۲] می‌نامیم هرگاه در هیچ زیر فضای $\mathbb{P}^n$ جای نگیرد. (به عبارت دیگر کوچکترین زیر فضای خطی $\mathbb{P}^n$ که X را دربر دارد برابر $\mathbb{P}^n$ باشد).

مثال ۴.۰.۱. برای هر عدد صحیح و مثبت d، نشانده $\mathbb{P}^n$ تحت نگاشت ورونزه در $\mathbb{P}^N$، که $N = \binom{n+d}{n} - ۱$، یک واریته ناتبهگون است.

تعریف ۵.۰.۱. مجموعه جبری (واریته) $X \subseteq \mathbb{P}^n$را کاسته[۳] می‌نامیم هرگاه حلقه موضعی آن عنصر پوچ توان نابدیهی نداشته باشد.

مثال ۵.۰.۱. فرض کنیم $X = V(x^۲ + y^۲ - ۱)$ و $Y = V(y - ۱)$ دو مجموعه جبری در $\mathbb{A}^۲$ باشند. در این صورت مجموعه $X \cap Y = \{(x, y) \mid x^۲ + y^۲ = ۱, y = ۱\}$ یک مجموعه جبری کاسته نیست در حالی که هریک از مجموعه های X و Y خود به تنهایی کاسته اند.

تعریف ۶.۰.۱. فرض کنید R یک حلقه باشد، بعد کرول حلقه Aبه صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\dim R = \max \left\{ n | P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_n; \ \text{ها ایده آل اول } R \text{ اند } P_i \right\}$$

مثال ۶.۰.۱. فرض کنیم $R = \mathbb{Z}$. در این صورت $\dim \mathbb{Z} = ۱$. زیرا $< ۰ >$ و $< p >$، که p یک عدد اول است، تنها ایده آل های اول $\mathbb{Z}$ می‌باشد و $< ۰ > \subset < p >$.

---
[۱] upper semicontiniuos
[۲] non-degenerate
[۳] reduced

تعریف ۱.۰.۷. فرض کنید R یک حلقه جابه جایی و $\mathcal{P}$ یک ایده آل اول آن باشد. در این صورت

$$\sup\left\{m|Q_0 \subset Q_1 \subset Q_2 \subset \cdots \subset Q_m \subset \mathcal{P};\ \text{اند } R \text{ ها ایده آل اول } Q_i\right\}$$

را بلندی ایده آل اول $\mathcal{P}$ نامیده و آن را با $\mathrm{ht}\ (\mathcal{P})$ نشان می‌دهیم.

مثال ۱.۰.۷. فرض کنیم X یک واریته از بعد m در $\mathbb{A}^n$ باشد و y یک نقطه آن، Y یک زیر واریته تحویل ناپذیر از متمم بعد یک X باشد. فرض کنیم R حلقه مختصاتی X باشد. در این صورت $I(\{y\})$ یک ایده آل از بلندی m در R و $I(Y)$ یک ایده آل از بلندی ۱ در R است.

تعریف ۱.۰.۸. فرض کنیم X یک واریته باشد. بعد X را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\dim X = \sup\{m\ |pt \subset X_1 \subset \ldots \subset X_m \subset X\}$$

که در آن X_i ها زیر واریته های تحویل ناپذیر X اند.

حال اگر ایده‌آل تعریف کننده X_i ها را بنویسیم، زنجیر فوق به صورت زیر درخواهد آمد:

$$\mathfrak{M} \supset \mathcal{P}_1 \supset \mathcal{P}_2 \supset \ \ldots\ \supset \mathcal{P}_m \supset I(X) \supsetneq \mathcal{P}_{m+1} \supset \cdots \supset < 0 > .$$

اگر X یک واریته جبری باشد و $I(X) = (f_۱, \ldots, f_s)$ بنابرقضیه ایده‌آل اصلی کرول، $\mathrm{ht}\ (I(X)) \leq s$. از طرف دیگر می‌دانیم $\mathrm{ht}\ (I(X)) + \dim \frac{K[x_۰,\ldots,x_n]}{I(X)} = \dim K[x_۰, \ldots, x_n] = n + ۱$، بنابراین

$$\dim \frac{K[x_0, \ldots, x_n]}{I(X)} = (n+1) - \mathrm{ht}\ (I(X)) \geq n+1-s.$$

تعریف ۱.۰.۹. فرض کنیم X یک واریته باشد. هرگاه $\{f_۱, \ldots, f_s\}$ یک مجموعه مولد مینیمال برای $I(X)$ باشد و $\dim \frac{k[x_۰,\ldots,x_n]}{I(X)} = n + ۱ - s$ آنگاه X را به طور ایده‌آلی تقاطع کامل می‌نامیم.

به عبارت دیگر یک واریته از بعد r در$\mathbb{P}^n$ را تقاطع کامل نامیم اگر $I(X)$ بتواند توسط $n - r$ عنصر تولید شود.

مثال ۱.۰.۸. ۱- هرگاه F یک چندجمله‌ای غیر ثابت تحویل ناپذیر در $K[x_۰, \ldots, x_n]$ باشد آنگاه ابررویه $X = V(F)$ یک تقاطع کامل است زیرا $\dim X = n - ۱$.

۲- هرگاه F و G دو چندجمله‌ای غیر ثابت تحویل ناپذیر متمایز در $K[x_\circ,\dots,x_n]$ باشند آنگاه $X=V(F,G)$ یک واریته به طور ایده‌آلی تقاطع کامل خواهد بود.

۳- هرگاه V یک زیرفضای خطی $\mathbb{P}^n$ یا $\mathbb{A}^n$ و از بعد m باشد، آنگاه بنابرقضیه اساسی جبر خطی، V یک واریته تقاطع کامل خواهد بود.

۴- هرگاه $X=\{P\}$ یک تک‌نقطه ای در $\mathbb{P}^n$ یا $\mathbb{A}^n$ باشد، آنگاه بنابرقضیه صفرهای هیلبرت، X یک واریته به طورایده‌آلی تقاطع کامل خواهد بود زیرا مثلاً اگر $P=(p_\circ,\dots,p_n)\in\mathbb{P}^n$ آنگاه $I(P)=(x_\circ-p_\circ,\dots,x_n-p_n)$.

تعریف ۱.۰.۱۰. فرض کنید R حلقه تعویض‌پذیر و یکدار باشد. R را یک حلقه $\mathbb{Z}^+$ مدرج گوییم هرگاه زیرگروههای جمعی R_dکه $(d\in\mathbb{Z}_{\geq\circ})$ از R وجود داشته باشد به طوریکه

(۱) $R=\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}_{\geq\circ}}R_d$،

(۲) به ازای هر $d,c\in\mathbb{Z}_{\geq\circ}$ داشته باشیم $R_dR_c\subseteq R_{d+c}$.

یک عنصر غیر صفر R_d را یک عنصر همگن از درجه d می‌نامیم. هنگامی‌که R حلقه چندجمله‌ای ها با ضرایب در یک میدان باشد هر عنصر R_d را یک فرم از درجه d نیز می‌نامند. به خصوص اگر $d=۱$ آنگاه چندجمله‌ای همگن درجه یک را یک فرم خطی می‌نامیم.

بنابرتعریف حلقه مدرج، هر عنصر R را می‌توان به صورت یکتایی به شکل مجموعی متناهی از عناصر همگن نوشت.

به طور مشابه یک ایده آل I از R را همگن می‌نامیم هرگاه I را بتوان به صورت $I=\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}_{\geq\circ}}I_d$ که برای هر $d\in\mathbb{Z}_{\geq\circ}$، I_d یک زیر گروه جمعی I است، نوشت. به راحتی نشان داده می‌شود، ایده آل I مدرج است اگروتنها اگر $I=\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}_{\geq\circ}}(R_d\cap I)$.

مثال ۱.۰.۹. فرض کنیم $R=K[x_\circ,x_۱,\dots,x_n]$حلقه چندجمله ای های با ضرایب در میدان K باشد. فرض کنیم R_d زیرگروه جمعی پدید آمده توسط مونومیال های$x_\circ^{d_\circ}x_۱^{d_۱}\dots x_n^{d_n}$ با $d=d_\circ+d_۱+\dots+d_n$ باشد. در اینصورت $R=\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}_{\geq\circ}}R_d$. به خصوص هر یک از R_d ها یک فضای برداری روی K و ازبعد $\binom{d+n}{d}$ می‌باشد.

مثال ۱.۰.۱۰. فرض کنید R همان حلقه مدرج مثال قبل و I ایده آل همگن آن باشد، در این صورت حلقه $S = \frac{R}{I}$ یک حلقه مدرج خواهد بود و $S = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} (\frac{R}{I})_d = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} (\frac{R_d}{I_d})$. هر یک از جمعوندهای $\frac{R_d}{I_d}$ یک فضای برداری روی K هستند و بنابر قضیه اساسی جبرخطی داریم:

$$\dim_K \frac{R_d}{I_d} = \dim_K R_d - \dim_K I_d = \binom{n+d}{d} - \dim_K I_d$$

در حالت خاص هرگاه K یک میدان به طور جبری بسته باشد، آنگاه $K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ حلقه مختصاتی فضای تصویری $\mathbb{P}^n$ است، و هرگاه I یک ایده آل همگن و رادیکال R متمایز از ایده آل $< x_0, \ldots, x_n >$ باشد آنگاه I یک زیر مجموعه بسته $\mathbb{P}^n$را تعیین می‌کند و $\frac{R}{I}$، حلقه مختصاتی این زیر مجموعه بسته، یک حلقه همگن است.

تعریف ۱.۰.۱۱. فرض کنیم R یک حلقه نوتری مدرج و I و J دو ایده‌آل مدرج R باشند. در این صورت

$$(I : J^\infty) = \cup_{m \in \mathbb{N}} (I : J^m)$$

را اشباع شده I نسبت به J می‌نامند.

در حالت خاص که $R = K[x_0, \ldots, x_n]$، $I = (F_1, \ldots, F_s)$ یک ایده‌آل همگن و $\mathfrak{m} = (x_0, \ldots, x_n)$ ایده‌آل بی‌ربط R است، با اشباع کردن I نسبت به $\mathfrak{m}$، جواب $\{(0, \ldots, 0)\}$ را از مجموعه جواب‌های دستگاه $F_1 = \cdots = F_s = 0$ حذف کرده و یک اسکیم بسته در $\mathbb{P}^n$ به دست می‌آید.

فرض کنیم F یک چندجمله‌ای همگن از درجه d از $n+1$ متغیر باشد. می‌دانیم F را می‌توان به صورت یک ترکیب خطی ازمونومیال های از درجه d نوشت. به این ترتیب F با ضرایبش در K، به طوریکتایی تعیین می‌شود و این ضرایب یک نقطه فضای $\mathbb{P}^N$، که $N = \binom{n+d}{n} - 1$ را تعیین می‌کند. بنابراین عناصر R_d و یا به طور معادل ابررویه‌هایی که توسط $V(F)$ تعریف می‌شود، با نقاط $\mathbb{P}^N$ در تناظر یک به یک قرارمی‌گیرند. هنگامی‌که $d = 1$ باشد هر ابرصفحه در $\mathbb{P}^n$ با یک نقطه در $\mathbb{P}^n$ درتناظر قرارمی‌گیرد.

تعریف ۱.۰.۱۲. فضای پارامتری کننده ابر صفحه های در $\mathbb{P}^n$ را با $\check{\mathbb{P}}^n$ نشان داده و آن را فضای دوگان $\mathbb{P}^n$ می‌نامند.

گزاره ۱.۰.۱. مجموعه نقاط $\xi \in \mathbb{P}^N$ که با چندجمله‌ای های تحویل پذیر درتناظر قرار می‌گیرند یک زیر مجموعه بسته $\mathbb{P}^N$ است. به خصوص چندجمله‌ای هایی که به صورت حاصل ضربی از عوامل خطی نوشته می‌شود، یک زیر مجموعه بسته $\mathbb{P}^N$ را تعیین می‌کنند.

اثبات. مرجع [۹] صفحه ۶۰ راببینید. □

۱.۱ قانون گروه روی خم‌های درجه ۳

در فصل بعد، برای این که نشان دهیم یک خم هموار از درجه ۳ می تواند شامل یک پیکربندی ستاره‌ای باشد، با استفاده از قانون ترکیب یک گروه که به طور طبیعی روی این خم تعریف می شود حکم را به اثبات می رسانیم. برای کامل بودن این اثبات، در زیر ساختمان این گروه را که روی خم بیضوی تعریف می شود، شرح می دهیم.

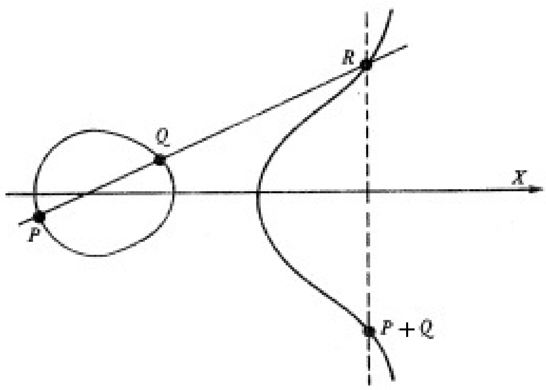
معادله $y^2 = g(x) = x^3 + ax + b$ که $a, b \in \mathbb{R}$ را درنظر می گیریم. فرض کنیم $g(x)$ ریشه مضاعف ندارد. این تابع یک خم در صفحه $\mathbb{R}^2$ تعریف می کند، که یک خم بیضوی روی $\mathbb{R}$ نامیده می شود. روی این خم به طور طبیعی یک قانون گروه به صورت زیر می توان تعریف کرد.

برای این کار نمودار این خم را با $\mathcal{E}$ نمایش می‌دهیم. به موازات آنکه x به سمت بینهایت میل می‌کند، خم $\mathcal{E}$ به حالت قائم نزدیک ونزدیکتر می‌شود. حال یک نقطه اضافی θ، موسوم به نقطه قائم در ∞ به $\mathcal{E}$ می‌افزاییم. درمورد θ به دو نکته زیر با توجه نمود:

(۱) θ روی هر خط قائم در صفحه واقع است. این نقطه را باید به طور همزمان بی‌نهایت دور در بالا و بی‌نهایت دور در پایین هر خط قائم درنظرگرفت.

(۲) θ قرینه خود نسبت به محور xهاست.

نقطه θ وضعیت حدی نقطه‌ای است که نسبت به انتهای باز $\mathcal{E}$ یا به طرف بالا و یا به طرف پایین بی‌نهایت دور می‌شود. بنابراین θ این قسمت باز خم را می‌بندد و خم را تبدیل به یک حلقه، یعنی یک خم بسته‌ی ساده، می‌کند.



شکل ۱.۱: $P+Q$

حال عمل تعویض‌پذیر + را روی $\mathcal{E}$ تعریف می‌کنیم که با این عمل، نقاط این خم یک گروه جابه جایی تبدیل می شود.

اگر P و Q دو نقطه متمایز روی $\mathcal{E}$ باشند، خط PQ باید $\mathcal{E}$ را در نقطه سومی چون R قطع کند. همچنانکه در شکل ۱.۱ نمایش داده شده است $P+Q$ را به صورت قرینه‌ی R نسبت به محور Xتعریف می‌کنیم.

همچنین $P+Q=Q+P$، زیرا خطوط PQ و QP برهم منطبق‌اند.

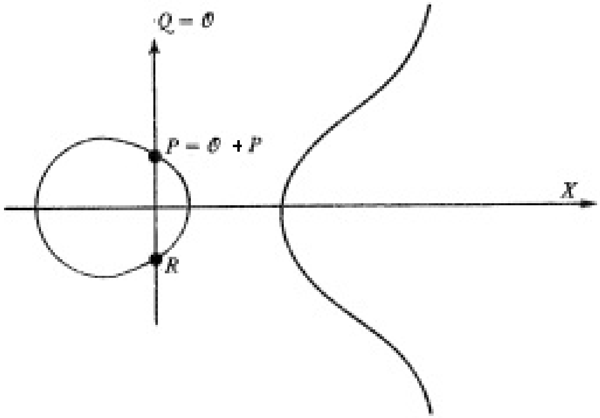
در حالت $Q=\theta$، $PQ=QP$ خط قائم گذرنده از P است، بنابراین، R قرینه‌ی P است، و در نتیجه $P+\theta=P$، زیرا P قرینه‌ی R است. در شکل ۲.۱ این وضعیت روی یک خم درجه سه نمایش داده شده است.

برای تعریف $P+P$وضعیت حدی $P+Q$ را وقتی $P \to Q$ را درنظر می‌گیریم. این به معنای آن است که خط مماس بر θ در Pرا درنظرگرفته و نقطه R، محل تلاقی مجدد این خط با خم، را بیابیم و $P+P$ را به عنوان قرینه‌ی آن تعریف کنیم.(شکل۳.۱)

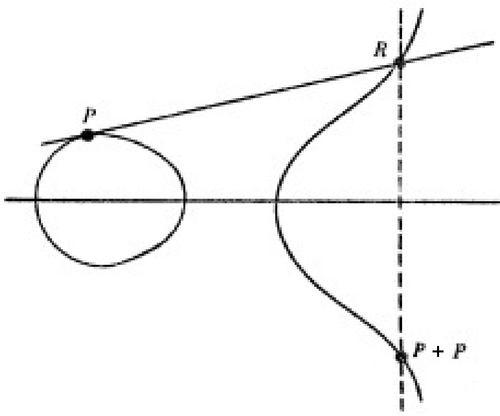
$\theta+\theta$ را به طور دلخواه برابرθ تعریف می‌کنیم.

همچنین وارون جمعی هر نقطه‌ی P، قرینه آن نسبت به محور Xهاست. بنابراین تنها شرکت‌پذیری آن باید مورد برررسی قرار گیرد که آن هم با مطالبی که گفته شد، امکان‌پذیر است.

با این تعاریف $(\mathcal{E},+)$ یک گروه تعویض پذیر با عنصر بی اثر θ است.



شکل ۲.۱: $P + \theta$



شکل ۳.۱: $P + P$

۲.۱ تابع هیلبرت

یکی از ابزارهای مهم برای مطالعه یک واریته تصویری دانستن بعد هر یک از جمعوندهای حلقه مختصاتی آن می‌باشد. در این بخش می‌خواهیم برخی خواص تابعی که بعد هر یک از این جمعوندها را بدست می‌دهد مورد مطالعه قرار دهیم.

یادآوری ۱.۲.۱. فرض کنید $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^n$ یک واریته تصویری باشد. همچنین فرض کنیم F چندجمله ای همگن از درجه d در $R = K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ باشد به طوریکه ابررویه تعریف شده توسط Fشامل $\mathbb{X}$ باشد وفرض کنیم G یک چندجمله ای همگن از درجه d در $R = K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ باشد به طوریکه ابررویه تعریف شده توسط G شاملX نباشد. بنابر قضیه صفرهای هیلبرت برای یک $\ell \in \mathbb{N}$، $F^\ell \in I(X)_d$ و $G \notin I(X)$.

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید $R = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} R_d$ یک حلقه مدرج باشد، به طوری که $R_0 = K$ یا R_0 یک حلقه آرتینی باشد. تابع

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{Z}_{\geq 0} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ & d & \longrightarrow & \dim_K R_d \end{array}$$

را تابع هیلبرت حلقه R می‌نامند.

تابع هیلبرت یک واریته از این جهت حائز اهمیت است که این تابع یک دنباله از پایا های یک واریته تصویری را به دست می‌دهد. به طور مشخص، فرض کنیم $K[x_0, \ldots, x_n] = R$ حلقه چندجمله ای های با ضرایب در میدان K و X یک واریته تصویری در $\mathbb{P}^n$ با ایده‌آل تعریف کننده I باشد. آنگاه $\dim \frac{R_d}{I_d}$ تعداد چندجمله ای های همگن از درجه d که روی K مستقل خطی اند و روی $X = V(I)$ صفر نمی‌شوند را بدست می‌دهد. همچنین $\dim_K (I_d)$ تعداد چندجمله ای های مستقل خطی و از درجه d که روی X صفر می‌شوند را بدست می‌دهد. این دو کمیت ازطریق تساوی $\dim_K \frac{R_d}{I_d} = \dim_K R_d - \dim_K I_d$ به یکدیگر مرتبط می‌شوند.

تابع هیلبرت حلقه مختصاتی X را به عنوان تابع هیلبرت واریته تصویری X در نظر می‌گیریم و آن را با $H(X, d)$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۱.۲.۱. $X \subseteq \mathbb{P}^2$ یک خم تحویل ناپذیر باشد. در اینصورت $X = V(F)$ که F که چندجمله ای همگن در