دانشگاه اصفهان

دانشكده علوم

گروه رياضي

پايان نامه ی كارشناسی ارشد رشته ی رياضي گرايش آناليز

مشخصه ميانگين پذيري جبرهاي باناخ

استاد راهنما:

دکتر محمود لشکری زاده بمی

پژوهشگر:

زهرا رحيمي

شهريور ماه 1389

چکیده
مبحث میانگین پذیري چپ براي F جبرها ، توسط لائو معرفی و بررسی شد. تعمیمي از این مفهوم، بحث φ میانگین پذیري جبر باناخ A مي باشد، به طوری که φ یک تابعک خطيِ ضربي روی A، یا اصطلاحا" مشخصه A است. دراین پایان نامه، به مطالعه φ میانگین پذیري مي پردازیم و هدف، پیدا کردن چند خاصیت براي جبرهاي φ میانگین پذیر وهمچنین یافتن چند شرط لازم و کافي براي φ میانگین پذیري جبر باناخ A، است. φ میانگین هاي داراي نرم 1 نیز مورد توجه قرار گرفته و نشان داده مي شود که وجود آنها براي A را مي توان یک خاصیت نقطه اي شمرد. در قسمت هائي از این پایان نامه بر روي جبرهاي باناخ ضعیف دنباله اي کامل تمرکز مي کنیم. سپس با بیان مفهوم منظم پذیري آرنز، ارتباطي بین آرنز منظم بودن جبرهاي باناخ ضعیف دنباله اي کامل و φ- میانگین پذیر بودن آنها به دست مي آوریم.
به دلیل اینکه مفهوم φ میانگین پذیري، نسبت به میانگین پذیري چپ، یک حالت کلي به حساب مي آید، بعضي از قضایائي که در اینجا ثابت مي شود، تعمیمي از قضایائي است که لائو براي F جبرها ثابت کرده است. به همین دلیل اشاره اي مختصر به F جبرها داشته ایم.
علاوه بر یافتن خاصیت هائي از جبرهاي باناخ φ–میانگین پذیر و همچنین چند شرط معادل φ میانگین پذیري، براي جبر باناخ A، یکي از نتایج مهمي که دراین پایان نامه به دست مي آید، این است که مي توان اندازه مجموعه φ میانگین هاي جبر باناخ ضعیف دنباله اي کامل و تفکیک پذیر A را که در خود φ- میانگین ندارد، به طور دقیق به دست آورد. این نتیجه در گذشته براي بعضي از حالت هاي خاص به دست آمده است که در قالب مثال به آنها اشاره خواهیم کرد. مثال هائي نیز در قسمت هاي مختلف به منظور روشن تر شدن بحث ارائه شده است.
کلمات کلیدي: جبر باناخ، مشخصه، میانگین پذیري، φ میانگین، جبر باناخ ضعیف دنباله اي کامل، F جبر

فهرست مطالب

مقدمه

نظریه میانگین پذیري جبرهاي باناخ ابتدا توسط جانسون معرفی و بررسي شد [16]. در واقع میانگین پذیري جبرهاي باناخ به گونه اي تعریف گردید که براي یک گروه موضعا فشرده G، میانگین پذیري جبر گروه $L^1(G)$، معادل میانگین پذیری گروه G باشد. پس از آن، این مفهوم به یکي از مهمترین مباحث آنالیز هارمونیک تبدیل شد و کماکان به صورت هاي مختلف مورد بررسي قرار مي گیرد. براي مثال لائو، میانگین پذیري چپ را براي خانواده اي بزرگ از جبرهاي باناخ بنام F جبرها یا جبرهاي لائو تعریف کرد. F جبر A، جبر باناخي است که پیش دوگان یک جبر وُن نیومن M است، به طوري که هماني M ، که با ε نشان داده مي شود، یک تابعک خطيِ ضربي روي A باشد. چنین F جبري میانگین پذیر چپ نامیده مي شود هرگاه براي هر $A-$ مدول دو طرفه باناخ X با تعریف ضرب مدولي چپ $a.x=a(\varepsilon)x$ براي هر $a\in A$ و $x\in X$ ، هر مشتق کراندار از A به X^* ، دروني باشد.

در این پایان نامه سعي شده است نتایج مقدماتي که در فصل هاي دوم تا ششم مورد نیاز قرار مي گیرد، در فصل اول ذکر شود. همچنین در این فصل تعاریفي مختصر از C^*- جبر، جبرهاي فوریه، جبرهاي وُن نیومن و... ارائه شده است که خواننده در صورت نیاز مي تواند به این بخش مراجعه نماید. در ارتباط با مفهوم مشتق، مشتق دروني و میانگین پذیري در فصل دوم این پایان نامه توضیحاتي داده شده، همچنین بطور مختصر نیز اشاره اي به جبرهاي لائو شده است و نیز در تمام قسمتهاي این پایان نامه ε ، نشان دهنده هماني جبر وُن نیومن مي باشد.

فرض کنیم A یک جبر باناخ و φ یک تابعک خطيِ ضربي روي A باشد. A ، $\varphi-$میانگین پذیر نامیده مي شود هرگاه تابعک خطي کراندار m روي A^* موجود باشد به طوریکه $\langle m,\varphi\rangle=1$ و براي هر $a\in A$ و $f\in A^*$،

$$\langle m, f.a\rangle=\varphi(a)\langle m, f\rangle$$

در فصل دوم شرایطي معادل با وجود $\varphi-$میانگین براي جبر باناخ A ارائه مي شود. در قضیه 2.3 2 ، $\varphi-$میانگین پذیري معادل صفر بودن گروه کوهمولوژي $H^1(A,X^*)$، براي بعضي از $A-$ دومدول هاي باناخ X، بیان شده است. همچنین A، $\varphi-$ میانگین پذیر است اگر و تنها اگر تور کراندار $(u_\alpha)_\alpha$ در A موجود

باشد به طوري كه براي هر α، $\varphi(u_\alpha)=1$ و $\|au_\alpha-\varphi(a)u_\alpha\|\to 0$ براي هر $a\in A$ (قضيه 2 4.3) . علاوه بر اين نشان داده مي شود كه ارتباطي بين وجود φ-ميانگين براي جبر باناخ A و وجود همانی تقريبي كراندار در A ، موجود است.
مفهوم φ-ميانگين پذيري بسيار كلي تر از ميانگين پذيري چپ مي باشد. در واقع ميانگين پذيري چپ براي F جبرها همان ε ميانگين پذيري از نرم 1 است كه در فصل سوم به آن پرداخته مي شود. در اين فصل نيز شرايطي براي وجود φ-ميانگين از نرم 1 براي جبر باناخ A، مطرح شده (نتيجه 3.3، قضيه 4.3 و قضيه 9.3) و نشان داده مي شود كه اگر براي هر $f\in A^*$، تابعكي مانند m با نرم 1، موجود باشد كه $\langle m,\varphi\rangle=1$ و $\langle m,f.a\rangle=\varphi(a)\langle m,f\rangle$، براي هر $a\in A$، آنگاه A ، φ-ميانگين پذير از نرم 1 است. به عبارت ديگر، φ-ميانگين پذيري از نرم 1 ، يک خاصيت نقطه اي، نسبت به هر $f\in A^*$ است (قضيه 1.3 و گزاره 2.3). به همين ترتيب ادعا مي شود اين خاصيت نسبت به هر $a\in\ker\varphi$ نيز، نقطه اي است (قضيه 4.3).
در فصل چهارم با عنوان جبرهاي باناخ ضعيف دنباله اي كامل، مفهوم φ-ميانگين پذيري براي اين دسته از جبرهاي باناخ بررسي مي شود. دراين فصل ثابت مي شود جبر باناخ ضعيف دنباله اي كامل A ، كه در خود φ-ميانگين ندارد، اما داراي φ-ميانگين تقريبي كراندار دنباله اي است، دست كم 2^c ، φ-ميانگين دارد واگر A تفكيک پذير باشد آنگاه دقيقا 2^c، φ-ميانگين دارد (قضيه 4 2.1). پس از آن دو مثال از اين نوع جبرها مطرح مي كنيم كه در شرايط اين قضيه صدق مي كنند و نشان مي دهيم كه در گذشته نيز همين مطلب با شيوه اي متفاوت براي حالت خاصي از آن ها ثابت شده است. در بخش 4 2 از اين فصل ابتدا مفهوم φ- ميانگين دو طرفه و φ- ميانگين تقريبي كراندار دو طرفه را مطرح مي كنيم و همانند فصل دوم ثابت مي كنيم وجود آنها در يک جبر باناخ معادل است. پس از آن ثابت مي كنيم اگر اين جبر ها تفكيک پذير باشند، آنگاه φ- ميانگين پذيري آنها ايجاب مي كند كه داراي φ- ميانگين تقريبي كراندار دنباله اي باشند. در اين بخش همچنين به بررسي ارتباط بين φ- ميانگين پذيري جبرهاي باناخ ضعيف دنباله اي كامل و آرنز منظم بودن آنها مي پردازيم(قضيه4 7.2).
در فصل پنجم، ميانگين هاي پايا روي F جبرها بررسي مي شوند. در اين فصل نتيجه اي مشابه با قضيه 4 1.2، در قضيه 1.5، بدست مي آيد. اين قضيه نتيجه مي دهد كه اگر A يک F جبر تفكيک پذير بوده و ε همانی جبر ون نيومن A^* باشد، آنگاه A

داراي ۲^{c}، ε ميانگين است كه رابطه $\|m-n\|=$ ، بين آنها برقرار مي باشد.
در فصل ششم كه فصل پاياني است، ابتدا بطور مختصر در مورد تک عضوي مشخصه، $\{\varphi\}$ ، بحث شده و ارتباط آن را با $\varphi-$ ميانگين پذيري A ، بررسي مي كنيم. پس از آن به منظور روشن شدن بحث وانجام مقايسه مثالي از جبرهاي ليپ شيتس ارائه مي دهيم.

فصل اول
مفاهیم مقدماتي

در این پایان نامه فرض بر این شده است که خواننده با مفاهیم مقدماتی توپولوژی، آنالیز، جبر و نظریه اندازه آشنا می باشد. لذا در این فصل برخی از تعاریف، قضایا و نتایجی که در این پایان نامه کاربرد دارد، ارائه میشود. با توجه به اینکه اثبات بسیاری از این قضایا در کتب مربوطه آمده است، تنها به ذکر منابع اکتفا می کنیم.

1 1 آنالیز تابعي

تعریف 1.1 1. مجموعه J همراه با رابطه جزئامرتب $\leq$ را مجموعه جهتدار گوئیم هرگاه به ازای هر زوج α و β از اعضای J، عضوی از J مانند γ موجود باشد به طوری که $\alpha\leq\gamma$ و $\beta\leq\gamma$.

تعریف 1 2.1. زیر مجموعه K از J را در J هم پایان خوانیم هرگاه به ازای هر $\alpha\in J$ ، $\beta\in K$ موجود باشد که $\alpha\leq\beta$.

تعریف 1 3.1. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد.تابع f از مجموعه جهتدار J به X را یک تور می نامیم. اگر $\alpha\in J$ ، $f(\alpha)$ را با x_α نشان داده و تور f را با $(x_\alpha)_\alpha$ نمایش می دهیم.

قضیه 1 4.1 (هان باناخ). فرض کنیم X یک فضای برداری بوده، M زیر فضائی از X $p: X\to\mathbb{R}$ یک نیم نرم باشد. اگر $f: M\to\mathbb{C}$ یک تابعک خطی بوده، بطوریکه برای هر $x\in M$ داشته باشیم $|f(x)|\leq p(x)$ ، آنگاه یک تابعک خطی $F: X\to\mathbb{C}$ موجود است که برای هر $x\in M$، $F(x)=f(x)$ وبرای هر $x\in X$ ، داریم $|F(x)|\leq p(x)$.

اثبات. برای اثبات به [4] مراجعه شود.

تعریف1 5.1. فرض کنیم X یک فضای نرمدار و X^* دوگان آن باشد. ضعیفترین توپولوژی روی X را که هر $f\in X^*$ نسبت به آن پیوسته باشد، توپولوژی ضعیف روی X نامیده و آنرا با $\sigma(X,X^*)$ نشان می دهند.

قضیه1 6.1. فرض کنیم (x_n) دنباله ای در فضای نرمدار X باشد. در اینصورت $x_n\to 0$ (در توپولوژی ضعیف)، اگر وتنها اگر به ازای هر $f\in X^*$ داشته باشیم $f(x_n)\to 0$. بخصوص اگر دنباله (x_n) در توپولوژی نرمی همگرا به صفر باشد آنگاه در توپولوژی ضعیف نیز داریم $x_n\to 0$.

تعریف 1 7.1. فرض کنیم X یک فضای نرمدار باشد. میدانیم X^* یک فضای باناخ با نرم عملگری

$$\|f\|=\sup\{|f(x)|:\|x\|\leq 1\}$$

برای هر $f\in X^*$ می باشد. به همین صورت X^{**} نیز یک فضای باناخ است .حال نگاشت $J: X\to X^{**}$ را بصورت $J(x)=\hat{x}$ تعریف می کنیم که در آن $\hat{x}\in X^{**}$ بوده و بصورت $\hat{x}(f)=f(x)$ تعریف می شود. به این نگاشت J ، نگاشت متعارف می گویند.

قضیه1 8.1. نگاشت J در تعریف فوق یک یکریختی طولپا از X به روی یک زیر فضای نرمدار از X^{**} (با نرم اکتسابی از X^{**}) است.

تعریف 1 9.1. فرض کنیم X یک فضای نرمدار و X^* دوگان آن باشد**.** ضعیفترین توپولوژی روی X^* را که در آن به ازای هر $x\in X$، $\hat{x}$ نسبت به آن پیوسته باشد توپولوژی ضعیف ستاره روی X^* نامیده وبا $\sigma(X^*,X)$ نشان می دهند.

قضیه1 10.1. فرض کنیم (f_n) دنباله ای در X^* باشد. در اینصورت $f_n\to f$ (در توپولوژی ضعیف ستاره)اگر وتنها اگر برای هر $x\in X$ داشته باشیم $f_n(x)\to f(x)$.

یکی از قضایای بسیار مهم آنالیز تابعی قضیه باناخ آلاقلو است. قضیه زیر از نتایج این قضیه است که تنها به بیان همین نتیجه می پردازیم.

قضیه1 11.1. فرض کنیم X یک فضای برداری نرمدار بوده وزیر مجموعه کراندار $U \subset X^*$ نسبت به توپولوژی نرمی بسته باشد. دراینصورت U ، $\sigma(X^*,X)$ فشرده است.

اثبات. برای اثبات به [4] مراجعه شود.

نتیجه 1 12.1. گوی یکه بسته فضای نرمدار X^* ، w^* فشرده است.

قضیه زیر به قضیه گلداشتاین معروف است.

قضیه1 13.1. فرض کنیم S، گوی یکه بسته فضای نرمدار X باشد. در اینصورت JS، w^*- چگال در S^{**} است، که S^{**} گوی یکه بسته X^{**} است.

نتیجه1 14.1. اگر X ، فضای برداری نرمدار باشد داریم، JX ، $\sigma(X^{**},X^*)$ چگال در X^{**} است.

تعریف 1 15.1. فرض کنیم (Y,d) یِک فضای متری و X یک فضای توپولوژیک باشد. عضوی مانند f از Y^X و $\varepsilon > 0$ را در نظرمی گیریم. فرض کنیم $B(f,\varepsilon)$ مجموعه همه اعضائی مانند g از Y^X باشد که به ازای آنها

$$\sup\{d(f(x),g(x)); x\in X\} < \varepsilon$$

مجموعه های $B(f,\varepsilon)$ تشکیل پایه ای برای یک توپولوژی بر Y^X می دهند.این توپولوژی را توپولوژی همگرائی یکنواخت می نامند.

قضیه 1 16.1. توری از توابع مانند $f_\alpha : X \to Y$ در توپولوژی همگرائی یکنواخت به تابع f همگراست اگر و تنها اگر f_α همگرای یکنواخت به f باشد.بعبارت دیگر برای هر $\varepsilon > 0$ داشته باشیم

$$\sup\{d(f_\alpha(x), f(x)) : x\in X\} < \varepsilon$$

تعریف 1 17.1. فرض کنیم (Y,d) یِک فضای متری و X یک فضای توپولوژیک باشد. عضوی مانند f از Y^X ، زیر مجموعه فشرده ای مانند C از X و $\varepsilon > 0$ را در نظر می گیریم. فرض کنیم $B_C(f,\varepsilon)$ مجموعه همه اعضائی مانند g از Y^X باشد که به ازای آنها

$$\sup\{d(g(x), f(x)) : x\in C\} < \varepsilon$$

مجموعه های $B_C(f,\varepsilon)$ تشکیل پایه ای برای یک توپولوژی بر Y^X می دهند. این توپولوژی را توپولوژی همگرائی یکنواخت روی زیر مجموعه های فشرده می نامند.

قضیه 1 18.1. توری از توابع مانند $f_\alpha : X \to Y$ در توپولوژی همگرائی یکنواخت روی زیر مجموعه های فشرده به تابع f همگراست اگر و تنها اگر به ازای زیر مجموعه فشرده X مانند C، $f_\alpha |_C$ همگرای یکنواخت به $f|_C$ باشد.

قضیه 1 19.1. فرض کنیم (Y,d) یک فضای متری و X یک فضای دلخواه باشد.در اینصورت رابطه زیر برای توپولوژیهای موجود روی Y^X موجود است.

(همگرائی یکنواخت) $\subset$ (همگرائی یکنواخت روی زیر مجموعه های فشرده).

اگر X فشرده باشد این دو توپولوژی با هم یکی می شوند.

تعریف1 20.1. فرض کنیم H یک فضای هیلبرت باشد. توپولوژی عملگر ضعیف، ضعیفترین توپولوژی روی $B(H)$ (مجموعه عملگر های کراندار روی H)است، بطوریکه تابعکی که عملگر T را به $<Tx , y>$ می برد برای هر $x , y \in H$، پیوسته باشد.

قضیه 1 21.1. تور $(T_\alpha) \subset \mathrm{B}(H)$ ، از عملگر های کراندار روی H،تحت توپولوژی عملگر ضعیف، به $T\in B(H)$ همگراست اگر برای هر $x,y\in H$ ،

$$\langle T_\alpha x , y \rangle \to \langle Tx , y \rangle$$

قضیه 1 22.1(نگاشت باز). فرض کنیم فضای خطی X کامل بوده و $T \in L(X,Y)$، بطوریکه برد T از رسته دوم باشد.آنگاه T باز و در نتیجه پوشاست.

اثبات. برای اثبات به[4] مراجعه شود.

تعریف1 23.1. فرض کنیم X یک فضای برداری با توپولوژی τ باشد. τ را موضعا محدب گوییم هرگاه دارای یک پایه همسایگی شامل مجموعه های محدب در صفر باشد.

دو قضیه زیر از [7] برگرفته شده اند.

قضیه1 24.1 . اگر$\{E_\alpha : \alpha \in A\}$ یک خانواده از فضاهای موضعاً محدب بوده و $E=\prod_{\alpha\epsilon A} E_\alpha$، آنگاه

$$\sigma(E, E^*) = \prod_{\alpha\in A} \sigma(\, E_\alpha, E_\alpha^* \;)$$

قضیه1 25.1 . فرض کنیم E یک فضای برداری با توپولوژی موضعاً محدب τ باشد. در اینصورت τ- بستار و ضعیف بستار هر مجموعه محدب یکی هستند.

قضیه 1 26.1(فراکو – کاکوتانی) . فرض کنیم K یک زیر مجموعه محدب و فشرده از یک فضای برداری توپولوژیکی و $\mathcal{F}$ یک خانواده جابجایی از نگاشتهای پیوسته خطی از K به K باشد. در این صورت $p\in K$ موجود است که $Tp = p$ برای هر $T \in \mathcal{F}$.

اثبات. برای اثبات به[7]مراجعه شود.

تعریف 1 27.1. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیکی و Υ خانواده ای از زیرمجموعه های باز نا تهی X باشد.برای $p\in X$، اگر $p\in V$ برای هر $V\in \Upsilon$،آنگاه Υ ، یک پایه موضعی برای p نامیده میشود.داریم

$$\varkappa(p,X) = \min\{|\Upsilon| : \Upsilon \text{ یک پایه موضعی برای } p \text{ است}\}$$

قضیه 1 28.1. فرض کنیم X یک فضای فشرده باشد بطوریکه $\varkappa(p,X) \geq k$، برای هر $p \in X$. در اینصورت $|X| \geq 2^k$.

اثبات. برای اثبات به [14]مراجعه شود.

قضیه 1 29.1. فرض کنیم مجموعه M، شامل یک زیر مجموعه شمارای چگال باشد. در اینصورت $|M|\leq 2^c$.

اثبات. برای اثبات به [14]مراجعه شود.

تعریف 1 30.1. توپولوژی عملگر قوی روی $B(H)$، ضعیفترین توپولوژی روی $B(H)$است، بطوریکه نگاشتی که عملگر T را به $\|Tx\|$ می برد برای هر $x\in H$ ، پیوسته باشد. بعبارت دیگر هرگاه $T_\alpha x \to Tx$ ، برای هر $x\in H$، آنگاه گوئیم $T_\alpha \to T$ در توپولوژی عملگر قوی.

نکته . توپولوژی عملگر قوی روی $B(H)$، همان توپولوژی ضعیف ستاره روی $B(H)$ می باشد.

گزاره 1 31.1. فرض کنیم X یک زیر فضای خطی چگال از یک فضای خطی نرمدار M بوده و Y یک فضای باناخ باشد. اگر $T: X \to Y$ ، خطی و پیوسته باشد، آنگاه T دارای یک توسیع یکتای خطی و پیوسته از M به Y می باشد بطوریکه نرم آن برابر نرم T است.

اثبات. برای اثبات به [4]مراجعه شود.

قضیه 1 32.1. فرض کنیم X یک فضای موضعا محدب و I زیر فضایی از آن باشد.در اینصورت X/I یک فضای موضعا محدب است ویک نگاشت خطی یک به یک و پوشا از $(X/I)^*$ به $I^\perp$ وجود دارد. اگر $(X/I)^*$، به توپولوژی ضعیف ستاره و $I^\perp$ نیز به توپولوژی ضعیف ستاره نسبی مجهز باشند ، این نگاشت یک به یک و پوشا به یک همانریختی تبدیل می شود.اگر X نرمدار باشد، آنگاه $(X/I)^*$و $I^\perp$، ایزو متر هستند و می نویسیم $(X/I)^*=I^\perp$.

اثبات. برای اثبات به[4] مراجعه شود.

1 2 جبر باناخ

تعریف ~~1~~ 1.2. فرض کنیم A یک جبر نرمدار روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. همانی تقریبی کراندار برای A یک تورکراندار (e_λ)در A است بقسمی که برای هر $x\in A$

$$e_\lambda x \rightarrow x$$

(همانی تقریبی راست نیز به همین صورت و با عوض کردن $e_\lambda x$ با xe_λ تعریف می شود.)همانی تقریبی دوطرفه، یک تور است که هم همانی تقریبی چپ و هم همانی تقریبی راست باشد.

گزاره~~1~~ 2.2. فرض کنیم جبر باناخ A شامل یک مجموعه کراندار U باشد بطوریکه، برای هر$x\in A$ و $\varepsilon>0$ ، $u\in U$ موجود باشد با این خاصیت که $\|x-ux\|<\varepsilon$. در اینصورت A یک همانی تقریبی کراندار دارد.

اثبات. برای اثبات به[2] مراجعه شود.

قضیه~~1~~ 3.2. فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد.در اینصورت A دارای همانی تقریبی راست کراندار است اگر و تنها اگر A^{**} ، همانی راست داشته باشد.

اثبات. برای اثبات به[8] مراجعه شود.

تعریف ~~1~~ 4.2. همانی تقریبی چپ ضعیف برای A ، یک تور $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ در A است بقسمی که

$$f(e_\lambda x) \rightarrow f(x) \qquad (x\in A,\ f\in A^*)$$

همانی تقریبی راست ضعیف، همانی تقریبی ضعیف و همانی های تقریبی کراندار ضعیف نیز به همین صورت تعریف می شوند.

گزاره~~1~~ 5.2. فرض کنیم جبر باناخ A دارای یک همانی تقریبی چپ ضعیف کراندار باشد. در اینصورت A یک همانی تقریبی چپ کراندار دارد.

اثبات. برای اثبات به[2] مراجعه شود.

قضیه~~1~~ 6.۲. فرض کنیمA یک جبر نرمدار بوده و I یک ایده آل دو طرفه بسته در A باشد. اگر I یک همانی تقریبی چپ کراندار داشته باشد و اگر A/I نیز یک همانی تقریبی چپ (کراندار) داشته باشد، آنگاه A یک همانی تقریبی چپ (کراندار) دارد.

اثبات. برای اثبات به[8] مراجعه شود.

نتیجه ~~1~~ 7.۲. فرض کنیم A یک جبر نرمدار بوده و f، یک تابعک خطی روی A باشد.دراینصورت اگرایده آل $\ker f$ همانی تقریبی چپ کراندار داشته باشد، آنگاه A دارای یک همانی تقریبی چپ کراندار است.

تعریف ~~1~~ 8.2. فرض کنیم A یک جبر باناخ بوده و X یک A- مدول چپ باناخ باشد. در اینصورت زیر فضای خطی بسته X تولید شده بوسیله

$$AX=\{ax : a\in A, x\in X\}$$

قسمت اساسی X نامیده شده و با X_e نمایش داده می شود.اگر $X=X_e$ ، آنگاه گوئیم X یک A- مدول باناخ چپ اساسی است.

گزاره 1 9.2. فرض کنیم A یک جبر باناخ بوده و $(e_\lambda)_\lambda$ همانی تقریبی چپ کراندار آن باشد. همچنین فرض کنیم X یک A- مدول چپ باناخ باشد.در اینصورت

$$X_e=\overline{AX}=\{x\in X : \lim e_\lambda x=x\}$$

اثبات. برای اثبات به[8] مراجعه شود.

قضیه 1 10.2(تجزیه کوهن). فرض کنیم A یک جبر باناخ دارای یک همانی تقریبی چپ کراندار با کران $k\geq 1$ بوده و فرض کنیم X یک A- مدول چپ باناخ باشد. در این صورت برای هر $z\in X_e$ و $\delta>0$، عناصر $a\in A$ و $y\in X$ موجودند، بطوریکه

(الف) $z=ay$.

(ب) $\|a\|\leq k$.

(ج) $y\in\overline{Az}$.

(د) $\|y-z\|<\delta$.

بعبارت دیگر، $X_e=AX$.

اثبات. برای اثبات به[8] مراجعه شود.

در این قسمت به بیان تعاریف و بعضی از ویژگیهای C^* جبرها، جبرهای ون نیومن، جبرهای فوریه و F جبرها می پردازیم. ابتدا با تعریف *- جبر آغاز می کنیم.

تعریف 1 11.2. جبر A را *- جبر گوئیم، هرگاه یک نگاشت $*:A\to A$ روی آن موجود باشد بطوریکه برای هر $x\in A$،این نگاشت بصورت $x\mapsto x^*$ بوده و در شرایط زیر صدق می کند :

(الف) برای هر $x,y\in A$، $(x+y)^*=x^*+y^*$

(ب) برای هر $x\in A$، $(x^*)^*=x$ ،

(ج) در صورتی که $1\in A$،آنگاه $1^*=1$،

(د) برای هر $x,y\in A$، $(xy)^*=y^*x^*$.

(ه) برای هر $x\in A$ و $\lambda\in\mathbb{F}$، $(\lambda x)^*=\bar{\lambda}x^*$.

نگاشت * را برگشت می نامیم.

C^* – جبرها

تعریف 1 .12.۲ * جبر باناخ A را C^* – جبر نامیم هرگاه برای هر $x \in A$، داشته باشیم

$$\|x^* x\| = \|x\|^2 .$$

مثال 1 .13.۲ فرض کنیم H یک فضای هیلبرت و $T \in B(H)$ باشد. در اینصورت T^* بیان گر عنصر یکتائی از $B(H)$ است، بطوریکه

$$(Tx , y) = (x , T^*y)$$

برای هر $x , y \in H$. به سادگی می توان دید که $T \to T^*$ یک برگشت روی $B(H)$ است. همچنین داریم

$$\|Tx\|^2 = (Tx , Tx) = (T^*Tx , x) \leq \|T^*T\| \, \|x\|^2 \; (x \in H)$$

که این نتیجه می دهد

$$\|T\|^2 \leq \|T^* T\|$$

و بنابراین

$$\|T^* T\| = \|T\|^2$$

تعریف 1 .14.2 عضو $x \in A$ را خود الحاق نسبت به * گوئیم هرگاه $x^* = x$.

تعریف 1 .15.۲ فرض کنیم f یک *تابعک خطی روی* C^* – جبر A باشد. برای هر $x \in A$ تعریف می کنیم $f^*(x) = \overline{f(x^*)}$. در اینصورت f^* نیز یک تابعک خطی روی A می باشد. f^* را الحاقی f نامیده و اگر $f^* = f$ ، آنگاه f را خود الحاق گویند.

تعریف 1 .16.۲ تابعک خطی φ روی C^* جبر A را مثبت گوییم هرگاه $\varphi(x^* x) \geq 0$ برای هر $x \in A$.

خواص C^* – جبرها

در اینجا چند خاصیت از C^* جبر ها را که در این پایان نامه مورد استفاده قرار می گیرند بیان می کنیم. برای مطالعه بیشتر می توانید به[18] مراجعه کنید.

قضیه 1 17.۲. هر C^*-جبر A یک همانی تقریبی دارد. در حقیقت ، یک خانواده $\{e_\lambda\}_{\lambda\in I}$ از عناصر خود الحاق A وجود دارد که $xe_\lambda \to x$ و به همین ترتیب $e_\lambda x \to x$.

قضیه 1 18.۲. هر C^* جبر B یک همانی تقریبی کراندار دارد که کران بالای آن دارای نرم 1 است.

نکته 1 19.2. مجموعه عناصر خود الحاق C^* جبر A ساختار یک فضای برداری جزئاً مرتب را دارند. این روابط معمولاً با $\le$ نمایش داده می شود. در این رابطه عضو خود الحاق x از A در $x \ge 0$ صدق می کند اگر و تنها اگر طیف x نامنفی باشد. دو عنصر خود الحاق x و y از A در شرط $x \ge y$ صدق می کنند اگر $x - y \ge 0$ باشد.

قضیه1 20.۲. فرض کنیم a عضوی از یک C^* جبر A، ε *همانی* A^* باشد، بطوریکه $\varepsilon(a)=\|a\|=1$. دراینصورت a مثبت است.

اثبات. به [5] مراجعه شود.

قضیه1 21.۲. فرض کنیم φ یک تابعک خطی مثبت روی C^* جبر یکدار A باشد. در اینصورت φ کراندار بوده و

$$\|\varphi\| = \varphi(1)$$

اثبات. به [18] مراجعه شود.

قضیه1 22.۲ . فرض کنیم φ یک تابعک خطی مثبت روی C^* جبر A بوده و (e_α) همانی تقریبی کراندار برای A باشد. آنگاه

$$\|\varphi\| = \lim_{\alpha} a(e_\alpha)$$

برای هر تابعک خطی مثبت a *روی* A *که* $\|a\| = 1$.

اثبات. برای اثبات به [5] مراجعه شود.

تعریف 1 23.۲. فرض کنیم f و g دو تابعک خطی مثبت روی C^* جبر A باشند.گوییم f عمود بر g است هرگاه $\|f-g\|=\|f\|+\|g\|$.

فضاهای $L^p(G)$ $(1\le p<\infty)$

تعریف 1 24.2. فضای توپولوژیکی X را موضعا فشرده گویند، هرگاه هر عضو $x\in X$، شامل یک همسایگی U بوده، بطوریکه $\overline{U}$ فشرده باشد.

تعریف 1 25.2. فرض کنیم مجموعه G ، یک گروه بوده و همچنین یک فضای توپولوژیکی باشد که در شرایط زیر صدق می کند:

(الف) نگاشت $(x,y)\to xy$ ، یک نگاشت پیوسته از $G\times G$ به G باشد.

(ب) نگاشت $x\to x^{-1}$ یک نگاشت پیوسته از G به G باشد.

در اینصورت G را گروه توپولوژیکی می نامند.

فرض کنیم G یک گروه توپولوژیکی موضعا" فشرده بوده و λ اندازه هار چپ روی G باشد. برای هر $1\leq p<\infty$ ، $L^p(G)$ فضای همه توابع λ- اندازه پذیر است که در شرط زیر صدق می کنند

$$\int_G |f(x)|^p\, d\lambda(x)<\infty.$$

نرم این فضا که بصورت

$$\|f\|_p=\left(\int_G |f(x)|^p\, d\lambda(x)\right)^{\frac{1}{p}}$$

تعریف می شود $L^p(G)$ را به یک فضای باناخ تبدیل می کند.

فضای $L^1(G)$ تحت ضرب پیچشی که بصورت

$$(f*g)(x)=\int_G f(y)g(y^{-1}x)\,d\lambda(y)$$

برای هر $f,g\in L^1(G)$ تعریف می شود، یک جبر باناخ می باشد.

قضیه 1 26.۲. اگر G جابجایی باشد، $L^1(G)$ ، همراه با ضرب پیچشی یک جبر باناخ جابجائی است.

اثبات. برای اثبات به [10] مراجعه کنید.

قضیه 1 27.۲. فرض کنیم $1\leq p<\infty$ و $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. اگر $f\in L^p(G)$ و $\breve{g}\in L^q(G)$ بطوریکه

$$\breve{g}(x)=g(x^{-1})$$

در اینصورت حاصلضرب f و g که ضرب پیچشی f و g نامیده شده و بصورت

$$(f*g)(x)=\int_G f(y)g(y^{-1}x)\,d\lambda(y)$$

تعریف می شود، برای هر $x\in G$ ، موجود است و معرف تابعی در $C_\circ(G)$ است. هرگاه G فشرده باشد، $L^p(G)$ ، همراه با این ضرب، یک جبر باناخ است.

تعریف 1 28.۲. مجموعه همه همریختی های پیوسته از G به گروه دوری $\mathbb{T}$ را با $\hat{G}$ نشان می دهیم.

اثبات. برای اثبات به [10] مراجعه شود.

قضیه1 29.۲. اگر G جابجایی باشد، $\hat{G}$ همراه با ضرب نقطه به نقطه یِک گروه آبلی است. همانی این گروه تابع ثابت 1 است و $\bar{\chi} = \chi^{-1}$ برای هر $\chi \in \hat{G}$.

اثبات. برای اثبات به [10] مراجعه کنید.

تعریف 1 30.۲. فرض کنیم G یک گروه موضعاً فشرده وجابجایی بوده و $\gamma \in \hat{G}$. در این صورت

$$\hat{f}(\gamma) = \int_G f(s)\overline{\gamma(s)}ds$$

برای هر $f \in L^p(G)$ ، $1 \le p < \infty$ که در اینجا

$$\bar{\gamma}(s) = <\gamma, s^{-1}> .$$

$\hat{f}$ را انتقال فوریه f *می نامند.*

قضیه1 31.۲. فرض کنیم $f \in L^p(G)$، $p \ge 2$، در اینصورت بسط فوریه f، $\sum_{\eta\in\hat{G}} \hat{f}(\eta)\eta$ با نرم $L^p(G)$ به f همگراست. بعبارت دیگر $f = \sum_{\eta\in\hat{G}} \hat{f}(\eta)\eta$.

اثبات. برای اثبات به [6] مراجعه شود.

تعریف1 32.۲. فرض کنیم G یک گروه موضعا" فشرده باشد و $\lambda(G) < \infty$. اگر $\lambda(G) = 1$، λ را اندازه هار نرما ل شده گویند.

نکات زیر نیز در مورد $\hat{G}$ صادق هستند :

- $\hat{G}$ دوگان G می باشد و توپولوژی $\hat{G}$ ، توپولوژی همگرایی یکنواخت روی زیر مجموعه های فشرده G است.
- دو گان یک گروه فشرده، گسسته است و دو گان یک گروه گسسته فشرده است.

اثبات. برای اثبات به [10] مراجعه شود.

جبرهای ون نیومن

تعریف ~~1~~ ۳۳.۲. یک جبر ون – نیومن، یک $*-$ جبر، متشکل از عملگرهای کراندار روی یک فضای هیلبرت است که تحت توپولوژی عملگر ضعیف بسته بوده و شامل عملگر همانی می باشد. این جبرها توسط جان ون نیومن ارائه شدند.

مثال~~1~~ ۳۴.۲. فرض کنیم G یک گروه موضعاً فشرده با اندازه هار چپ λ باشد. در اینصورت دوگان $L^1(G)$، $L^\infty(G)$، یک جبر ون نیومن جابجایی است. این جبر ون نیومن متشکل از توابع اندازه پذیر اساساً کراندار روی G می باشد.

جبرهای فوریه

جبر باناخ دیگری را بنام $A_p(G)$ ،با توجه به گروه موضعاً فشرده G می توان به صورت زیر تعریف کرد :

فرض کنیم G یک گروه موضعا" فشرده بوده و$1 < p < \infty$. همچنین فرض کنیم fو g توابع مختلط مقدار روی G باشند و q، بصورتی باشد که $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. در اینصورت $A_p(G)$ ، فضای تولید شده توسط همه توابع مختلط مقدار u می باشد که u نه لزوما" بطور منحصر بفردی بصورت

$$u=\sum_{n=1}^{\infty} f_n * \breve{g}_n$$

تعریف می شود، بطوریکه $f_n, g_n \in C_{\infty}(G)$ ، $(n\in N^*)$و

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|f_n\|_p\|g_n\|_q<\infty.$$

برای هر u، $\|u\|_{A_p}$ بصورت

$$\|u\|_{A_p}=\inf\{\sum_{n=1}^{\infty}\|f_n\|_p\|g_n\|_q \text{ , } u \text{ برای هر نمایش}\}$$

تعریف می شود.

$A_p(G)$ یک جبر باناخ است. اگر $f\in L^p(G)$ و $g\in L^q(G)$ آنگاه $f*\breve{g}\in C_\circ(G)$ و داریم $\|f*\breve{g}\|\le\|f\|_p\|g\|_q$.بنابراین $A_p(G)\subset C_\circ(G)$ [17] و برای هر $u\in A_p(G)$ داریم

$$\|u\|\le\|u\|_{A_p}$$

ایمارد [9] این جبر های باناخ را برای حالت $p=2$ بررسی کرد. در این حالت این جبر باناخ، جبر فوریه نامیده شده و با $A(G)$ نمایش داده می شود.در واقع $A(G)$ تشکیل شده است از همه توابع پیوسته f روی G به فرم $\bar{k} * \breve{h}$ ، بطوریکه

$$\breve{h}(x) = h(x^{-1}) \quad , \quad \bar{k}(x) = \overline{k(x)} \quad , \quad k, h \in L^2(G).$$

تعریف 1 .35.۲ فرض کنیم $VN(G)$ جبر ون – نیومن تولید شده بوسیله نمایش منظم چپ G ، یا به عبارتی بستار عملگرهای $\{\rho(f);\ f \in L^1(G)\}$ ، روی $L^2(G)$ ، که

$$\rho(f)(h) = f * h$$

برای $h \in L^2(G)$ ، در $B(L^2(G))$ ، نسبت به توپولوژی عملگر ضعیف باشد. در این صورت هر $\varphi = \bar{k} * \breve{h}$ در $A(G)$ را می توان به عنوان یک تابعک خطی روی $VN(G)$ در نظر گرفت که بصورت

$$\varphi(T) = < Th, k >$$

برای هر $T \in VN(G)$، تعریف می شود. ایمارد[9] ثابت کرد که هر تابعک خطی پیوسته روی $VN(G)$ به این صورت است. در نهایت ثابت شد که $A(G)$ پیش دوگان جبر $VN(G)$ می باشد. بنا براین، طبق آنچه در آنالیز تابعی بیان شده،نرم $A(G)$ با

$$\|\varphi\| = \sup\{|\ \varphi(x)\ |:\ x \in VN\ (G), \|x\| \le 1\}$$

بدست می آید . با ضرب نقطه به نقطه و این نرم، $A(G)$ یک جبر باناخ جابجایی است.

مهمترین نقش $A(G)$ در دوگانگی اینست که $A(G)$ ، پیش دوگان جبر ون نیومن $VN(G)$ از نمایش منظم آن است.

دو جبر باناخ $L^1(G)$, $A(G)$ در مطالعه آنالیز هارمونیک روی گروههای موضعاً فشرده،از اهمیت بسیار زیادی برخوردار هستند .

فرض کنیم M یک جبر ون نیومن و M_* پیش دوگان آن باشد. اگر فرض کنیم V یک زیر فضای خود الحاق وپایا از M_* باشد(هرگاه $f \in V$ ، آنگاه برای هر a∈A، $(f^*, L_a f, R_a f \in V)$ ، آنگاه $\sigma(M,V)$ تشکیل یک توپولوژی هاسدرف و موضعا فشرده روی M می دهد [18].

قضیه1 36.۲ (چگالی کاپلانسکی). فرض کنیم A زیرجبر خود الحاق از جبر ون نیومن M بوده بطوریکه $\sigma(M,V)$–چگال در M باشد. در اینصورت $A \cap S$ تحت توپولوژی عملگر قوی، در S چگال می باشد، که S گوی یکه بسته A است.