دانشگاه حکیم سبزواری

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض
گرایش آنالیز

اشتقاق ها روی جبر عملگرها در C^* - مدول های هیلبرت

استاد راهنما

دکتر طیبه لعل شاطری

استاد مشاور

دکتر علی اکبر عارفی جمال

نگارش:

سید علیرضا موسوی مقدم قله زو

تابستان ۱۳۹۲

تأییدیه‌ی هیأت داوران جلسه‌ی دفاع از پایان‌نامه

نام دانشکده: دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر
نام دانشجو: سید علیرضا موسوی مقدم قله زو
عنوان پایان‌نامه: اشتقاق ها روی جبر عملگرها در C^* - مدول های هیلبرت
تاریخ دفاع: تابستان ۱۳۹۲
رشته: ریاضی محض
گرایش: آنالیز

ردیف	سمت	نام و نام خانوادگی	مرتبه دانشگاهی	دانشگاه یا مؤسسه	امضـــــــــا
۱	استاد راهنما	دکتر طیبه لعل شاطری	استادیار	دانشگاه حکیم سبزواری	
۲	استاد مشاور	دکتر علی اکبر عارفی جمال	دانشیار	دانشگاه حکیم سبزواری	
۴	استاد مدعو داخلی	دکتر قدیر صادقی	استادیار	دانشگاه حکیم سبزواری	

تأییدیه‌ی صحت و اصالت نتایج

باسمه تعالی

اینجانب سید علیرضا موسوی مقدم قله زو به شماره دانشجویی ۹۰۲۳۱۲۲۰۲۴ دانشجوی رشته ریاضی محض مقطع تحصیلی کارشناسی ارشد تأیید می‌نمایم که کلیه‌ی نتایج این پایان‌نامه حاصل کار اینجانب و بدون هرگونه دخل و تصرف است و موارد نسخه‌برداری‌شده از آثار دیگران را با ذکر کامل مشخصات منبع ذکر کرده‌ام. درصورت اثبات خلاف مندرجات فوق، به تشخیص دانشگاه مطابق با ضوابط و مقررات حاکم (قانون حمایت از حقوق مؤلفان و مصنفان و قانون ترجمه و تکثیر کتب و نشریات و آثار صوتی، ضوابط و مقررات آموزشی، پژوهشی و انضباطی ...) با اینجانب رفتار خواهد شد و حق هرگونه اعتراض درخصوص احقاق حقوق مکتسب و تشخیص و تعیین تخلف و مجازات را از خویش سلب می‌نمایم. در ضمن، مسؤولیت هرگونه پاسخگویی به اشخاص اعم از حقیقی و حقوقی و مراجع ذی‌صلاح (اعم از اداری و قضایی) به عهده‌ی اینجانب خواهد بود و دانشگاه هیچ‌گونه مسؤولیتی در این خصوص نخواهد داشت.

نام و نام خانوادگی: سید علیرضا موسوی مقدم قله زو
تاریخ و امضا:

مجوز بهره‌برداری از پایان‌نامه

بهره‌برداری از این پایان‌نامه در چهارچوب مقررات کتابخانه و با توجه به محدودیتی که توسط استاد راهنما به شرح زیر تعیین می‌شود، بلامانع است:

☐ بهره‌برداری از این پایان‌نامه برای همگان بلامانع است.

☐ بهره‌برداری از این پایان‌نامه با اخذ مجوز از استاد راهنما، بلامانع است.

☐ بهره‌برداری از این پایان‌نامه تا تاریخ .... ممنوع است.

استاد راهنما: دکتر طیبه لعل شاطری

تاریخ:

امضا:

تقدیم به:

پدر و مادرم

و

همسرم

قدردانی

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، خانم دکتر شاطری، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر عارفی جمال که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

همچنین لازم می‌دانم از پدید آورندگان بسته زی‌پرشین، مخصوصاً جناب آقای وفا خلیقی، که این پایان‌نامه با استفاده از این بسته، آماده شده است و همه دوستانمان در گروه پارسی‌لاتک کمال قدردانی را داشته باشم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از همسر مهربانم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودش، که بهترین پشتیبان من بود.

سید علیرضا موسوی مقدم قله زو

تابستان ۱۳۹۲

چکیده

فرض کنید E یک C^*-مدول هیلبرت پر روی C^*-جبر $\mathcal{A}$ و $End^*_{\mathcal{A}}(E)$ جبر عملگرهای الحاق پذیر روی E باشد. نشان می دهیم اگر $\mathcal{A}$ جابجایی و یکدار باشد آن گاه هر اشتقاق روی $End^*_{\mathcal{A}}(E)$ یک اشتقاق درونی است و اگر $\mathcal{A}$ جابجایی و دارای یکه تقریبی شمارا باشد آن گاه درونی بودن اشتقاق ها روی مجموعه عملگرهای فشرده درونی بودن اشتقاق ها روی $End^*_{\mathcal{A}}(E)$ را نتیجه می دهد. هم چنین ثابت می کنیم اگر $\mathcal{A}$ یکدار باشد به طوری که هر اشتقاق روی $\mathcal{A}$ درونی است، آن گاه هر اشتقاق از $End^*_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}_n(\mathcal{A}))$ نیز درونی است که $\mathcal{L}_n(\mathcal{A})$ جمع n کپی از $\mathcal{A}$ را نشان می دهد. علاوه بر این در حالتی که $\mathcal{A}$ یکدار و جابجایی است و $x_\circ, y_\circ \in E$ وجود دارند به طوری که $\langle x_\circ, y_\circ \rangle = ۱$، همریختی های $\mathcal{A}$-مدولی خطی روی $End^*_{\mathcal{A}}(E)$ را که روی حاصلضرب های صفر عناصر مانند اشتقاق ها عمل می کنند بررسی می کنیم.

واژگان کلیدی: اشتقاق، اشتقاق درونی، C^* -جبر، W^*-جبر، C^* -مدول هیلبرت.

فهرست مطالب

پیش گفتار

یکی از جالب ترین مسائل در نظریه اشتقاق ها به دست آوردن جبرهایی است که همه اشتقاق ها در آن جبرها درونی اند. اولین نتیجه توسط کاپلانسکی[۱] در سال ۱۹۵۳ به دست آمد، به این صورت که هر اشتقاق روی یک W^* -جبر از نوع اول درونی است که نتیجه کامل تری از آن برای W^*-جبرها را ساکایی[۲] در سال ۱۹۶۶ ثابت کرد. در همین سال کادیسون[۳] نشان داد هر اشتقاق از یک C^*-جبر A روی یک فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ به صورت $a \longrightarrow ta - at$ است که t یک عملگر خطی کراندار روی $\mathcal{H}$است. مسائل مشابه برای جبرهای عملگری غیر خود الحاق توسط ریاضیدانان دیگری نیز بررسی شده است به ویژه کریستنسن[۴] در سال ۱۹۷۷ ثابت کرد هر اشتقاق از یک جبر تور داخلی است که در سال ۱۹۹۳ این نتیجه توسط هان[5] به جبر های تور روی فضاهای باناخ تعمیم داده شد.

دراین پایان نامه درونی بودن اشتقاق ها روی جبر عملگرها در C^*-مدول های هیلبرت بررسی می شود. C^* -مدول های هیلبرت اولین بار توسط کاپلانسکی در سال ۱۹۵۳ معرفی شد.

این پایان نامه شامل سه فصل است که فصل اول شامل چهار بخش می باشد. در بخش اول جبرهای باناخ ، C^*-جبرها را معرفی می کنیم. در بخش دوم فضاهای هیلبرت و در بخش سوم W^*-جبرها را معرفی و قضایای مورد نیاز در فصل های بعد را ارائه می دهیم. در بخش چهارم C^*-مدول های هیلبرت را مورد بررسی قرار می دهیم و بعضی از خواص آن ها را مورد مطالعه قرار می دهیم.

فصل دوم شامل سه بخش است. در بخش اول اشتقاق ها و اشتقاق های درونی را تعریف و چند لم مورد نیاز در فصل بعد را ارائه می دهیم. در بخش دوم اشتقاق ها روی بعضی جبرهای

---

[۱] Kaplansky
[۲] Sakai
[۳] Kadison
[۴] Christensen
[5] Han

عملگری را مورد بررسی قرار می دهیم. سپس در بخش سوم چند اشتقاق در جبر ماتریس های $n \times n$ معرفی می کنیم که در فصل بعد مورد نیاز است.

فصل سوم شامل دو بخش است. در بخش اول بعضی خواص اشتقاق ها روی C^*-مدول های هیلبرت را بررسی می کنیم و در بخش دوم اشتقاق های درونی روی جبر عملگرها را در C^*-مدول های هیلبرت را مورد مطالعه قرار می دهیم. این پایان نامه برگرفته از مقالات زیر است:

1. Jing, W., Lu, S., Li, P. Characterisations of derivation on some operator algebras. *Bull. Austral. Math. Soc.* 66 (2002), 227–232.

2. Li, P., Han, D., Tang, W. Derivations on the algebra of operators in Hilbert C^*-modules. *Acta. Math. Sin.* 28 (2012), 1615–1622.

فصل ۱

پیش نیازها

در این فصل ابتدا تعاریف مورد نیاز برای ورود به بحث اشتقاق ها روی جبر عملگر ها در C^* - مدول های هیلبرت را مورد مطالعه قرار می دهیم سپس گزاره ها و لم هایی را بررسی می کنیم که برای اثبات قضایا در فصل بعد لازم اند.

۱-۱ جبرهای باناخ، C^*-جبرها

در این بخش به معرفی جبرهای باناخ، C^* - جبرها و قضایای مورد نیاز می پردازیم.

تعریف ۱-۱-۱. فرض کنید X فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$($\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$) باشد، آن گاه نگاشت $\|.\| : X \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ یک نرم روی X نامیده می شود هر گاه به ازای هر $x, y \in X$ و $\alpha \in \mathbb{F}$ در شرایط زیر صدق کند

۱) $x = 0$ اگر و تنها اگر $\|x\| = 0$،

۲) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$،

۳) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

اگر $\|.\|$ یک نرم روی فضای برداری X باشد $(X, \|.\|)$ را فضای نرم دار [1] گویند.

[1] Normed space

فرض کنید $(X,\|.\|)$ یک فضای نرم دار باشد، اگر هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد در این صورت X را فضای باناخ [۲] گوییم.

مثال ۱-۱-۲. فضای $\mathbb{C}^k$ با نرم $\|x\| = (\sum_{i=1}^{k} |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$ که $x=(x_1,...,x_k)$ یک فضا ی باناخ است. هم چنین $\mathbb{C}^k$ با نرم $\|x\| = \max_{1\leq i\leq k} |x_i|$ که $x_i \in \mathbb{C}$ نیز فضایی باناخ است.

مثال ۱-۱-۳. فرض کنید X یک فضای نرم دار باشد و $B(X)$ مجموعه همه نگاشت های خطی کراندار روی X را نشان دهد. در این صورت $B(X)$ با اعمال جمع و ضرب اسکالر و عمل ترکیب توابع به همراه نرم عملگری

$$\|T\| = sup\left\{\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : 0 \neq x \in X\right\}$$

یک جبر باناخ است.

تعریف ۱-۱-۴. جبر $\mathcal{A}$ روی میدان $\mathbb{F}$ یک فضای برداری همراه با ضرب اسکالر و ضرب $\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A}; (a,b)\mapsto ab$ است به طوری که به ازای هر $a,b,c\in\mathcal{A}, \alpha\in\mathbb{F}$

۱) $a(b+c)=ab+ac$،

۲) $(a+b)c=ac+bc$،

۳) $\alpha(ab)=(\alpha a)b=a(\alpha b)$.

تعریف ۱-۱-۵. جبر $\mathcal{A}$ را یکدار نامیم هر گاه عنصری از $\mathcal{A}$ مانند e موجود باشد به طوری که به ازای هر $a\in\mathcal{A}$، $ae=ea=a$. در این صورت e را یکه می گوییم.

جبر $\mathcal{A}$ را نرم دار گوییم هر گاه یک نرم مانند $\|.\|$ روی $\mathcal{A}$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\| \quad (a,b\in\mathcal{A}).$$

[۲] Banach space

اگر جبر نرم دار $(\mathcal{A}, \|.\|)$ فضای باناخ باشد، آن گاه $\mathcal{A}$ را جبر باناخ [۳] گوییم.

مثال ۱-۱-۶. فرض کنیم X یک مجموعه باشد و مجموعه توابع مختلط کران دار روی X را با نماد $\ell^{\infty}(X)$ نشان دهیم، آن گاه $\ell^{\infty}(X)$ با اعمال جبری زیر به ازای هر $\alpha \in \mathbb{C}$ و $f, g \in \ell^{\infty}(X)$ یک جبر یکدار است.

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (fg)(x) = f(x)g(x), \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x),$$

هم چنین با نرم $\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in X} |f(x)|$، $\ell^{\infty}(X)$ یک جبر باناخ است.

تعریف ۱-۱-۷. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ باشد یک برگشت [۴] روی $\mathcal{A}$ یک نگاشت $a \longmapsto a^*$ ؛ $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ است به طوری که به ازای هر $a, b \in \mathcal{A}$ و $\alpha \in \mathbb{C}$

۱) $(a^*)^* = a$،

۲) $(ab)^* = b^* a^*$،

۳) $(\alpha a + b)^* = \bar{\alpha} a^* + b^*$.

تعریف ۱-۱-۸. جبر $\mathcal{A}$ همراه با یک برگشت را یک $*$ -جبر گوییم.

تعریف ۱-۱-۹. زیر جبر B از $*$-جبر $\mathcal{A}$ را $*$-زیر جبر گوییم هرگاه $B^* = \{b^* : b \in B\} = B$

تعریف ۱-۱-۱۰. یک C^*- جبر [۵] یک جبر باناخ $\mathcal{A}$ همراه با یک برگشت است به طوری که به ازای هر $a \in \mathcal{A}$ ، $\|a\|^۲ = \|a^* a\|$.

تعریف ۱-۱-۱۱. اگر $\mathcal{A}$ در همه شرایط C^* -جبر بودن به غیر از شرط باناخ بودن صدق کند آن گاه $\mathcal{A}$ را یک پیش C^* -جبر [۶] گوییم.

[۳] Banach algebra
[۴] Involution
[۵] C^*-algebra
[۶] Pre C^*-algebra

مثال ۱-۱-۱۲. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک هاسدورف است. فضای توابع مختلط پیوسته روی X یعنی $C(X)$ یک C^*-جبر است که برگشت روی آن به صورت زیر تعریف می شود.

$$f^*(x) = \bar{f}(x) \quad (f \in C(X), x \in X).$$

تعریف ۱-۱-۱۳. اگر $\mathcal{A}$ یك C^*-جبر غیر یکدار باشد و قرار دهیم $\mathcal{B} = \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}$ و به ازای هر $\alpha \in \mathbb{C}$ و $(a,\mu),(b,\lambda) \in \mathcal{B}$ تعریف کنیم

۱) $(a,\mu)+(b,\lambda) = (a+b, \mu+\lambda)$،

۲) $\alpha(a,\mu) = (\alpha a, \alpha\mu)$،

۳) $(a,\mu).(b,\lambda) = (ab + a\lambda + \mu b, \mu\lambda)$،

۴) $\|(a,\mu)\| = \|a\| + |\mu|$.

آن گاه $\mathcal{B}$ با اعمال بالا یك جبر باناخ یکدار با عنصر یکه $(۰,۱)$ است. در این صورت $\mathcal{B}$ را یکدار شده $\mathcal{A}$ گوییم. اگر $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B};\ a \mapsto (a,۰)$ تعریف کنیم آن گاه φ یك نگاشت نشاندن است. (φ خطی و یك به یك است و به ازای هر $a,b \in \mathcal{A}$، $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ و $\|\varphi(a)\| = \|a\|$) بنابراین $\mathcal{B}$ جبر باناخ یکدار است که $\mathcal{A}$ را به عنوان ایده آل شامل است.

ملاحظه ۱-۱-۱۴. *اگر C^*-جبر $\mathcal{A}$ را مطابق تعریف ۱-۱-۱۳ یکدار کنیم آن گاه با تعریف*

$$(a,\lambda)^* = (a^*, \bar{\lambda}) \quad (a \in \mathcal{A}, \lambda \in \mathbb{C})$$

*$\mathcal{B}$ یک *-جبر است اما همواره یك C^*-جبر نیست. زیرا اگر $\mathcal{A} = \mathbb{C}$ و $(a,\lambda) = (-۲,۱)$ آن گاه*

$$\|(a,\lambda)\|^۲ = (\|a\| + |\lambda|)^۲ = (۲+۱)^۲ = ۹$$

ولی

$$\|(a,\lambda)^*(a,\lambda)\| = \|(-۲,۱)(-۲,۱)\| = \|(۰,۱)\| = ۱$$

پس $\|(a,\lambda)^*(a,\lambda)\| \neq \|(a,\lambda)\|^۲$ *و نرم تعریف شده روی* $\mathcal{B}$ *در شرط* C^* *-جبر صدق نمی کند.*

تعریف ۱-۱-۱۵. فرض کنید $(\mathcal{A}, \|.\|)$ یک جبر نرم دار باشد، اگر $\{e_i\}_{i=۱}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ وجود داشته باشد به طوری که وقتی $i \longrightarrow \infty$ داشته باشیم

$$\|a - e_i a\| < \varepsilon, \quad \|a - a e_i\| < \varepsilon$$

در این صورت گوییم $\mathcal{A}$ دارای یکه تقریبی شماراست.

تعریف ۱-۱-۱۶. C^* -جبر $\mathcal{A}$ را σ -یکدار[۷] گوییم هر گاه دارای یک یکه تقریبی شمارا باشد.

گزاره ۱-۱-۱۷. *هر* C^* *- جبر یک یکه تقریبی دارد.*

برهان. برای اثبات به قضیه ۳.۱.۱ در [۱] مراجعه کنید. ■

۱-۲ فضای هیلبرت

در این بخش ابتدا به تعریف فضای ضرب داخلی، فضای هیلبرت، $\mathcal{A}$ -مدول سپس به تعریف $\mathcal{A}$ -مدول ضرب داخلی روی C^* -جبر $\mathcal{A}$ می پردازیم و با چند مثال این بخش را به پایان می بریم.

تعریف ۱-۲-۱. (فضای ضرب داخلی) فرض کنید H یک فضای برداری روی $\mathbb{C}$ همراه با نگاشت $\mathbb{C} \to H \times H$ که $(x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$ است به طوری که به ازای هر $x,y,z \in H$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ داریم

[۷] σ-unital

۱) $\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$،

۲) $\langle y,x\rangle=\overline{\langle x,y\rangle}$،

۳) $\langle \alpha x,y\rangle=\alpha\langle x,y\rangle$،

۴) $\langle x,x\rangle\geq ۰$.

در این صورت H را یک فضای نیم ضرب داخلی گوییم. واضح است اگر $x=۰$ آن گاه $\langle x,x\rangle=۰$ اما اگر عکس این رابطه نیز درست باشد آن گاه H یک فضای ضرب داخلی [۸] نامیده می شود.

تعریف ۱-۲-۲. در تعریف بالا اگر $\|x\|=|\langle x,x\rangle|^{\frac{۱}{۲}}$ تعریف کنیم، می توان دید که $(H,\|.\|)$ یک فضای نرم دار است. اگر فضای ضرب داخلی $(H,\langle .,.\rangle)$ با نرم تعریف شده یک فضای باناخ باشد آن را فضای هیلبرت [۹] گوییم.

مثال ۱-۲-۳. اگر روی $\mathbb{C}^k$ ضرب داخلی را به صورت $\langle x,y\rangle=\sum_{i=۱}^{k}x_i\bar{y}_i$ تعریف کنیم آن گاه $\mathbb{C}^k$ با نرم تعریف شده در ۱-۱-۲ یک فضای هیلبرت است.

تعریف ۱-۲-۴. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر روی $\mathbb{F}$ و M یک فضای برداری روی $\mathbb{F}$ است. M را یک $\mathcal{A}$ - مدول چپ [۱۰] گوییم هر گاه نگاشت $\mathcal{A}\times M\to M;(a,x)\mapsto ax$ وجود داشته باشد به طوری که

۱) $a(\alpha x+\beta y)=\alpha ax+\beta ay \quad (a\in\mathcal{A},x,y\in M,\alpha,\beta\in\mathbb{F})$

۲) $(\alpha a+\beta b)x=\alpha ax+\beta bx \quad (a,b\in\mathcal{A},x\in M,\alpha,\beta\in\mathbb{F})$

۳) $a_۱(a_۲x)=(a_۱a_۲)x \quad (a_۱,a_۲\in\mathcal{A},x\in M)$

به طور مشابه $\mathcal{A}$- مدول راست [۱۱] نیز تعریف می شود. M را $\mathcal{A}$ -مدول [۱۲] گوییم اگر M هم $\mathcal{A}$

[۸] Inner product space
[۹] Hilbert space
[۱۰] Left $\mathcal{A}$-module
[۱۱] Right $\mathcal{A}$-module
[۱۲] $\mathcal{A}$-module

-مدول چپ و هم $\mathcal{A}$ -مدول راست باشد و به ازای هر $a, b \in \mathcal{A}$ و $x \in M$، $(ax)b = a(xb)$.

تعریف ۱-۲-۵. فرض کنید H و K دو فضای هیلبرت باشند، نگاشت $T : H \longrightarrow K$ را کراندار گوییم هرگاه

$$\|T\| = sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : 0 \neq x \in H\right\} < \infty.$$

مجموعه همه نگاشت های خطی کراندار از H به K را با $B(H, K)$ نشان می دهیم. اگر $H = K$، آن گاه $B(H, K)$ را به اختصار با $B(H)$ نمایش می دهیم.

قضیه ۱-۲-۶. *فرض کنید H و K دو فضای هیلبرت باشند. اگر $T \in B(H, K)$، آن گاه نگاشت منحصر بفرد $T^* \in B(K, H)$ وجود دارد به طوری که*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \quad (x, y \in H).$$

T^* را الحاق T گوییم.

برهان. قضیه ۲.۳.۱ از مرجع [۱] را ببینید. ■

تعریف ۱-۲-۷. $P \in B(H)$ را تصویر گوییم هرگاه $P^2 = P = P^*$.

۱-۳ W^*-جبرها

فرض کنید H یک فضای هیلبرت باشد، در این بخش با تعریف توپولوژی قوی در $B(H)$، W^*-جبرها را معرفی کرده و قضایای مورد نیاز را ارائه می نماییم.

تعریف ۱-۳-۱. (توپولوژی قوی) فرض کنید H یک فضای هیلبرت باشد و $x \in H$. توپولوژی موضعا محدب تولید شده توسط خانواده نیم-نرم های

$$P_x : B(H) \longrightarrow \mathbb{R}^+ \quad ; T \longmapsto \|T(x)\|$$

توپولوژی قوی روی $B(H)$ نامیده می شود.

توجه کنید $\{T_\alpha\} \subseteq B(H)$ در توپولوژی قوی به $T \in B(H)$ همگراست هرگاه به ازای هر $x \in H$، $T(x) = lim_\alpha T_\alpha(x)$.

تعریف ۱-۳-۲. $*$-زیر جبری از $B(H)$ که با توپولوژی قوی بسته است را یک W^*-جبر (فون-نویمان جبر) گوییم.

مثال ۱-۳-۳. **(i)** $B(H)$ یک W^*-جبر روی H است.

(ii) فرض کنید ۱_H، نگاشت همانی روی H باشد، در این صورت $\mathbb{C}۱_H$ یک W^*-جبر است.

در ادامه قضیه هایی را که در فصل های بعد به آن ها ارجاع می دهیم بیان می کنیم.

قضیه ۱-۳-۴. *اگر M یک W^*-جبر غیر صفر باشد، آن گاه M یکدار است.*

برهان. قضیه ۴.۱.۷ از مرجع [۱] را ببینید. ■

ملاحظه ۱-۳-۵. *در مرجع [۲] یک W^*-جبر را دوگان یک فضای باناخ معرفی می کند یعنی M یک W^*-جبر است هرگاه فضایی باناخ مانند X موجود باشد به طوری که $M = X^*$. سپس نشان می دهد این دو تعریف معادلند.*

برای جزئیات بیشتر بخش ۱.۷ از مرجع [۲] را ببینید.

قضیه ۱-۳-۶. *فرض کنید M یک W^*-جبر باشد. در این صورت M بستار فضای خطی تولید شده توسط تصاویرش است.*

برهان. قضیه ۴.۱.۱۱ از مرجع [۱] را ببینید. ■

۱-۴ C^*-مدول های هیلبرت

در این بخش C^*-مدول هیلبرت را تعریف کرده چند مثال می آوریم سپس چند لم را معرفی می کنیم که در اثبات قضایا در فصل های بعدی به آن نیاز داریم.

تعریف ۱-۴-۱. فرض کنید که $\mathcal{A}$ یك C^*- جبر است که لزوما جابه جایی و یکدار نیست. یك $\mathcal{A}$ - مدول ضرب داخلی [۱۳] یا پیش $\mathcal{A}$ -مدول هیلبرت یک $\mathcal{A}$ - مدول چپ E همراه با ضرب اسکالر

$$\lambda(ax) = (\lambda a)x = a(\lambda x);\ (x \in E, a \in \mathcal{A}, \lambda \in \mathbb{C})$$

و نگاشت $E \times E \to \mathcal{A}$ با ضابطه $(x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$ است به طوری که به ازای هر $a \in \mathcal{A}$، $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ و $x,y,z \in E$ داریم

۱) $\langle \alpha x + \beta z, y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle + \beta\langle z,y\rangle$،

۲) $\langle ax, y\rangle = a\langle x,y\rangle$،

۳) $\langle y,x\rangle = \langle x,y\rangle^*$،

۴) $\langle x,x\rangle \geq 0, \langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

شرط اول نشان می دهد که ضرب داخلی در متغیر اول خطی است.

گزاره ۱-۴-۲. *ضرب داخلی تعریف شده در ۱-۴-۱ در متغیر دوم خطی مزدوج [۱۴] است.*

برهان. به ازای هر $x,y,z \in E, \alpha,\beta \in \mathbb{C}$ داریم

$$\begin{aligned}\langle y, \alpha x + \beta z\rangle &= \langle \alpha x + \beta z, y\rangle^* = (\alpha\langle x,y\rangle + \beta\langle z,y\rangle)^* \\ &= \langle x,y\rangle^*\bar{\alpha} + \langle z,y\rangle^*\bar{\beta} = \langle y,x\rangle\bar{\alpha} + \langle y,z\rangle\bar{\beta}.\end{aligned}$$

وهم چنین به ازای هر $x,y \in E, a \in \mathcal{A}$،

$$\langle x, ay\rangle = \langle ay, x\rangle^* = (a\langle y,x\rangle)^* = \langle y,x\rangle^* a^* = \langle x,y\rangle a^*.$$

■

[۱۳] Inner product $\mathcal{A}$-module
[۱۴] Conjugate-linear

گزاره ۱-۴-۳. (*نامساوی کوشی- شوارتز*): *فرض کنید E یک $\mathcal{A}$-مدول ضرب داخلی باشد و $x, y \in E$. در این صورت*

$$\langle y, x\rangle\langle x, y\rangle \leq \|\langle x, x\rangle\|\langle y, y\rangle.$$

برهان. به گزاره ۱.۱ در مرجع [۳] مراجعه کنید. ■

ملاحظه ۱-۴-۴. *برای $x \in E$ قرار می دهیم $\|x\| = \|\langle x, x\rangle\|^{\frac{1}{2}}$. از گزاره فوق نتیجه می شود $\|\langle x, y\rangle\| \leq \|x\|\|y\|$ و $\|.\|$ یک نرم روی $\mathcal{A}$-مدول ضرب داخلی E است.*

تعریف ۱-۴-۵. یک پیش $\mathcal{A}$ -مدول هیلبرت Eرا یک C^* -مدول هیلبرت[۱۵] روی C^* -جبر $\mathcal{A}$ گوییم اگر نسبت به نرم $\|x\| = \|\langle x, x\rangle\|^{\frac{1}{2}}$ تام باشد.

مثال ۱-۴-۶. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک C^*- جبر است در این صورت $\mathcal{A}$ با ضرب تعریف شده به صورت $\langle x, y\rangle = xy^*$، $x, y \in \mathcal{A}$ یک C^*- مدول هیلبرت است. چون نرم به دست آمده از ضرب داخلی همان نرم معمولی روی C^*-جبر $\mathcal{A}$ است.

جمع مستقیم n کپی مدول هیلبرت $\mathcal{A}$ را به صورت $\mathcal{L}_n(\mathcal{A})$ نمایش می دهیم در این صورت $\mathcal{L}_n(\mathcal{A})$ یک C^* -مدول هیلبرت می شود که ضرب داخلی در آن به صورت

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=۱}^{n}\langle x_i, y_i\rangle$$

تعریف می شود به طوری که $x = x_۱ \oplus \cdots \oplus x_n$ و $y = y_۱ \oplus \cdots \oplus y_n$ عناصر $\mathcal{L}_n(\mathcal{A})$ هستند.

تعریف ۱-۴-۷. فرض کنید F یک زیر مدول بسته از C^*-مدول هیلبرت E باشد. تعریف می کنیم

$$F^{\perp} = \{y \in E : \langle x, y\rangle = \circ, x \in F\}.$$

در این صورت $F^{\perp}$ یک زیر مدول بسته از E است.

[۱۵] C^*-module Hilbert