

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

بزاز پروردگارت امیدوار نباش.

امام علی (ع)

دانشگاه یزد

دانشکده ریاضی

گروه آمار

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
آمار

برآوردیابی در فرایندهای پواسون کسری

استاد راهنما: دکتر حمزه ترابی

استاد مشاور: دکتر امین شیروانی

پژوهش و نگارش: نرگس منتظری هدش

مهر ماه ۱۳۹۰

تقدیم به

همه کسانی که دلسوزانه در راه پیشرفت علمی کشور عزیزمان ایران تلاش می کنند.

سپاس بیکران خداوندی را که بی اراده و اذن او ما را توان انجام هیچ کاری نیست.

سپاس بیکران پدر بزرگوار و مادر مهربانم را که همه هستی ام هستند.

سپاس ویژه از استاد راهنمای عزیزم، دکتر حمزه ترابی که تلاش و سخت کوشی برای آموختن را از ایشان آموختم.

تشکر فراوان از استاد مشاور بزرگوارم دکتر امین شیروانی که با مشاوره های ارزنده خود، دقت پایان نامه را ارتقا بخشیده اند.

تشکر فراوان از دکتر علی اکبر جعفری و دکتر قاسم بریدلقمانی که زحمت مطالعه و داوری این پایان نامه را بر عهده داشته اند.

تشکر فراوان از کلیه اساتیدی که پیش از این مستخبره ساگردی در خدمتشان بوده ام: دکتر حجت اله ذاکر زاده، دکتر علی دولتی، دکتر عیسی محمودی و دکتر سید محسن میر حسینی.

تشکر فراوان از دکتر سید محمد شاقون، دکتر فرید مالک و دکتر محمد رضا هوشمند اصل که در این راه یاریم نموده اند.

تشکر خالصانه از خانواده مهربانم؛ خواهران و خواهرزاده های عزیزم و دو وجود کراتقدر، برادرم و همسر بزرگوارش که مایه امید و دلگرمی هرچه بیشتر من در راه تحصیل علم هستند.

چکیده

در حدود دو قرن، فرایند پواسون با ویژگی عدم حافظه برای توزیع نمایی متناظر به عنوان ساده‌ترین و یکی از مهم‌ترین مدل‌های تصادفی مورد استفاده قرار گرفته است در حالی که در دنیای پیرامون ما فرایندهای زیادی با حافظه بلند مدت (همچون شبکه ترافیک و دیگر سیستم‌های پیچیده) وجود دارند. بنابراین تعمیم فرایند پواسون به نحوی که این فرایندها را نیز شامل شود سودمند است. در این تعمیم، یک پارامتر $\alpha \in (0, 1]$ به عنوان توان کسری فرایند اضافه می‌شود. در این پایان‌نامه، تغییر حالت از فرایند پواسون معمولی به تعمیم کسری آن، یعنی فرایند پواسون کسری (fPp) بررسی و ارتباط fPp با توزیع‌های α -پایدار با حل یک معادله انتگرالی اثبات شده است. این رابطه ما را به الگوریتمی برای تولید fPp و کشف ویژگی‌های آن راهنمایی می‌کند. برآوردهای گشتاوری برای نرخ رشد μ و توان کسری α به دست آمده و نرمال مجانبی برآوردها نشان داده شده است و از آن برای ساختن فاصله‌های اطمینان متناظر استفاده می‌شود. سرانجام مشخصات این برآوردها با استفاده از داده‌های شبیه‌سازی آزمون شده است.

فهرست مطالب

۱	مفاهیم و تعاریف اولیه	۱
۲	تبدیل لاپلاس و تبدیل ملین	۱.۱
۴	توابع مورد نیاز	۲.۱
۴	تابع مولد گشتاور، مشخصه و مولد احتمال	۱.۲.۱
۶	تابع گاما، بتا و زتا	۲.۲.۱
۷	تابع علامت، نشانگر و پله‌ای هوی‌ساید	۳.۲.۱
۸	تابع دلتای دیراک و دلتای کرونکر	۴.۲.۱
۹	تابع میتگ-لفلر	۵.۲.۱
۱۱	قضایا و تعاریف مورد نیاز	۳.۱
۱۶	حسابان کسری	۴.۱
۱۷	مشتق کسری ریمان-لیوویل	۵.۱
۱۹	مشتق کسری کاپوتو	۶.۱
۲۰	معادلات دیفرانسیل کسری	۷.۱
۲۱	توزیع‌های α -پایدار	۸.۱
۲۳	توزیع‌های α^+ -پایدار	۱.۸.۱
۲۴	شبیه‌سازی توزیع‌های α^+ -پایدار	۲.۸.۱
۲۶	فرایند شمارشی و فرایند تجدید	۹.۱
۲۹	فرایند پواسون به عنوان یک فرایند تجدید	۱۰.۱

۳۵	تعمیم کسری فرایند پواسون	۲
۳۶	مقدمه	۱.۲
۳۷	فرایند پواسون کسری در مفهوم مشتق کسری ریمان-لیوویل	۲.۲
۴۳	فرایند پواسون کسری در مفهوم مشتق کسری کاپوتو	۳.۲
۴۵	فرایند پواسون کسری در مفهوم انتگرال کسری ریمان-لیوویل	۴.۲
۵۱	ویژگی‌های فرایند پواسون کسری	۳
۵۲	تابع مولد گشتاور فرایند پواسون کسری	۱.۳
۵۴	شبیه‌سازی فرایند پواسون کسری	۲.۳
۵۷	رفتار مجانبی توزیع نمایی کسری	۳.۳
۵۸	توزیع حدی n امین زمان انتظار کسری مقیاسی شده	۴.۳
۶۴	توزیع حدی پواسون کسری مقیاسی شده	۵.۳
۶۸	توقف بین فاصله‌ها	۶.۳
۷۰	نموی‌های وابسته و نایستا در فرایند پواسون کسری	۷.۳
۷۲	ساختار کوواریانس	۸.۳
۷۷	برآورد پارامترهای فرایند پواسون کسری	۴
۷۸	روش گشتاوری	۱.۴
۸۲	ویژگی نرمال مجانبی برآوردگرها	۲.۴
۸۸	مطالعات شبیه‌سازی	۳.۴
۹۱	الف برنامه‌های کامپیوتری	
۹۱	الف ۱. برنامه رسم نمودار تابع‌های چگالی α^+ -پایدار (۴۵.۱) و (۴۲.۱)	
۹۱	الف ۲. برنامه رسم نمودار تابع چگالی نمایی کسری (۲۹.۲)	
۹۲	الف ۳. برنامه رسم نمودار میانگین و واریانس فرایند پواسون کسری	
۹۳	الف ۴. برنامه شبیه‌سازی زمان انتظار کسری با استفاده از رابطه (۴۶.۱)	
۹۳	الف ۵. برنامه شبیه‌سازی فرایند پواسون کسری با استفاده از رابطه (۴۷.۱)	

- الف ۶. برنامه شبیه‌سازی توزیع حدی n امین زمان انتظار مقیاسی شده با استفاده از روابط
 ۹۳ (۶.۳) و (۱۲.۳) برای شکل ۴.۳
- الف ۷. برنامه رسم نمودار میله‌ای تعداد رخدادها در فواصل زمانی $(\frac{1}{30}, \frac{2}{30})$ ، $(\frac{1}{30}, 0)$ تا
 ۹۴ $(\frac{29}{30}, 1)$ به‌ازای مقادیر مختلف μ و $B = 30$ مربوط به شکل ۵.۳
- الف ۸. برنامه محاسبه نسبت فضاهای خالی $R(\alpha)$ برای $B = 30$ مربوط به شکل ۶.۳
 الف ۹. برنامه مدل‌بندی ساختار کوواریانس در fPp با استفاده از رگرسیون خطی ساده برای
 ۹۵ $t_2 = 300$ و $\mu = 1$ برای جدول (۱.۳) و نمودار (۱۰.۳)
- الف ۱۰. برنامه برآورد پارامترهای fPp و فواصل اطمینان متناظر آن‌ها با استفاده از رابطه‌های
 ۹۶ (۱۹.۴)، (۲۱.۴)، (۵۰.۴) و (۵۱.۴)
- ب واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی
 ۹۹
- پ واژه‌نامه‌ی انگلیسی به فارسی
 ۱۰۳

فهرست جدول‌ها

۱۰۳	برآورد پارامترهای مدل برازش داده شده $a + bt_1$ به ساختار کواریانس fPp برای $t_2 = 300$ ،
۷۴ $t_1 < t_2$ ، $\mu = 1$ و مقادیر مختلف α .
۱۰۴	مقادیر برآورد پارامترهای fPp و فواصل اطمینان متناظر برای $\alpha = 0.5$ و $\mu = 10, 100$
۸۹ به‌ازای مقادیر مختلف n .
۲۰۴	مقادیر برآورد پارامترهای fPp و فواصل اطمینان متناظر برای $\alpha = 0.8$ و $\mu = 10, 100$
۸۹ به‌ازای مقادیر مختلف n .

فهرست شکل‌ها

۱۰۱	نمودار توابع پله‌ای واحد $H(x)$ ، هوی‌ساید تتا $\theta(x)$ ، دلتای دیراک $\delta(x)$ و دلتای کرونکر، $\delta_{x,0}$
۹	برای $a = 0$
۲۰۱	منحنی مسیر انتگرال لوپ تابع میتگ-لفلر
۳۰۱	نمودار تابع چگالی α^+ -پایدار (۴۵۰۱) برای $\alpha = 0/1(0/1)0/9$
۱۰۲	نمودار تابع چگالی نمایی کسری (۲۹۰۲) به ازای $\alpha = 0/1(0/1)1$
۱۰۳	نمودار میانگین و واریانس fPp با $\mu = 1$
۲۰۳	نمودار مقایسه توزیع نمایی کسری (۶۰۳) (خط ممتد) با توزیع مجانبی نمایی کسری (۷۰۳) (خط چین)، برای $\mu = 1$ و $\alpha = 0/5$
۳۰۳	نمودار توزیع حدی n امین زمان انتظار مقیاسی شده از فرایند پواسون (۸۰۳) برای n های متفاوت.
۴۰۳	نمودار توزیع حدی n امین زمان انتظار مقیاسی شده (۱۲۰۳) برای $\alpha = 0/5$ و به ازای $n = 1, 3, 10, 30$
۵۰۳	نمودار میله‌ای تعداد رخدادها در فواصل زمانی $(0, 1/30)$ ، $(1/30, 2/30)$ تا $(29/30, 1)$ به ازای $\mu = 1$
۶۰۳	نمودار نسبت فضاهاى خالی $R(\alpha)$ برای $B = 30$
۷۰۳	نمودار ساختار وابستگی نموها (۱۹۰۳) برای fPp به ازای مقادیر مختلف α و $\mu = 1$
۸۰۳	نمودار توزیع نموهاى fPp به ازای $\alpha = 1, 0/8, 0/5$ و $\mu = 1$ برای بازه‌های زمانی $[0, 600]$ ، $[600, 1200]$ ، $[1200, 1800]$ و $[1800, 2400]$
۹۰۳	نمودار مقادیر برآورد شده ضریب رگرسیون b از جدول ۱۰۳ در برابر پارامتر α

۱۰.۳ نمودار مقادیر برآوردشده کواریانس fPP (۱۷.۳) (خط ممتد) و مقادیر برازش داده شده، (خط

چین) با مدل $a + bt_1$ برای $t_1 = 300, t_2 < t_1, \mu = 1$ و مقادیر مختلف α ۷۵

فهرست نمادها

صفحه	توضیح	نماد
۲	معرفی نماد جدید برای رابطه سمت چپ تساوی	$=:$
۲	تبدیل لاپلاس تابع f در نقطه s	$\mathcal{L}\{f; s\}$
۲	تبدیل لاپلاس تابع f در نقطه s	$\tilde{f}(s)$
۲	امید ریاضی	$E[.]$
۳	پیچش دو تابع f و g	$f * g$
۳	هم‌ارزی دو تابع f و g	$f \equiv g$
۳	تبدیل لاپلاس دو-طرفه تابع f در نقطه s	$\mathcal{B}\{f; s\}$
۳	تبدیل ملین تابع f در نقطه s	$\mathcal{M}\{f; s\}$
۴	تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی X	$M_X(.)$
۵	تابع مشخصه گشتاور متغیر تصادفی X	$\phi_X(.)$
۵	تابع مولد احتمال متغیر تصادفی X	$\varphi_X(.)$
۶	تابع گاما	$\Gamma(.)$
۶	تابع بتا	Beta(.,.)
۷	تابع زتا	$\zeta(.)$
۷	تابع علامت	sign(.)
۷	تابع نشانگر	$\mathbf{I}()$
۷	تابع پله‌ای هوی‌ساید یا تابع پله‌ای واحد	$H(.)$
۸	معرفی نماد جدید برای رابطه سمت راست تساوی	$:=$
۸	تابع دلتای دیراک	$\delta(.)$
۸	عکس تبدیل لاپلاس تابع f در نقطه x	$\mathcal{L}^{-1}\{f, x\}$

۹.....	تابع دلتای کرونکر	$\delta_{x,a}(\cdot)$
۱۰.....	تابع میتگ-لفلر یک پارامتری	$E_{\alpha}(\cdot)$
۱۱.....	تابع میتگ-لفلر دو پارامتری	$E_{\alpha,\beta}(\cdot)$
۱۱.....	تابع متمم خطا	$\text{Erfc}(\cdot)$
۱۱.....	مشتق مرتبه n ام تابع میتگ-لفلر	$E_{\alpha}^{(n)}(\cdot)$
۱۱.....	همگرایی در توزیع	\xrightarrow{d}
۱۵.....	توزیع نرمال d متغیره	$N_d(\cdot, \cdot)$
۱۸.....	انتگرال کسری ریمان-لیوویل	$\circ I_t^{\alpha}$
۱۸.....	مشتق کسری ریمان-لیوویل	$\circ D_t^{\alpha}$
۱۹.....	مشتق کسری کاپوتو	$\circ D_t^{*\alpha}$
۲۲.....	توزیع α -پایدار	$S_{\alpha}(\cdot, \cdot, \cdot)$
۲۲.....	دارای توزیع	\sim
۲۳.....	تابع چگالی α -پایدار	$g^{(\alpha)}(\cdot)$
۲۵.....	هم توزیعی	$\stackrel{d}{=}$
۲۸.....	پیچش مرتبه n ام تابع f	$f^{*n}(\cdot)$
۲۸.....	تابع بقا زمان انتظار	$R(\cdot)$
۲۸.....	تابع چگالی زمان انتظار	$f(\cdot)$
۳۰.....	تابع جرم احتمال پواسون	$P_n(\cdot)$
۳۸.....	تابع چگالی n امین زمان انتظار	$f_n(\cdot)$
۳۹.....	تابع جرم احتمال پواسون کسری	$P_n^{\alpha}(\cdot)$
۴۲.....	تابع بقا زمان انتظار کسری	$R^{\alpha}(\cdot)$
۴۲.....	تابع چگالی زمان انتظار کسری	$f^{\alpha}(\cdot)$
۴۳.....	تابع چگالی n امین زمان انتظار کسری	$f_n^{\alpha}(\cdot)$
۶۱.....	پیچش مرتبه n ام تابع چگالی f^{α}	$f^{\alpha * n}$
۶۰.....	تابع چگالی حدی n امین زمان انتظار کسری مقیاسی شده	$fZ_n^{\alpha}(\cdot)$