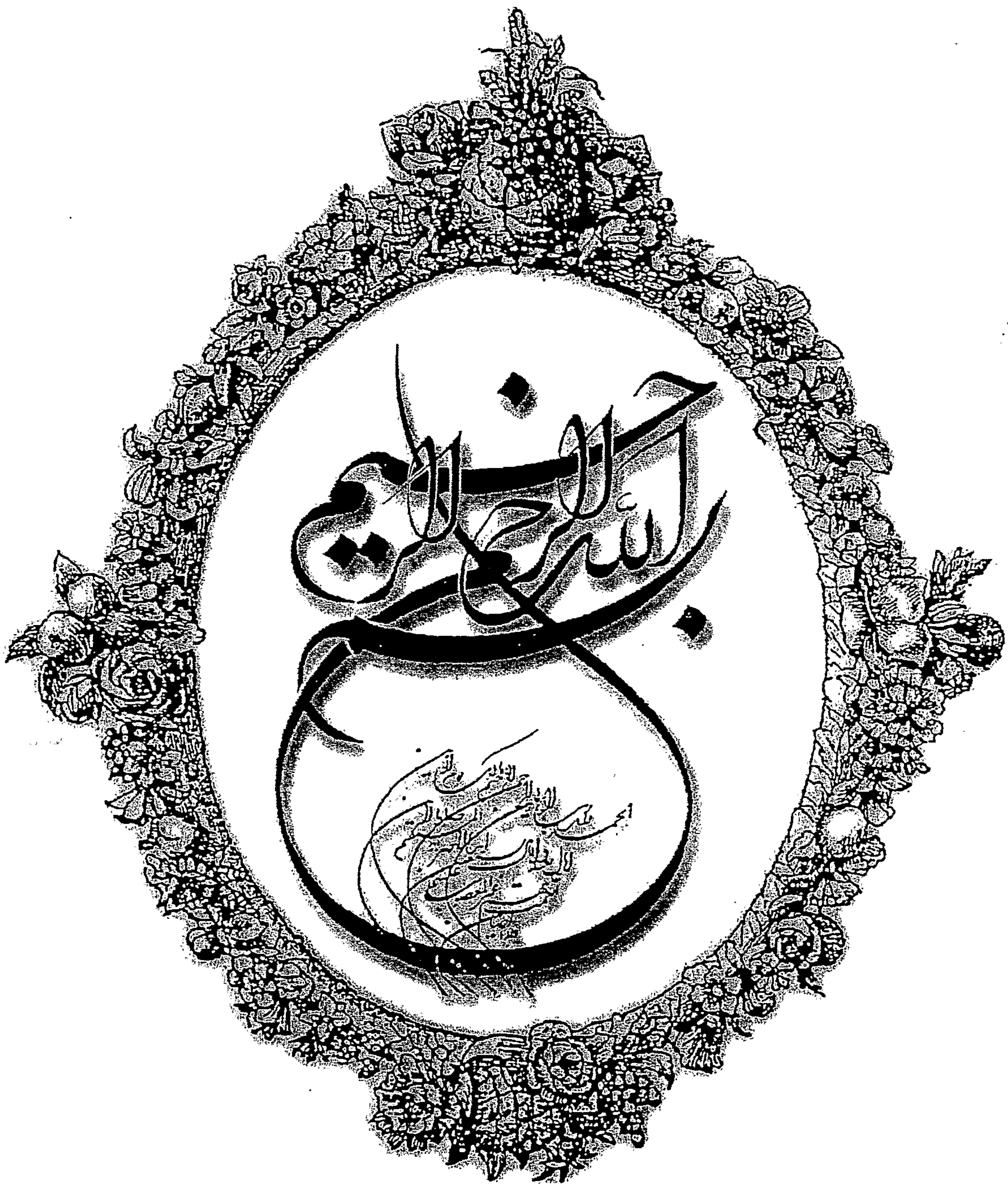
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

بیز و ناریبی تحت تابع زیان لاینکس

پایان نامه کارشناسی ارشد آمار

منصور آقابابایی جزی

۱۳۸۲ /۷/ ۲۰

استاد راهنما

دکتر احمد پارسیان

۱۳۸۲

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته آمار آقای منصور آقابابایی جزی

تحت عنـــوان

بیز و نااریبی تحت تابع زیان لاینکس

۱۳۸۲ /۷/ ۲۰

در تاریخ ۸۲/۴/۱۷ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱ - استاد راهنمای پایان‌نامه — دکتر احمد پارسیان

۲ - استاد مشاور پایان‌نامه — دکتر علی رجالی

۳ - استاد داور ۱ — دکتر مینا توحیدی

۴ - استاد داور ۲ — دکتر سید محمود طاهری

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده — دکتر بیژن طائری

سپاس و قدردانی

بر مهر مادر مهربانم و یاری پدر بزرگوارم و نیز راهنمایی اساتید فرهیخته‌ام استاد احمد پارسیان و دکتر علی رجالی ارج نهاده و به نشان سپاسگزاری بر دست ایشان بوسه می‌نهم.

همواره قدردان دیگر آموزگارانم دکتر امیر نادری، دکتر علی همدانی، دکتر ایوب ساعی، دکتر محمد صالحی، دکتر سید محمود طاهری و ... هستم و خواهم بود و بر خود می‌بالم که افتخار شاگردی در محضر ایشان را یافتم.

همچنین از مدیریت دانشکده‌ی علوم ریاضی به ریاست دکتر فرید بهرامی و نیز مدیریت تحصیلات تکمیلی به سرپرستی دکتر بیژن طائری به ویژه در آموزش نرم‌افزارهای فارسی‌تک و LaTeX سپاسگزارم.

در پایان، صمیمانه مراتب سپاسگزاری و قدردانی خویش را از همکاری اداری منشیان دفتر دانشکده: خانم صدر عاملی و خانم رضایی و مدیریت شبکه‌ی رایانه‌ای: خانم زابلیان و خانم مومنی و همچنین کتابدار کتابخانه: خانم دلیلی و کارمندان پرتلاش دانشکده: آقای حجارزاده، آقای پیمانی و آقای یداللهی ابراز می‌نمایم.

منصور آقابابایی جزی
تیرماه ۱۳۸۲

تقدیم به
پدر و مادر مهربانم
و اساتید فرهیخته‌ام استاد احمد پارسیان و دکتر علی رجالی

فهرست مطالب

چکیده:

فرض می‌کنیم در وضعیت طبیعت θ تصمیم δ گرفته شود و خطای $\Delta \equiv \Delta(\delta,\theta)$ پدید آید. بسیاری از آموزه‌های آمار کلاسیک به ویژه در براورد توابع پارامتری بر پایه‌ی تابع زیان متقارن مربع خطا به فرم کلی $L(\Delta) = \Delta^{2}$ ارائه می‌شود که به لحاظ نظری باعث سادگی بسیاری از محاسبات ریاضی در حصول براوردگرها می‌گردد، اما به لحاظ کاربردی که معمولاً زیانهای حاصل از خطای بیش براورد($0 < \Delta$) و خطای کم براورد($0 > \Delta$) اهمیت یکسانی ندارند؛ مناسب نیست. از این رو علاقمندی به استفاده از توابع زیان نامتقارن همچون تابع زیان لاینکس به فرم کلی $L(\Delta) = b\{e^{a\Delta} - a\Delta - 1\}$ در سالهای اخیر افزایش یافته است.

این پایان‌نامه به بررسی مفاهیم نااریبی عام و قاعده‌ی بیز تحت تابع زیان لاینکس پرداخته و ارتباط این مفاهیم را مورد توجه قرار می‌دهد. در ابتدا به معرفی تابع زیان لاینکس پرداخته و به ویژگیهای ساختاری آن اشاره می‌شود و سپس نشان می‌دهیم که این تابع زیان بر پایه‌ی خطای ساده($\Delta = \delta - \theta$) و خطای لگاریتمی($\Delta = \ln[\frac{\delta}{\theta}]$) شرط رائوبلکول را براورده می‌سازد، در حالی که بر پایه‌ی خطای نسبی ($\Delta = \frac{\delta-\theta}{\theta}$) این شرط براورده نمی‌شود. همچنین فرم کلی توابع زیان $L(\delta,\theta)$ که شرط رائوبلکول را براورده می‌کنند، معرفی می‌شوند.

در بخش دیگر از این بررسی؛ بر پایه‌ی خطای ساده براورد، براوردگرها و پیش‌بینی کننده‌های لاینکس‌نااریب(یکتا) با کمترین مخاطره‌ی یکنواخت (UMRUE) و براوردگرهای بیز پارامترهای مدلهای احتمالی ویژه مانند نرمال، نمایی، پواسون و... تحت تابع زیان لاینکس (در صورت وجود) محاسبه می‌شوند.

فصل اول

مقدمه

فضای وضیعت(پارامتر) Θ و فضای عمل(تصمیم) $\mathcal{A}$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم در وضعیت طبیعت $\theta \in \Theta$، تصمیم $\delta \in \mathcal{A}$ گرفته شود. این تصمیم دارای پیامدهایی است، از جمله خطای $\Delta(\delta,\theta)$ و نیز زیان $L(\delta,\theta)$ که معمولاً تابعی از خطا است. در این حالت بر مبنای سه تایی $(\Theta,\mathcal{A},L)$، به دنبال تصمیمی مانند $\delta^* \in \mathcal{A}$ هستیم که برای هر $\theta \in \Theta$، مقدار زیان آن؛ یعنی $L(\delta^*,\theta)$، کمتر از زیان هر تصمیم دیگر شود. ممکن است بهترین تصمیم؛ یعنی δ^*، به دلایلی قابل حصول نباشد، از این رو علاقمند به یافتن تصمیم بهینه هستیم.

برای مثال؛ اگر پارامتر θ دارای توزیع پیشین π نسبت به اندازه‌ی سیگما-متناهی ν باشد، تصمیم $\delta^\pi \in \mathcal{A}$ که مخاطره‌ی بیزی آن؛ یعنی $E_\pi[L(\delta^\pi,\theta)]$، کمتر از مخاطره‌ی بیزی هر تصمیم دیگر است، می‌تواند یک تصمیم بهینه نسبت به توزیع پیشین π و تحت تابع زیان L باشد.

محاسبه‌ی زیان یا به طور کلی انتخاب تابع زیان نقش مهمی در نظریه‌ی تصمیم دارد و برگزیدن بهترین تصمیم در گرو یافتن یک الگوی زیان مناسب است. برای یافتن تابع زیان مناسبی که در حد امکان تمامی زیانهای یک تصمیم یا خطای ناشی از آن را تحت پوشش خود قرار دهد، بایستی تمام تاثیرات اقتصادی، فرهنگی و ... خطای یک تصمیم را مد نظر قرار داد.

تاثیرات سوء یا زیانهای حاصل از خطای یک تصمیم ممکن است بیش از آن که به میزان خطا بستگی داشته باشد، به علامت خطا وابسته باشد؛ در چنین مواردی الگوی زیان نامتقارن که رفتار متفاوتی در قبال خطای مثبت و منفی دارد، پوشش بیشتر و بهتری به زیان حاصل از خطای یک تصمیم می‌دهد. برای درک بیشتر این نکته مسئله‌ی زیر را مطرح می‌کنیم:

اگر مهندسین سد سازی علاقمند به تعیین μ؛ میانگین ارتفاع سد یک رودخانه باشند و با براوردگر $\hat{\mu}$ آن را براورد کنند، آن‌گاه خطای $\Delta(\hat{\mu},\mu) = \hat{\mu} - \mu$ ایجاد می‌شود. وجود خطای مثبت به معنای براورد ارتفاع سد بیش از ارتفاع واقعی سد است ($\hat{\mu} > \mu$) که باعث افزایش ارتفاع سد می‌گردد؛ در حالی که وجود خطای منفی به معنای براورد ارتفاع سد کمتر از ارتفاع واقعی سد است($\hat{\mu} < \mu$) که باعث کاهش ارتفاع سد می‌گردد. افزایش ارتفاع سد تنها باعث افزایش هزینه‌های سد سازی می‌شود، در حالی که کاهش ارتفاع سد باعث سرازیر شدن و به هدر رفتن سالیانه‌ی آب از بالای سد و از دست دادن منابع انرژی می‌شود و از همه مهمتر، امکان دارد سد بر اثر کم ارتفاعی شکسته شده و زیانهای اقتصادی زیادی بوجود آورد. ملاحظه می‌شود که در این مسئله، زیان خطای منفی بیشتر از زیان خطای مثبت است. در چنین موارد معمولاً استفاده از الگوی زیان نامتقارن پیشنهاد می‌شود.

در بخشهای (۲–۱) و (۲–۲) پس از تعریف تابع زیان و بیان ویژگی‌های عام آن، به معرفی برخی توابع زیان متداول در نظریه‌ی تصمیم می‌پردازیم.

یک مثال از الگوی زیان نامتقارن، تابع زیان لاینکس است. الگوی زیان لاینکس در براورد پارامتر θ به وسیله‌ی براوردگر δ، به فرم زیر اولین بار توسط واریان[۱] در سال ۱۹۷۵ [۴۲] معرفی شد:

$$L(\delta,\theta) = b\left\{e^{a(\delta-\theta)} - a(\delta-\theta) - 1\right\} \quad ; \ a \neq 0 \quad , b > 0$$

این الگوی زیان به دلیل دارا بودن ویژگیهای مطلوب، مورد توجه بسیاری از آمارشناسان قرار گرفته است و تاکنون مقالات زیادی در ارتباط با این تابع زیان انتشار یافته است.

در بخش (۲–۳) به برخی ویژگیها و تعمیمهای این تابع زیان می‌پردازیم.

---

[۱] Varian

اکنون، اگر فرض کنیم بر اساس مشاهده‌ی X از توزیعی با تابع چگالی $f_\theta(x)$ و اندازه‌ی سیگما‌ـمتناهی μ، تصمیم یا براوردگر δ_X برای براورد پارامتر θ انتخاب شود، در این حالت بر مبنای سه تایی $(\Theta, \mathcal{D}, R)$، به دنبال تصمیم یا براوردگری مانند $\delta^*_X \in \mathcal{D}$ هستیم که مخاطره‌ی آن به طور یکنواخت کمتر از مخاطره‌ی هر براوردگر دیگر شود؛ به عبارت دیگر

$$\begin{aligned} R(\delta^*_X, \theta) &= E_\theta[L(\delta^*_X, \theta)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} L(\delta^*_x, \theta) f_\theta(x) d\mu(x) \\ &\leq R(\delta_X, \theta) \quad ; \forall\theta \in \Theta \quad , \forall\delta_X \in \mathcal{D} \end{aligned}$$

اما عملاً دستیابی به این براوردگر به دلیل تنوع براوردگرهای موجود در $\mathcal{D}$ ممکن نیست. از این رو، به یافتن براوردگرهای بهینه اکتفا می‌شود و معمولاً برای دستیابی به آنها از دو روش زیر استفاده می‌شود:

۱) برقراری محدودیت‌های مناسب بر روی براوردگرها

در این روش کلاسی محدود از براوردگرها را با شرایط خاص در نظر گرفته و از بین براوردگرهای این کلاس، براوردگری که دارای کمترین مخاطره است، به عنوان بهترین براوردگر (بهینه) اختیار می‌شود.

برای مثال، لهمن[۲] در سال ۱۹۵۱ [۱۸] اولین بار کلاس محدود براوردگرهای Lـنااریب را به فرم زیر تعریف کرد:

$$U = \{\ \delta_X \quad | \ E_\theta[L(\delta_X, \theta)] \leq E_\theta[L(\delta_X, \theta')] \ \ ; \ \forall\theta, \theta' \in \Theta\}$$

که در آن $\delta_X \in U$ یک براوردگر Lـنااریب برای پارامتر θ است که در صورت وجود، پارامتر θ یک پارامتر Lـبراوردپذیر گفته می‌شود. همچنین براوردگر $\delta^*_X \in U$ که در کلاس براوردگرهای Lـنااریب پارامتر θ دارای کمترین مخاطره است، براوردگر MRU پارامتر θ نامیده می‌شود.

در بخش (۳ـ۱) پس از تعریف نااریبی عام، به بررسی ساختار کلاس براوردگرهای Lـنااریب می‌پردازیم و به ویژه، چارچوب کلاس براوردگرهای لاینکس‌ـنااریب را مشخص می‌کنیم.

---
[۲] Lehmann

در کلاس محدود از براوردگرها(پیش‌بینی‌کننده‌ها)، دستیابی به براوردگری (پیش‌بینی‌کننده‌ای) که کمترین مخاطره را دارد در گرو وجود برخی شرایط است. تحت کلاس براوردگرها و پیش‌بینی‌کننده‌های Lـناااریب، دستیابی به براوردگرها و پیش‌بینی‌کننده‌های MRU مستلزم براورده شدن شرط رائوبلکول توسط تابع زیان L است.

اگر برای هر خانواده از توزیع‌های $\{p_\theta|\theta \in \Theta\}$ با آماره‌ی بسنده‌ی T و آماره‌ی Lـنااریب δ_X برای تابع پارامتری γ_θ، یک براوردگر Lـنااریب دیگر γ_θ؛ مانند δ_T^*، بر پایه‌ی T وجود داشته باشد به طوری که بدتر از δ_X نباشد؛ یا به عبارت دیگر

$$E_\theta[L(\delta_T^*, \gamma_\theta)] \leq E_\theta[L(\delta_X, \gamma_\theta)] \quad ; \forall\theta \in \Theta$$

در این صورت، می‌گوییم شرط رائوبلکول توسط تابع زیان L براورده می‌شود.

در بخشهای (۳—۲) و (۳—۳) و (۳—۴)؛ تحت خطای ساده و لگاریتمی و فرم کلی توابع زیان، به بررسی براورده شدن شرط RB توسط یک جفت از توابع زیان می‌پردازیم و فرم کلی براوردگرهای لاینکس‌ـنااریب (یکتا) با کمترین مخاطره یکنواخت (UMRUE) را به دست می‌آوریم.

به طور مشابه، چارچوب کلاس پیش‌بینی‌کننده‌های Lـنااریب یک متغیر تصادفی Y و نیز پیش‌بینی‌کننده‌ی Lـنااریبی که در این کلاس، کمترین مخاطره را دارد قابل تعریف هستند.

در بخش (۳—۵) به بررسی پیش‌بینی کننده‌های Lـنااریب پرداخته و به ویژه، بهترین پیش‌بینی‌کننده‌ی لاینکس‌ـنااریب و یکتای یک متغیر تصادفی را به دست می‌آوریم.

در بخش (۴—۱) با اشاره به تعریف لاینکس‌ـنااریبی، در حالت کلی نحوه‌ی محاسبه‌ی براوردگرهای UMRU پارامترهای لاینکس‌ـبراوردپذیر بیان می‌شود .

و در بخش (۴—۲) به بررسی لاینکس‌ـنااریبی تحت مدل‌های احتمالی ویژه؛ شامل توزیعهای نرمال، نمایی، گاما، توانی، یکنواخت، نمایی منفی، پارتو، دوجمله‌ای، پواسون و یکنواخت گسسته می‌پردازیم و در صورت لاینکس‌ـبراوردپذیری پارامترهای مورد علاقه در این توزیعها، به محاسبه‌ی براوردگرهای UMRU آنها پرداخته می‌شود و تابع مخاطره‌ی این براوردگرها در صورت امکان به روش تحلیلی محاسبه می‌گردد، در غیر این صورت از طریق شبیه سازی مونت کارلو به رسم تابع مخاطره اکتفا می‌شود.

۲) مرتب کردن براوردگرها با یک قاعده‌ی معین

در این روش با تعریف قاعده‌ای معین، براوردگرها بر مبنای مخاطره‌ی خود مرتب شده و سپس براوردگری که کمترین مخاطره را داشته باشد، به عنوان بهترین براوردگر (بهینه) اختیار می‌شود.

مرتب کردن براوردگرها می‌تواند بر مبنای مخاطره‌ی بیزی براوردگرها صورت گیرد. بر مبنای سه‌تایی $(\Theta, \mathcal{D}, R)$، اگر $\theta \in \Theta$ دارای توزیع پیشین π نسبت به اندازه‌ی سیگماـمتناهی ν باشد و در براورد پارامتر θ و تحت تابع زیان L، مخاطره‌ی بیزی δ_X^π کمتر از مخاطره‌ی بیزی هر براوردگر دیگر باشد؛ یعنی

$$
\begin{aligned}
R(\delta_X^\pi, \theta; \pi) &= E_\pi[R(\delta_X^\pi, \theta)] \\
&= \int_\Theta R(\delta_X^\pi, \theta)\pi(\theta)d\nu(\theta) \\
&= \int_\Theta \int_\Re L(\delta_x^\pi, \theta) f_\theta(x)\pi(\theta)\, d\mu(x) d\nu(\theta) \\
&= \inf_{\delta_X} R(\delta_X, \theta; \pi)
\end{aligned}
$$

آن‌گاه $\delta^\pi(X)$ یک براوردگر بیز θ؛ تحت تابع زیان L و نسبت به توزیع پیشین π، نامیده می‌شود.

در بخش (۵—۱) به معرفی اجمالی براوردگرهای بیز نسبت به یک توزیع پیشین و تحت یک تابع زیان پرداخته و سپس فرم کلی براوردگرهای بیز را تحت تابع زیان لاینکس به دست می‌آوریم. در بخش (۵—۲) به ارتباط مفاهیم نااریبی و بیز تحت تابع زیان لاینکس خواهیم پرداخت. در بخش (۵—۳) تحت تابع زیان لاینکس، به محاسبه و بررسی براوردگرهای بیز پارامترهای مدلهای احتمالی ویژه می‌پردازیم.

فصل دوم

تابع زیان لاینکس

استنباط آماری بر مبنای نظریه‌ی تصمیم بر پایه‌ی سه مؤلفه‌ی اساسی شامل فضای پارامتر، فضای عمل(تصمیم) و تابع زیان استوار است. ساختار تابع زیان علاوه بر ارائه‌ی سود و زیان عددی پیامدهای تصمیم گیری و براورده ساختن ویژگیهای خاص یک تابع زیان، بایستی بیشترین انطباق و همخوانی با واقعیات پیدا و پنهان مسئله داشته باشد.

برای تشکیل چنین ساختاری، می توان ابتدا تابع مطلوبیت پیامدهای حاصل از تصمیم‌گیریهای مختلف را به دست آورد که در عمل با دو مشکل مواجه می شویم؛ اول این‌که معمولاً در ارزیابی پیامدها معیار اندازه گیری عددی وجود ندارد و دوم اینکه حتی در صورت وجود معیار عددی، مقدار سود و زیان پیامدها با چنین معیاری قابل ارزیابی نیست. از این رو نیازمند معرفی معیار عددی مناسبی هستیم که برتری و مطلوبیت(زیان منفی) تصمیم گیرنده را در میان پیامدهای مختلف بازتاب دهد. برگر[۱](۱۹۸۵) [۵] با ارائه‌ی چند اصل چگونگی برپایی معیار عددی مناسب را بیان نمود.

با توجه به اهمیت انتخاب تابع زیان مناسب در حل مسئله تصمیم، ابتدا در بخش (۲—۱) ویژگیهای توابع زیان را مرور خواهیم کرد و در بخش (۲—۲) به معرفی و دسته‌بندی توابع زیان متداول درنظریه‌ی تصمیم می پردازیم. در بخش (۲—۳) به تفصیل به بررسی ساختار تابع زیان لاینکس خواهیم پرداخت.

---

[1] Berger

۲—۱ تابع زیان

اگر پارامتر θ به وسیله‌ی δ براورد شود، آن‌گاه خطای این تصمیم(براورد) را با نماد $\Delta(\delta,\theta)$ نشان می‌دهیم که معمولاً تابعی از θ و δ است. در زیر، سه فرم از این تابع معرفی می‌شوند:

- تابع خطای ساده‌ی براورد[۲]:

$$\Delta(\delta,\theta) = \delta - \theta$$

- تابع خطای نسبی براورد[۳]:

$$\begin{aligned} \Delta(\delta,\theta) &= \frac{\delta-\theta}{\theta} \\ &= \frac{\delta}{\theta} - ۱ \end{aligned}$$

- تابع خطای لگاریتمی براورد[۴]:

$$\begin{aligned} \Delta(\delta,\theta) &= \log(\frac{\delta}{\theta}) \\ &= \log(\frac{\delta-\theta}{\theta} + ۱) \end{aligned}$$

معمولاً از تابع خطای ساده‌ی براورد در مسائل مربوط به پارامترهای مکان و از تابع خطای نسبی و لگاریتمی براورد در مسائل مربوط به پارامترهای مقیاس استفاده می‌شود.

اگر $\Delta(\delta,\theta) > ۰$، آن‌گاه خطای براورد را **خطای بیش براورد**[۵] و در صورتی که $\Delta(\delta,\theta) < ۰$، آن‌گاه خطای براورد را **خطای کم براورد**[۶] می‌گویند.

---

[۲] Simple Estimate Error
[۳] Relative Estimate Error
[۴] Logarithmic Estimate Error
[۵] Overestimate Error
[۶] Underestimate Error