دانشگاه سیستان و بلوچستان
تحصیلات تکمیلی

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد ریاضی محض
(آنالیز)

عنوان:

خاصیت داگاوت برای فضاهای باناخ

استاد راهنما:

دکتر علیرضا احمدی لداری

تحقیق و نگارش:

صغری خسروانی

زمستان ۹۰

تقدير و تشكر

چکیده

در این پایان نامه، به بررسی خاصیت داگاوت برای فضاهای باناخ، عملگرهای ضعیف و زیر فضاهای قوی از فضاهای باناخ با خاصیت داگاوت می‌پردازیم. ثابت می‌کنیم M- ایدآل‌ها و زیرفضاهای با پوچساز تفکیک پذیر دارای خاصیت داگاوت هستند. همچنین ثابت می‌کنیم اگر X زیر فضایی از فضای تفکیک پذیر Y باشد و X دارای خاصیت داگاوت باشد، آنگاه Y را می‌توان به نرم جدیدی مجهز کرد به‌طوری که این نرم جدید منطبق بر نرم اصلی روی X باشد و زوج (X,Y) دارای خاصیت داگاوت باشد.

فهرست مندرجات

۱ **تعاریف و مفاهیم مقدماتی** ۴

۱—۱ فضای برداری ٦

۱—۲ فضای باناخ ۸

۱—۳ قضیه هان — باناخ ۱۳

۱—۴ همگرایی ضعیف و ضعیف — ستاره ۱٦

۱—۵ پایه ۱۹

۱—٦ به طور یکنواخت محدب بودن فضای باناخ ۲۱

۲ **فضاهای باناخ با خاصیت داگاوت** ۲۷

۲—۱ تساوی داگاوت در فضاهای باناخ به طور یکنواخت محدب ۲۸

۲–۲ خاصیت داگاوت ۳۳

۳ عملگرهای ضعیف روی فضاهای باناخ با خاصیت داگاوت ۵۲

۳–۱ عملگرهای ضعیف ۵۳

A واژه‌نامه ۶۳

B منابع ۶۶

پیشگفتار

در سال ۱۹۶۳ داگاوت[1] نشان داد که تساوی نرمی $\|Id + T\| = 1 + \|T\|$، که به تساوی داگاوت معروف است، برای عملگرهای فشرده روی $C[0,1]$ برقرار است([۸]).

در سال ۱۹٦٦ لزانوسکی[2] ثابت کرد نتایج مشابه‌ای برای عملگرهای فشرده روی $L_1[0,1]$ نیز برقرار است([۱٦]). سپس این تساوی به رده بزرگتری از عملگرها روی فضاهای مختلف توسیع داده شد. ([۱, ۲, ۱۳, ۱۹, ۲۱, ۲۲])

به ویژه در [۲۰] نشان داده شد، تساوی داگاوت برای عملگرهای $T \in L(X)$ که هیچ کپی از $\mathbb{C}[0,1]$ ندارد برقرار است.

در فصل دوم این پایان نامه مفهوم یک فضای باناخ با خاصیت داگاوت را معرفی می‌کنیم. نشان می‌دهیم که اگر تساوی داگاوت برای عملگرهای از رتبه یک برقرار باشد، آنگاه این تساوی برای عملگرهای به‌طور ضعیف فشرده نیز برقرار است.

همچنین نشان خواهیم داد اگر تساوی داگاوت برای همه عملگرهای از رتبه یک برقرار باشد، آنگاه X شامل یک کپی از l_1 است. در ادامه Mـ ایدآل را معرفی می‌کنیم و ثابت می‌کنیم که Mـ ایدآل‌ها به طور سرشار دارای خاصیت داگاوت می‌باشند و زیر فضاهای با پوچساز تفکیک پذیر دارای خاصیت داگاوت می باشند. ثابت خواهیم کرد که اگر X یک زیر فضا از فضای تفکیک پذیر Y و X دارای خاصیت داگاوت باشد، آنگاه Y را می‌توان نرم جدیدی روی Y تعریف کرد به طوری که این نرم جدید منطبق بر نرم اصلی روی X باشد و زوج (X, Y) دارای خاصیت داگاوت باشد. در نتیجه هیچ فضایی باخاصیت داگاوت در فضایی با پایه نامشروط نشانده نمی‌شود.

در فصل سوم عملگر های ضعیف و زیر فضاهای قوی از فضاهای باناخ با خاصیت داگاوت را بررسی می‌کنیم. نشان می‌دهیم زیر فضاهای قوی از فضاهای باناخ با خاصیت داگاوت، دارای خاصیت داگاوت هستند.

---

[1] Daugavet

[2] Lozanovskii

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

مقدمه

در این فصل تعاریف و قضایای مقدماتی و اساسی آنالیز را که موردنیاز می‌باشد، بیان می‌کنیم.

این فصل به شش بخش تقسیم شده است. در دو بخش ابتدایی به ترتیب به مفهوم فضای برداری و فضای باناخ می‌پردازیم. در بخش سوم قضیه هان [۱]— باناخ [۲] و طیف یک عملگر را بیان و پس از آن در بخش چهارم همگرایی ضعیف و ضعیف — ستاره را معرفی می‌کنیم. در بخش پنجم، به پایه‌ها در فضای باناخ می‌پردازیم و در بخش ششم به مفاهیم ابتدایی راجع به مجموعه های به‌طور یکنواخت محدب و خاصیت رادون[۳] ـ نیکودیم[۴] پرداخته و قضیه باناخ [۵] ـ اشتینهاوس [۶] را ارائه می‌دهیم.

---

[۱] H.Hahn

[۲] S.Banach

[۳] Radon

[۴] Nikodym

[۵] Banach

[۶] Steinhavs

۱—۱ فضای برداری

تعریف ۱.۱.۱. یک فضای برداری روی میدان(حقیقی یا مختلط) $\mathbb{F}$ (از اسکالرها) عبارتست از یک مجموعه ناتهی(از بردارها)، همراه با نگاشت $+ : (x,y) \longmapsto x+y$، از $X \times X$ بتوی X موسوم به جمع برداری و یک نگاشت $. : (\alpha, x) \longmapsto \alpha x$، از $\mathbb{F} \times X$ بتوی X، موسوم به ضرب اسکالر، به طوریکه به ازای هر اسکالر α، β متعلق به $\mathbb{F}$ و بردارهای x، y، z متعلق به X شرایط زیر برقرار است:

(۱) $x+y=y+x$؛

(۲) $x+(y+z)=(x+y)+z$؛

(۳) عضوی مانند «$\circ$» در X وجود دارد، به طوریکه برای هر x از X، $x = \circ + x$. این عضو را صفر فضای برداری می نامند؛

(۴) به ازای هر بردار x بردار یکتای $-x$ در X موجود است، به طوریکه $x + (-x) = (-x) = \circ$. $-x$ را قرینه x می نامند؛

(۵) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$؛

(٦) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$؛

(۷) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$؛

(۸)$1x=x$.

اگر $\mathbb{F}=\mathbb{R}$، X را فضای برداری حقیقی و اگر $\mathbb{F}=\mathbb{C}$، X را فضای برداری مختلط می نامند.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید X یک فضای برداری روی میدان(حقیقی یا مختلط) $\mathbb{F}$ باشد. نگاشت $x \longmapsto \|x\|$ از X بتوی $\mathbb{F}$ را یک نرم روی X می‌نامند، هر گاه شرایط زیر برقرار باشد:

(۱) به ازای هر $x \in X$، $\|x\| \geq \circ$ و $\|x\| = \circ \Leftrightarrow x = \circ$؛

(۲) به ازای هر $x \in X$ و هر $\alpha \in \mathbb{F}$، $\|\alpha x\| = |\alpha| \ \ \|x\|$؛

(۳) به ازای هر$x, y \in X$، $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

عدد $\|x\|$، نرم x خوانده می‌شود. فضای برداری X همراه با نگاشت $\|.\|$ را یک فضای نرم‌دار نامیده و آن را با نماد $(X, \|.\|)$ یا به اختصار همان X نشان می‌دهند.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی باشد. نگاشت

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

را متر گوییم، هرگاه

(۱) برای هر $x, y \in X$، $d(x,y) \geq 0$.

(۲) $d(x,y) = 0$ اگر و فقط اگر $x = y$.

(۳) به ازای هر $x, y \in X$، $d(x,y) = d(y,x)$.

(۴) به ازای هر $x, y, z \in X$، $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

در این صورت (X,d) را فضای متری گوییم.

تعریف ۵.۱.۱. هرگاه X یک فضای برداری نرم دار باشد، تابع $d(x,y) = \|x-y\|$ یک متر روی X تعریف می‌کند. این متر را متر نرمی می‌نامیم.

۱–۲ فضای باناخ

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید (x_n) یک دنباله در فضای خطی نرم‌دار X باشد. دنباله (x_n) را یک دنباله کوشی می‌نامند، هر گاه به ازای هر $\varepsilon > 0$، یک عدد طبیعی مانند N وجود داشته باشد، به طوری که برای هر $m,n > N$ داشته باشیم:

$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon.$$

تعریف ۱.۲.۱. فضای نرم‌دار $(X, \|.\|)$ را کامل گویند، هرگاه هر دنباله کوشی در این فضا به عضوی از فضا همگرا باشد.

تعریف ۲.۲.۱. به هر فضای برداری نرم‌دار کامل، فضای باناخ گفته می‌شود.

فضای باناخ روی $\mathbb{C}$، فضای باناخ مختلط و فضای باناخ روی $\mathbb{R}$، فضای باناخ حقیقی نامیده می‌شود.

قضیه ۳.۲.۱. هر فضای با بعد متناهی کامل است.

اثبات. به [۳] مراجعه شود. □

تعریف ۴.۲.۱. فضای باناخ c، فضای تمام دنباله‌های همگرای $x = (t_1, t_2, ...)$ از اعداد حقیقی است، که نرم روی این فضا به صورت $\|x\| = \sup\{|t_n| \;:\; n \in \mathbb{N}\}$ تعریف می‌شود.

– فضای باناخ c_0، فضای تمام دنباله‌های $x = (t_1, t_2, ...)$ از اعداد حقیقی است، که $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$ و نرم روی این فضا به صورت $\|x\| = \max\limits_n |t_n|$ تعریف می‌شود.

– فضای باناخ ℓ_p $(1 \le p < \infty)$، فضای تمام دنباله‌های $x = (t_1, t_2, ...)$ از اعداد حقیقی است، که $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |t_i|^p < \infty$ با $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |t_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

– فضای باناخ ℓ_∞، فضای تمام دنباله‌های کراندار $x = (t_1, t_2, ...)$ از اعداد حقیقی با $\|x\|_\infty = \max\limits_n |t_n|$

می‌باشد.

ساده‌ترین مثال‌ها از فضاهای باناخ نامتناهی البعد، $c_\circ$ و $\ell_p(1 \leq p < \infty)$ می‌باشند.

گزاره ۵.۲.۱([۳]). فرض کنید X یک فضای باناخ و M زیرفضای بسته از X باشد. آنگاه فضای خارج‌قسمتی X/M همراه با نرم $\|x + M\| = \inf\{\|x + m\| \ : \ m \in M\}$ باناخ است.

تعریف ۶.۲.۱. نگاشت طبیعی $Q : X \longrightarrow X/M$ با $Q(x) = x + M$ را نگاشت خارج‌قسمتی از X بر روی X/M می‌نامند.

تعریف ۷.۲.۱. فضای متری X را تفکیک پذیر می‌نامند، اگر شامل یک زیر مجموعه چگال شمارش‌پذیر باشد.

تعریف ۸.۲.۱. فرض کنید X و Y دو فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشند. نگاشت $T : X \longrightarrow Y$ را یک عملگر خطی از X به Y می‌نامند، هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

(۱) به ازای هر $x, y \in X$، $T(x + y) = Tx + Ty$؛

(۲) به ازای هر $x \in X$ و هر $\lambda \in \mathbb{F}$، $T(\lambda x) = \lambda Tx$.

یاد آور می‌شویم که عملگر خطی $P : X \to X$ تصویری نامیده می‌شود، اگر $P^{۲} = P$.

تعریف ۹.۲.۱. اگر X یک فضای برداری روی $\mathbb{F}$ باشد، هر عملگر خطی از X به $\mathbb{F}$ را یک تابعک خطی روی X می‌نامیم.

تعریف ۱۰.۲.۱. فرض کنید T یک عملگر خطی از فضای نرم‌دار X به فضای نرم‌دار Y باشد. عملگر خطی T را کراندار گویند، هر گاه عدد ثابتی چون M وجود داشته باشد، به طوری که برای هر $x \in X$

نامساوی زیر برقرار باشد:

$$\|Tx\| \leq M\|x\| \ .$$

در نامساوی فوق، عدد ثابت M را یک کران بالای عملگر T می‌نامند. کران بالای یک عملگر وقتی اهمیت پیدا می‌کند که ثابت M بهترین (کوچکترین) مقدار ممکن باشد. چنین M ی را بنابه تعریف، نرم عملگر T نامیده و آن را با علامت $\|T\|$ نشان می‌دهند. در حقیقت

$$\|T\| = \inf\{M > \circ \ : \ \|Tx\| \leq M\|x\|, \quad \forall x \in X\}.$$

تعریف ۱.۲.۱۱. فرض کنید X و Y دو فضای خطی نرم‌دار باشند. مجموعه تمام عملگرهای خطی پیوسته از X به Y را با $L(X,Y)$ نشان می‌دهند.

قضیه ۱.۲.۱۲. $L(X,Y)$ با جمع نقطه‌ای و ضرب اسکالر، یک فضای برداری نرم‌دار است. بعلاوه اگر Y باناخ باشد $L(X,Y)$ نیز باناخ است و بالعکس.

اثبات. به [۱۷] مراجعه شود. □

گزاره ۱.۲.۱۳. اگر X یک فضای خطی نرم‌دار و T یک عملگرخطی روی این فضا باشد، آنگاه

$$\begin{aligned}
\|T\| &= \inf\{M > \circ \ : \ \|Tx\| \leq M\|x\|, \quad \forall x \in X\} \\
&= \sup\{\|Tx\| \ : \ \|x\| \leq ۱\} \\
&= \sup\{\|Tx\| \ : \ \|x\| < ۱\} \\
&= \sup\{\|Tx\| \ : \ \|x\| = ۱\} \\
&= \sup\{\tfrac{\|Tx\|}{\|x\|} \ : \ x \in X, x \neq \circ\}.
\end{aligned}$$

اثبات. به [۳] مراجعه شود. □

نتیجه ۱.۲.۱۴. برای عملگر خطی و کراندار $T \in L(X,Y)$ رابطه زیر به ازای هر $x \in X$، برقرار است:

$$\|Tx\| \leq \|T\| \ \|x\|.$$

تعریف ۱۵.۲.۱. منظور از رتبه عملگر خطی $T : X \to Y$، بعد فضای $T(X)$(برد T) است.

تعریف ۱۶.۲.۱. فرض کنید X و Y فضاهای خطی باشند. عملگر خطی $T : X \to Y$ متناهی‌البعد نامیده می‌شود، اگر فضای برد T متناهی‌البعد باشد.

اگر $T : X \to Y$ عملگر از رتبه یک و y برداری ناصفر در برد T باشد، آنگاه تابعک خطی f روی X وجود دارد به طوری که برای هر $y \in Y$، $T(x) = f(x)y$.

ما $f(x)y$ را با $(f \otimes y)(x)$ نشان می‌دهیم، یعنی $T = f \otimes y$.

قضیه ۱۷.۲.۱. فرض کنید X یک فضای خطی نرم‌دار باشد. آنگاه فضای X^* باناخ است.

اثبات. به [۳] مراجعه شود. □

قضیه ۱۸.۲.۱. فرض کنید X یک فضای خطی نرم‌دار باشد. آنگاه به ازای هر $x \in X$،

$$\|x\| = \sup\{|x^*(x)| \ : \ \|x^*\| \leq ۱\}.$$

اثبات. به [۳] مراجعه شود. □

تعریف ۱۹.۲.۱. فضاهای باناخ X و Y را یکریخت گویند و می‌نویسند $X \sim Y$، اگر یک عملگر خطی، کراندار، یک به یک و پوشا مانند $T : X \longrightarrow Y$ موجود باشد. به عبارت معادل، X و Y یکریخت هستند اگر عملگر پوشای $T : X \to Y$ و ثابت‌های $m_۱ \geq ۱$ و $m_۲ > ۰$ موجود باشند، به طوری که

$$m_۲\|x\| \leq \|T(x)\| \leq m_۱\|x\| \ .$$

اگر برای هر $x \in X$ داشته باشیم $\|T(x)\| = \|x\|$، عملگر $T : X \longrightarrow Y$ را طولپا گوییم.

تعریف ۲۰.۲.۱. فرض کنید X و Y فضاهای باناخ باشند. فضای Y در X نشانده می‌شود، اگر Y با

زیرفضایی از X یکریخت باشد.

تعریف ۲۱.۲.۱. اگر Y زیر فضایی از فضای برداری X باشد، مجموعه

$$Y^{\perp} = \{T \in L(X) : T(y) = \circ, \forall y \in Y\}$$

را پوچساز Y می‌نامیم.

تعریف ۲۲.۲.۱. فرض کنید $f : X \to \mathbb{R}$ یک تابع باشد. تکیه‌گاه f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$supp(f) = \overline{\{x \in X : \ f(x) \neq \circ\}}.$$

۱–۳ قضیه هان – باناخ

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید X فضای خطی باشد و نگاشت $P : X \longrightarrow \mathbb{R}$ دارای خواص زیر باشد:

(۱) به ازای هر $x \in X$، $P\ (x) \geq 0$؛

(۲) به ازای هر $x, y \in X$، $P\ (x+y) \leq P\ (x) + P\ (y)$؛

(۳) به ازای هر $x \in X$ و هر $\lambda \in \mathbb{R}$، $P\ (\lambda x) = \lambda P\ (x), (\lambda > 0)$؛

نگاشت P با خواص فوق یک تابعک محدب نامیده می‌شود. اگر تنها شرایط (۲) و (۳) برقرار باشند، آنگاه تابعک P را زیرخطی می‌نامند.

قضیه ۲.۳.۱(هان – باناخ): فرض کنید M یک زیرفضای بسته از فضای خطی و حقیقی X، P تابعکی زیرخطی روی X و f تابعکی خطی روی M باشد، به طوری که به ازای هر $x \in M$، $f(x) \leq P(x)$. آنگاه یک تابعک خطی مانند F روی X موجود است، به طوری که F توسیع f بوده و به ازای هر $x \in X$، $F(x) \leq P(x)$.

اثبات. به [۳] مراجعه شود. □

فضای دوگان X^* با X^{**} نشان داده می‌شود و آن را دوگان دوم می‌نامند. این فضا از اهمیت خاصی برخوردار است.

تعریف ۳.۳.۱. نگاشت $J : X \to X^{**}$ با ضابطه $x \to J(x)$ را که به ازای هر $x^* \in X^*$ به صورت

$$J(x)x^* = x^*(x)$$

تعریف می شود، نگاشت کانونی می‌نامیم.

نگاشت J در حالت کلی پوشا نیست، اما در صورت پوشا بودن، X دارای خواص جالبی است، که ابتدا این خاصیت را تحت عنوان یک تعریف بیان می‌کنیم.

تعریف ۴.۳.۱. فضای خطی نرم‌دار X را انعکاسی گوییم، هرگاه نگاشت کانونی J پوشا باشد، یعنی؛

$J(X) \sim X^{**}$.

مهم‌ترین فضاهای باناخ انعکاسی، فضاهای ℓ_p، $\ell_p(\mu)$ برای $1 < p < \infty$ می‌باشند.

تعریف ۵.۳.۱. اگر X یک فضای برداری نرم دار باشد، گوی واحد X، که با B_X نشان داده می‌شود، عبارت است از مجموعه تمام عناصر $x \in X$ که $\|x\| \leq 1$.

تعریف ۶.۳.۱. اگر X یک فضای برداری نرم دار باشد، کره واحد X، که با S_X نشان داده می‌شود، عبارت است از مجموعه تمام عناصر $x \in X$ که $\|x\| = 1$.

قضیه ۷.۳.۱. فضای خطی نرم‌دار X انعکاسی است اگر و تنها اگر $T(B_X)$ فشرده ضعیف باشد.

اثبات. به [۴] مراجعه شود. □

تعریف ۸.۳.۱. فرض کنید X و Y دو فضای باناخ باشند. عملگر خطی $T : X \longrightarrow Y$ را فشرده می‌نامند هر گاه $\overline{T(B_X)}$ در Y فشرده باشد.

تعریف ۹.۳.۱. فرض کنید X و Y دو فضای باناخ و $T : X \longrightarrow Y$ عملگر خطی باشد. در این صورت $T^* : Y^* \longrightarrow X^*$ که برای هر $f \in Y^*$ به صورت $T^*(f) = foT$ تعریف می‌شود، عملگر الحاقی T نامیده می‌شود.

قضیه ۱۰.۳.۱. اگر T کراندار باشد، آنگاه T^* کراندار است و $\|T^*\| = \|T\|$.

اثبات. به [۹] مراجعه شود. □

قضیه زیر رابطه بین فشردگی T و T^* را بیان می‌کند.

قضیه ۱۱.۳.۱. فرض کنید X و Y دو فضای باناخ و $T : X \longrightarrow Y$ یک عملگر خطی باشد. در این صورت T فشرده است اگر و فقط اگر T^* فشرده باشد.

اثبات. به [۹] مراجعه شود. □

تعریف ۱.۳.۱۲. فرض کنید X فضای خطی نرم‌دار باشد و$A \in L(X, X)$. $\lambda \in \mathbb{C}$ یک مقدار ویژه برای A است، اگر$ker(A-\lambda) \neq \{0\}$. اگر$x$ عنصر ناصفری در$ker(A-\lambda)$ باشد، x بردار ویژه A نامیده می‌شود. مجموعه مقادیر ویژه A به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\sigma_\rho(A) = \{\lambda \in C : ker(A-\lambda) \neq \{0\}\}.$$

تعریف ۱.۳.۱۳. عدد λ یک نقطه تقریباً طیفی از عملگر T می‌باشد، اگر دنباله‌ای از بردارهای $\{x_n\}$ با شرط$\|x_n\| = 1$ وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر n

$$\lim_{n\to\infty} \|Tx_n - \lambda x_n\| = 0.$$

تعریف ۱.۳.۱۴. فرض کنید X فضای خطی نرم‌دار و$T \in L(X)$. مجموعه طیف T تشکیل شده از$\lambda \in C$ که $T-\lambda$، در$B(X)$، معکوس پذیر نباشد و با $\sigma(T)$، نشان داده می‌شود:

$$\sigma(T) = \{\lambda \in C : T-\lambda \notin invertL(X)\},$$

که $invrertL(X)$، مجموعه عناصر معکوس پذیر فضای $L(X)$ می‌باشد.

قضیه ۱.۳.۱۵. اگر X فضای حقیقی باشد. طیف عملگر $T \in L(X)$ برابر با طیف الحاقش می‌باشد، یعنی

$$\sigma(T) = \sigma(T^*).$$

اثبات. به [۹] مراجعه شود. □

قضیه ۱.۳.۱۶. $\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|T\|\}$.

اثبات. به [۹] مراجعه شود. □

قضیه ۱.۳.۱۷. اگر $T \in L(X)$ یک عملگر فشرده روی فضای باناخ نامتناهی البعد باشد، آنگاه هر نقطه ناصفر از طیف T یک مقدار ویژه است.

اثبات. به [۱۰] مراجعه شود. □

۴−۱ همگرایی ضعیف و ضعیف − ستاره

دو توپولوژی برداری که از مهم‌ترین توپولوژی‌های ضعیف‌تر از توپولوژی نرم می‌باشند، توپولوژی ضعیف و توپولوژی ضعیف − ستاره هستند. توپولوژی ضعیف در هر فضای خطی نرم‌دار قابل ارائه است و توپولوژی ضعیف − ستاره فقط در فضاهای دوگان ارائه می‌شود.

تعریف ۱.۴.۱. یک فضای توپولوژیک، یک مجموعه غیرتهی X، همراه با یک گردایهٔ غیرتهی τ، از زیرمجموعه‌های باز X است، به‌طوری که

(۱) اجتماع، هر گردایه از مجموعه‌های در τ، عضوی از τ شود.

(۲) اشتراک هر گردایهٔ متناهی ازمجموعه‌های در τ، عضوی از τ شود.

(۳) مجموعه تهی و X به τ تعلق داشته باشند.

زوج (X,τ) را که در شرایط تعریف صدق می‌کند، فضای توپولوژیک می‌نامند و گردایهٔ τ یک توپولوژی روی X نامیده می‌شود.

اگر X یک فضای برداری نرم‌دار باشد، همگرایی‌های در نرم و ضعیف را می‌توان بین اعضای X در نظر گرفت. همچنین در X^* همگرایی‌های در نرم، ضعیف و ضعیف − ستاره را می توان تعریف کرد.

تعریف ۲.۴.۱. فرض کنید X یک فضای برداری نرم دار دلخواه با دوگان X^* باشد. ضعیف ترین توپولوژی روی X را که تمام اعضای X^* روی آن پیوسته باشند، یک توپولوژی ضعیف روی X می‌نامیم و با $\sigma(X,X^*)$ نشان می‌دهیم.

اعضایی از $\sigma(X,X^*)$ به شکل $\{x : |f_i(x)| < \varepsilon, i = ۱,...,n\}$ که در آن $\{f_۱,...,f_n\}$ اعضای متناهی از X^* هستند، یک پایه توپولوژیک برای $\sigma(X,X^*)$ تشکیل می‌دهند. توپولوژی ضعیف روی یک فضا ضعیف تر از تویولوژی حاصل از نرم است. اگر به جای X، X^* را در نظر بگیریم، توپولوژی حاصل را توپولوژی ضعیف−ستاره می‌نامیم و با $\sigma(X^*,X^{**})$ نشان می‌دهیم. اعضایی از $\sigma(X^*,X^{**})$ به صورت

$\{f: |f(x_i)| < \varepsilon, i = ۱, ..., n\}$، که مجموعه $\{x_۱, ..., x_n\}$ اعضای متناهی از X هستند، یک پایه توپولوژیک برای $\sigma(X^*, X^{**})$ تشکیل می‌دهند.

تعریف ۱.۴.۳. دنبالهٔ (f_n) از $L(X, \mathbb{F})$ به f همگرای قوی می‌باشد، اگر $\|f_n - f\| \longrightarrow ۰$، وقتی $n \longrightarrow \infty$.

تعریف ۱.۴.۴. فرض کنید (x_n) دنباله‌ای در فضای خطی نرم‌دار X باشد. دنبالهٔ (x_n) به طور ضعیف به $x_۰ \in X$ همگرا است و می نویسیم $x_n \xrightarrow{w} x_۰$، اگر به ازای هر $x^* \in X^*$، $x^*(x_۰) = \lim\limits_{n\to\infty} x^*(x_n)$.

تعریف ۱.۴.۵. فرض کنید X فضای خطی نرم‌دار باشد. دنبالهٔ (x_n^*) در X^* به طور ضعیف $-$ ستاره به $x_۰^* \in X^*$ همگرا است و می‌نویسیم $x_n^* \xrightarrow{w^*} x_۰^*$، اگر به ازای هر $x \in X$، $x_۰^*(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n^*(x)$.

قضیه ۱.۴.۶. همگرایی قوی، همگرایی ضعیف و همگرایی ضعیف، همگرایی ضعیف $-$ ستاره را نتیجه می‌دهد.

اثبات. به [۳] مراجعه شود. $\square$

تعریف ۱.۴.۷. فرض کنید X یک فضای باناخ باشد. مجموعه $A \subset X$ به‌طور ضعیف فشرده‌است، اگر هر دنباله (x_n) در A شامل یک زیردنباله همگرای ضعیف در A باشد.

تعریف ۱.۴.۸. فرض کنید X و Y دو فضای باناخ باشند. عملگر خطی $T: X \longrightarrow Y$ را به‌طور ضعیف فشرده می‌نامند هر گاه $\overline{T(B_X)}$ در Y به‌طور ضعیف فشرده باشد.

تعریف ۱.۴.۹. زیرمجموعه A از فضای توپولوژیک X هیچ جا چگال در X است، هرگاه درون $\overline{A}$ تهی باشد($int\overline{A} = \varnothing$).

تعریف ۱.۴.۱۰. فضای توپولوژیک X را از رسته اول نامیم، هرگاه X اجتماع شمارش‌پذیری از